目　录

第二部分　边值问题和特征值问题

第三部分　各种微分方程

第一部分 一般解法[1]

第一章 一阶微分方程

§ 1. 已解出导数的微分方程：$y'=f(x,y)$；基本概念

1.1. 微分方程的表示法和几何意义. 可微函数 $y=\varphi(x)$，如果满足微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ 或 } y'=f(x,y), \tag{1}$$

即在 x 的某一变化区间上，使得

$$\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))$$

对 x 恒等成立，则称为此微分方程的解、积分或积分曲线.

方程(非恒等式)

$$\Phi(x,y,C)=0, \tag{2}$$

如果当常数 C 从某一确定的区域取值时，由此方程解出 y 所得到的一些可微函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(1)的积分，则称此方程为方程(1)的通解或通积分. 这时，函数 Φ 本身通常也称为微分方程(1)的通积分.

我们考虑方程 $y'=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 定义在 xy 平

---

1) [第一部分中所讨论的各种问题的详尽叙述，以及进一步的细节，可在下列著作中找到*：Петровский; Понтрягин; Еругин; Степанов; Ince; Матвеев; Sansone; Coddington 和 Levinson; Хартман; Bellman. ——俄译本编者注.]

* 本手册参考文献中采用的缩写，列于书末.

面的某一个开区域 G 上. 设在区域 G 的每一点 (x,y) 定义了这样的角 α,使得

$$\mathrm{tg}\alpha=f(x, y).$$

点 (x, y) 同与 Ox 轴的正方向组成角 α 的很短的线段一起,称为线素.线素的总体构成直观描绘给定微分方程的方向场(图 1). 积分曲线乃是这样的光滑曲线, 它与给定方向场的方向"一致",即在此曲线上的每一点上具有由此方向场所指示的切线.

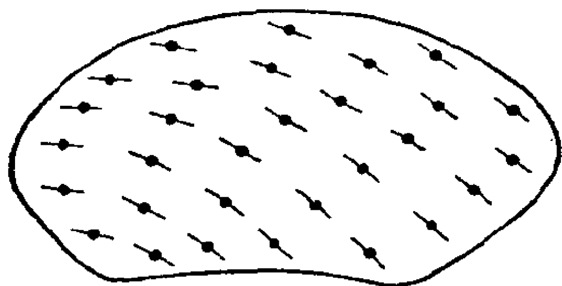


图 1

在某些情况下,不难找到平面上这样一些点的集合,对应于这些点,由给定的微分方程规定了同样的方向 α(例如,对于方程 $y'=g(y)$,由等式 $g(y)=\mathrm{tg}\alpha$ 确定的平行于 x 轴的一条或几条直线就是这种点的集合). 由给定微分方程确定的具有同样一个方向 α 的诸点所构成的曲线,称为对应于 α 的等斜线.

1.2. 解的存在和唯一性. 在以后各处,只要没有特别申明,我们将假定(除其他假设以外),函数 $f(x, y)$ 在 xy 平面的某一个开区域 G 内是连续的. 这时,下述的皮亚诺存在定理成立:通过区域 G 的每一点(ξ, η),至少有一条积分曲线,而且这些曲线中的每一条,可以向两个方面延拓直至全部包含于 G 内而本身又包含着点(ξ, η)的任意闭区域的边界.

第三部分例 1.57 表明,通过某一点(ξ, η)的积分曲线,实际上可以多于一条[1].

1) 甚至可能有这种情况:通过区域的每一点,有无穷多条积分曲线; 见 M. A. Лаврентьев, *Math. Zeitschrift* **23** (1925), p. 197—209. [关于积分曲线束的进一步的性质见 Sansone; Хартман.——俄译本编者注.]

如果在区域 G 内，$f(x, y)$ 具有连续的一阶偏导数，或者对于 y 满足李普希茨条件：

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant L|y_2-y_1| \quad (L\text{为常数}), \qquad (3)$$

则通过每一点显然仅有一条积分曲线。

当点(ξ, η)是函数 $f(x, y)$的间断点时，例如从 5.3 节，还可以得出下述结论：如果$f(x, y)$当 $0<|x-\xi| \leqslant a$, $|y-\eta| \leqslant b$ 时连续(因而，并未假设在直线 $x=\xi$ 上的连续性)，并且

$$|f(x, y)| \leqslant M(x),$$

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant |y_2-y_1| N(x),$$

其中 $M(x)$, $N(x)$在整个区间$|x-\xi| \leqslant a$ 上是可积的，则存在一个且仅存在一个函数 $y=\varphi(x)$，使得当 $x \neq \xi$ 时

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)),$$

并且当 $x \to \xi$ 时 $y \to \eta$。例如取

$$M(x) \leqslant A(x-\xi)^{-\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

$$N(x) \leqslant B(x-\xi)^{-\beta}, \quad 0<\beta<1,$$

函数 $M(x)$, $N(x, y)$显然是可积的。

如果函数$f(x, y)$具有形式$f(x, y)=\dfrac{h(x, y)}{g(x, y)}$，则微分方程(1)可写为下列形式：

$$g(x, y) y'=h(x, y),$$

或者写为方程组

$$\frac{dx}{dt}=g(x, y), \frac{dy}{dt}=h(x, y)$$

的形式。关于这种形式的方程，也可以见 4.12 节，4.13 节，7.2 节。

关于解对于初始条件的依赖性，以及解对于方程本身变化的依赖性，见 2.7 节，5.4 节。

§ 2. 已解出导数的微分方程：$y'=f(x, y)$；解法

2.1. 折线法. 对于给定的微分方程 §1(1)，如果建立了方向场，那么就不难建立其积分曲线的近似表示，因此也就不难形成关于这些积分曲线走向的一般了解[1]。

用加大图形的比例尺和增多所建立的线素的个数的方

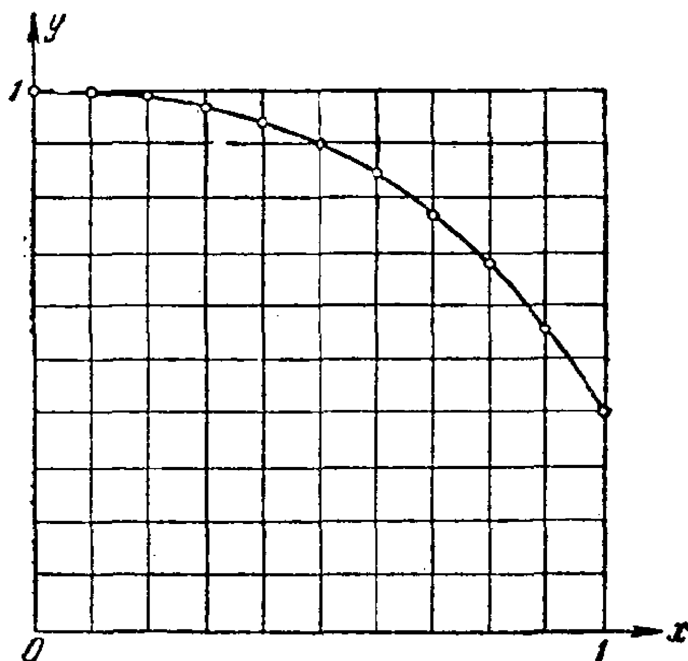


图 2

1）描绘积分曲线的所谓“拐线”，即使得 $y''=0$ 的点的集合，常常是有用的。在函数 $f(x,y)$ 是连续可微的情况下，对于方程 §1(1)的每一个解，有

$$y''=f_x+y'f_y=f_x+ff_y,$$

于是条件 $y''=0$ 化为方程

$$f_x+ff_y=0. \qquad (*)$$

因为为使给定点是拐点，条件 $y''=0$ 只是必要的，而不是充分的，所以一些不是拐点的点也可能属于“拐线”。

例。对于黎卡提方程 $y'=x-y^2$，拐线的方程(*)具有形式：$2y(x-y^2)=1$.

法，显然可以提高图形的精确性. 但是，且不必说比例尺的加大会受到限制，这种方法的主要缺点在于：当只需要得到一条积分曲线时，也不得不画出多余的线素，而且，按照以解析形式给出的微分方程确定线素，有时是很复杂的.

在折线法中，如果希望建立通过给定点 (ξ, η) 的积分曲线，那么首先从点 (ξ, η) 出发，在对应于点 (ξ, η) 的线素所确定的方向上引一个线段，到达某一点 (ξ_1, η_1)，然后，在对应于点 (ξ_1, η_1) 的线素所确定的方向上引一个线段，到达点 (ξ_2, η_2)，等等. 这样就得到了某一条近似于所求的积分曲线的折线.

(图 2 表示对于方程 $y' = -\frac{x}{y}$，而 $\xi=0, \eta=1$，沿 x 轴的步长不变且等于 0.1 时，用这种方法所得到的折线；也可以见 28.1 节.)这种几何上的想法，也可以从分析上来说明，因此这种方法也可用来求近似数值解.

如果函数 $f(x, y)$ 满足 1.2 节中指出的唯一性条件，则当每节的长度无限减小(因而节数增加)时所得到的折线序列，收敛于通过点 (ξ, η) 的积分曲线.

在理论上，只要选取适当的步长，就能得到对于所求积分曲线的任意精确的近似. 然而，实际上是不容易找到这样的步长的，而近似解，即使它的折线描绘得非常光滑，同精确解也可能偏差很大. 例如，相应于图 2 的真正的积分曲线(半圆)，当 $x=1$ 时，纵坐标等于零，然而近似曲线给出的数值则为 $y=0.4$. 关于这种方法的进一步发展及其改进，见 28.2 节.

2.2. 皮卡尔-林德略夫逐次逼近法. 设函数 $f(x, y)$ 在中心为 (ξ, η) 的矩形域

$$|x-\xi|<a\leqslant\infty, \quad |y-\eta|<b\leqslant\infty$$

内满足 § 1(3)的李普希茨条件，并且是有界的：$|f|\leqslant A$. 我

们取通过点(ξ, η)的任意连续曲线 $y=\varphi_0(x)$，例如，$\varphi_0(x)\equiv\eta$. 其次假设

$$\varphi_1(x)=\eta+\int_{\xi}^{x} f(x, \varphi_0(x))\,dx,$$

$$\varphi_2(x)=\eta+\int_{\xi}^{x} f(x, \varphi_1(x))\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

这时，序列$\{\varphi_n(x)\}$，当 $n\to\infty$时，至少在区间

$$|x-\xi|<\min\left(a, \frac{b}{A}\right)$$

上，收敛于通过点(ξ, η)的积分曲线 $\varphi(x)$.

如果假设 $\varphi_0=\eta$，则对于差 $\varphi_n(x)-\varphi(x)$，我们有下列估值：

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{A}{L}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{L^{\nu}|x-\xi|^{\nu}}{\nu!}.$$

如果函数 $f(x, \eta)$ 以及差值的比

$$D(x, y_1, y_2)=\frac{f(x, y_2)-f(x, y_1)}{y_2-y_1}\qquad(y_2\neq y_1)$$

在区间 $\xi\leqslant x\leqslant\xi+a$ 中不变号，那么，当 $\varphi_0=\eta$ 时，则有

$$\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)\qquad 当\ D>0, f(x, \eta)\geqslant 0\ 时,$$

$$\varphi_{2n}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi_{2n+1}(x)\qquad 当\ D<0, f(x, \eta)\geqslant 0\ 时^{1)}.$$

当(ξ, η)是函数$f(x, y)$的间断点时，我们也可以用逐次逼近法来求解(见 1.2 节)。

这种方法也可以用来求近似数值解。这时，相应的定积分，可用某一种近似方法来计算，例如，按梯形公式

---

1) 见 M. Müller, *Jahrbuch FdM* **60**$_{\mathrm{I}}$(1934), p.374.

$$\int_{x}^{x+h} g(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[g(x)+g(x+h)]$$

或者按辛卜生公式

$$\int_{x}^{x+2h} g(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}[g(x)+4\,g(x+h)+g(x+2h)].$$

关于逐次逼近法的进一步发展，见 28.4 节。

逐次逼近法的几何意义如下（图 3）。设已知曲线 $y=\varphi_n(x)$，它是解的第 n 次近似. 我们将曲线各点补充为线素，这只需在其每一点上给出角系数 $f(x,\varphi_n(x))$. 如果将这些线素沿着和它们相应的纵坐标而与本身平行地移动，使得它们顺着一条连续可微的曲线分布，那么这条曲线就是下一次的近似：$y=\varphi_{n+1}(x)$. 这种移动也可以按另一种方式进行[1]：例如，可以将每个线素沿着与其垂直的方向移动；这时，逐次逼近的收敛性甚至更好，但是，所得到的新的近似已是在另一区间上了(图 4).

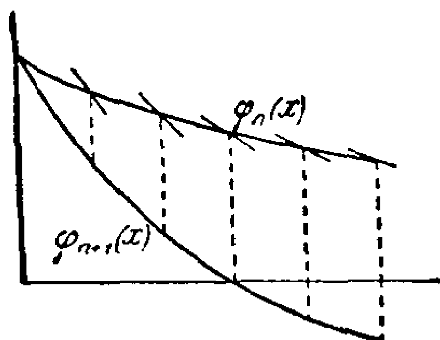


图 3

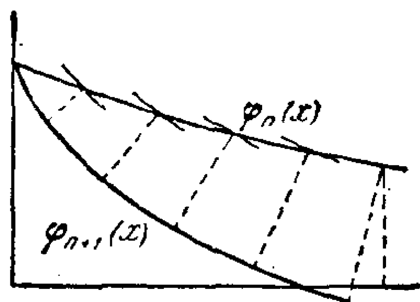


图 4

1) 见 L. Vietoris, *Monatshefte f. Math.* 39(1932), p.15—50; 41(1934), p.384—391; 48(1939), p.19—25. 这里还讨论了带有改变线素方向的移动.

2.3. 幂级数的应用. 如果函数 $f(x, y)$ 在矩形域

$$|x-\xi|<a\leqslant\infty,\ |y-\eta|<b\leqslant\infty$$

内可以展开为幂级数

$$f(x, y)=\sum_{p,q} a_{p,q}(x-\xi)^p(y-\eta)^q,$$

则微分方程 § 1 (1)通过点 (ξ, η) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$，在点 $x=\xi$ 的邻域内可以表示为下列形式的幂级数：

$$\varphi(x)=\eta+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(x-\xi)^\nu.$$

当

$$|x-\xi|<\min\left(a, \frac{b}{A}\right)$$

时，这个级数在任何情况下都收敛，其中 A 为在所考虑的矩形域上 $|f(x, y)|$ 值的上界. 系数 c_ν，可以过通使等式

$$\sum_{p,q} a_{p,q}(x-\xi)^p\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(x-\xi)^\nu\right\}^q=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu c_\nu(x-\xi)^{\nu-1}$$

中 $x-\xi$ 的同次项的系数相等来逐个计算.

2.4. 级数展开的更一般的情况[1]. 设已给微分方程

$$y'=\sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu(x)y^\nu. \tag{1}$$

把级数

$$y=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(x) \tag{2}$$

形式地代入此方程，我们得到

---

1) [更加详尽的情况可以在下列著作中找到：Еругин: Tricomi; Sansone: Coddington 和 Levinson; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950. ——俄译本编者注.]

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu'=\sum_p\sum_{k_1,\cdots,k_p}\frac{(k_1+\cdots+k_p)!}{k_1!\cdots k_p!}f_{k_1+\cdots+k_p}\varphi_1^{k_1}\cdots\varphi_p^{k_p}.\quad(3)$$

这个表达式的右端，将其各项重新安排以后，可以具有通常的无穷级数的形式，于是等式(3)便化为下列形式：

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu'(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega_\nu(x);\quad(4)$$

每一个 $\omega_\nu(x)$ 表示位于等式(3)右端的有限项或者无限多项之和，并且 ω_1 不包含任何一个 φ_ν，而其余每一个 $\omega_\nu(x)$ 只包含 $\varphi_1,\cdots\varphi_{\nu-1}$。因而，如果

$$\varphi_\nu'=\omega_\nu\quad(\nu=1,2,\cdots),$$

则方程(4)，以及方程(1)，形式地被满足. 如果要寻找满足初始条件 $y(a)=\eta$ 的解 $y(x)$，则可以假设，例如

$$\varphi_1(x)=\eta+\int_a^x\omega_1(t)dt\ \text{和}\ \varphi_\nu(x)=\int_a^x\omega_\nu(t)dt\ \text{当}\ \nu>1\ \text{时}.$$

当满足下列条件时，由这些函数组成的级数(2)，如同将其逐项微分后所得到的级数一样，绝对收敛和均匀收敛，并且是方程(1)满足初始条件 $y(a)=\eta$ 的解，即当：

(a)当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，函数 $f_\nu(x)$ 连续；

(b)存在这样一些当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时连续的函数 $F_\nu(x)$，使得 $|f_\nu|\leqslant F_\nu$，而级数 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}F_\nu(x)Y^\nu$，当 $Y=r>0$ 时，在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上均匀收敛；

(c)微分方程

$$Y'=\sum_{\nu=0}^{\infty}F_\nu(x)Y^\nu$$

具有满足初始条件 $Y(a)=|\eta|(|\eta|\leqslant r)$ 的解 $Y=Y(x)$，使得 $|Y(x)|\leqslant r$。

特别是，我们由此得到：

(A)设 $F_\nu = KM^\nu$ (K 和 M 均为正的常数)．如果方程(1)的系数 $f_\nu(x)$ 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时连续并且满足不等式

$$|f_\nu(x)| \leqslant KM^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

而且如果 $M|\eta| < 1$，则上述方法至少在闭区间

$$a \leqslant x \leqslant \min\left(b,\ a + \frac{(1 - M|\eta|)^{2-\varepsilon}}{2KM}\right)$$

上给出形如级数(2)的解，其中 $\varepsilon > 0$ 可以取得任意小．

(B)设 $F_0 = F_1 = 0$，$F_\nu = KM^{\nu-2}$(当 $\nu \geqslant 2$ 时)；因而，这时 $f_0 = f_1 = 0$．如果微分方程

$$y' = \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu$$

的系数 $f_\nu(x)$ 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时连续，并满足不等式

$$|f_\nu(x)| \leqslant KM^{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, 4, \cdots),$$

而且如果 $M|\eta| < 1$，则上述方法至少在闭区间

$$a \leqslant x \leqslant \min\left\{b,\ a + \frac{M}{K}\left[\ln(M|\eta|) + \frac{1}{M|\eta|} - 1 - \varepsilon\right]\right\}$$

上给出形如级数(2)的解．

这种解法也可以用于其他类型的微分方程，如果利用下述变换：由

$$y' = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu,$$

假设 $y = zE$，其中 $E = \exp\int f_1 dx$，则得到

$$z' = \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu E^{\nu-1} z^\nu;$$

由

$$y' = g(x) y + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu y^{-\nu},$$

假设 $y=\frac{E}{z}$，其中 $E=\exp\int g\,dx$，则得到

$$z'=-\sum_{\nu=2}^{\infty}f_{\nu-2}E^{1-\nu}z^{\nu}.$$

2.5. 按参数展开的级数[1]。设在含有参数 ρ 的方程

$$y'(x)=\sum_{p+q\geqslant 1}f_{p,q}(x)\rho^{p}y^{q}\quad(p\geqslant 0, q\geqslant 0)\tag{5}$$

中，系数 $f_{p,q}(x)$ 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时连续，并设对于某些 $A>0$，$r>0$ 和 $s>0$，下列不等式成立：

$$|f_{p,q}(x)|\leqslant\frac{As}{r^{p}s^{q}},$$

于是在方程(5)右端的级数当 $0\leqslant x\leqslant a$，$|\rho|<r$，$|y|<s$ 时收敛。这时，此方程满足初始条件 $y(0)=0$ 的解 $y(x)$，可以用级数

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_{\nu}(x)\rho^{\nu}\quad(\varphi_{\nu}(0)=0,\text{对于一切 }\nu)\tag{6}$$

来表示，当

$$0\leqslant x\leqslant a \text{ 和 } |\rho|<r\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!}(a+1)^{\nu-1}e^{-\nu(a+1)}$$

时，此级数收敛。

将级数(6)代入方程(5)并且使等式两端 ρ 的同次幂的系数相等，就可以求出函数 $\varphi_{\nu}(x)$。关于任意初始条件 $y(0)=c$ 的情况，见 6.3 节。

2.6. 同偏微分方程的联系。微分方程§1 (1) 同齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0\tag{7}$$

---

1) 见 O. Perron, *Math. Ann.* **113** (1936), p. 292.

密切地联系着.

关于这种形式方程的不难证明的下述命题是基本命题之一[1]：如果函数$f(x, y)$在区域G内连续，则在G内具有连续偏导数的函数$z=\psi(x, y)$，当且仅当沿方程§1(1)的每一条积分曲线$\psi(x, y)=$常数(一般说来，这个常数与积分曲线φ有关)时，是方程(7)的解. 在几何上，这意味着，曲面$z=\psi(x, y)$的等高线在xy平面上的投影，乃是方程§1(1)的积分曲线.

相反地，设已知偏微分方程(7)的某一个解$z=\psi(x, y)$，这个解在区域G内具有连续的一阶偏导数，并且$|\psi_x'|+|\psi_y'|>0$(只是在区域G内的某些孤立点可以例外)；这时就可得知方程§1(1)的解：所有这样的连续可微的解$y=\varphi(x)$，由等式$\psi(x, y)=C$当常数C取一切可能值时所确定. 因此，函数$\psi(x, y)$是1.1节意义下的通积分. 注意，即使函数$f(x, y)$具有各阶导数，$\psi(x, y)=C$也不总是相应的方程§1(1)在整个区域G内的通解. 然而，如果$f(x, y)$在G内具有连续偏导数f_y，则对于每一个子区域G_1(此子区域G_1在平面的有限部分上同区域G没有公共边界点，而且函数$f(x, y)$在G_1中有界)，存在着方程(7)满足条件$\psi_y>0$的连续可微的解$\psi(x, y)$，而且此解是方程§1(1)的通积分.

2.7. 估值定理.

(a)设函数$f(x, y)$和$g(x, y)$在xy平面的区域G内连续，并且设f在这个区域内满足带有常数M的李普希茨条件；其次，设在整个区域G内

$$|f(x, y)-g(x, y)|\leqslant\delta,$$

而$y=\psi(x)$是方程

1) [详细情况，例如见下列著作：Петровский; Степанов; Еругин.——俄译本编者注.]

$$y'=g(x, y)$$

通过点(ξ,η)的积分曲线。这时，对于方程§1(1)通过点(ξ,η)的积分曲线$y=\varphi(x)$，由(b)可以得出如下的估值：

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{\delta}{M}(e^{M|x-\xi|}-1).$$

由此通过以适当方式选择的比较容易求解的近似方程来代替复杂方程，使得求复杂微分方程的近似解成为可能。这种情形在建立符合某种物理问题或技术问题的微分方程时，可以说已经得到了非常重要的应用，可是，在进行纯数学的处理时，这个方法却常常被忽略了。

(b)设函数$f(x, y)$在区域G内有界，并且满足李普希茨条件：

$$|f(x, y)|\leqslant A, |f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant M|y_2-y_1|.$$

其次，设$y=\varphi(x)$和$y=\psi(x)$，$a<x<b$，是两条处于区域G内分别通过点(ξ,η)和点$(\bar{\xi},\bar{\eta})$的连续可微的曲线，并且在这样的意义下：

$$|\varphi'(x)-f(x,\varphi(x))|\leqslant\varepsilon_1, |\psi'(x)-f(x,\psi(x))|\leqslant\varepsilon_2,$$

"大致满足"微分方程§1(1)。这时，在整个区间$a<x<b$上

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{M}(e^{M|x-\xi|}-1)+$$

$$+[|\eta-\bar{\eta}|+(A+\varepsilon_1+\varepsilon_2)|\xi-\bar{\xi}|]e^{M|x-\xi|}.$$

(c)设函数$f(x, y)$和$g(x, y)$在区域$G(x, y)$内连续，并且设

$$f(x, y)<g(x, y). \tag{8}$$

如果$\varphi(x)$和$\psi(x)$是微分方程

$$\varphi'=f(x,\varphi) \quad 和 \quad \psi'=g(x,\psi)$$

满足条件$\varphi(\xi)\leqslant\psi(\xi)$的两个解，则有

$$\varphi(x) \gtrless \psi(x) \quad \text{当 } \xi \gtrless x \text{ 时。} \tag{9}$$

如果函数f, g中即使有一个满足1.2节的唯一性定理的条件，则在(8)中，符号$<$可以由符号$\leqslant$来代替；这时，在公式(9)中也应当增加一个等号。

(d) 设函数$f(x, y)$在区域G内连续，而(ξ, η)是G内的某一点。其次，设$\psi_\nu(x)$ $(\nu=1,2)$是在区间$\xi \leqslant x < a$的每一点上具有右导数$D_+\psi_\nu$和左导数$D_-\psi_\nu$的连续函数。设界于曲线$y=\psi_1$和$y=\psi_2$之间的区域属于G。如果这时

$$\psi_1(\xi) \leqslant \eta \leqslant \psi_2(\xi)$$

并且如果对于$\xi \leqslant x < a$

$$D_\pm\psi_1(x) \leqslant f(x, \psi_1(x)), \quad D_\pm\psi_2(x) \geqslant f(x, \psi_2(x)),$$

则方程§1(1)通过点(ξ, η)的积分曲线$y=\varphi(x)$在整个区间$\xi \leqslant x < a$内存在，而且在这个区间上

$$\psi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi_2(x);$$

ψ_1和ψ_2分别称为下函数和上函数。

如果$\psi_1(\xi)=\psi_2(\xi)=\eta$，则所有$\psi_1$的上界和所有$\psi_2$的下界，都是方程§1(1)具有初始值$\eta$（当$x=\xi$时）的解。

(e) 如果函数$y(x)$当$a \leqslant x < b$时连续和右可微，并且如果对于常数$M>0, N \geqslant 0$，下列不等式成立：

$$|y'_+(x)| \leqslant M|y(x)| + N$$

[其中$y'_+(x)$表示函数y在点x的右导数——俄译本编者注]，则对于属于上述区间的任何两个数x, ξ，不等式

$$|y(x)| \leqslant |y(\xi)|e^{M|x-\xi|} + \frac{N}{M}(e^{M|x-\xi|}-1)$$

成立。

在更一般的情况下，下述结论是正确的。如果函数$y(x)$当$a \leqslant x < b$时连续和右可微，并且如果对于在这个区间上的两个连续函数$f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0$，下列不等式成立：

$$|y'_+(x)| \leqslant f(x)|y(x)| + g(x),$$

那么对于属于上述区间的任何两个数 x 和 ξ，则有

$$|y(x)| \leqslant F(x)\left(|y(\xi)| + \left|\int_\xi^x \frac{g(x)}{F(x)} dx\right|\right),$$

其中

$$F(x) = \exp\left|\int_\xi^x f(x)\,dx\right|.$$

2.8. 对于大的 x 值解的性状[1]**.**

(a) $$y' = g(x)y + f(x, y).$$

在这种情况下，函数 y, g, f 也可以是复值函数. 设 f 和 g 在区域

$$x \geqslant a, |y| \leqslant b \tag{B}$$

内连续；其次，设

$$g_1(x) = \Re g(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x, 0)}{g_1(x)} = 0$$

以及

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \theta g_1(x)|y_2 - y_1|, \ 0 < \theta < 1.$$

这时，微分方程有一个且仅有一个解，这个解对于所有足够大的 x 值存在并属于区域 (B)，而当 $x\to\infty$时趋于零.

如果积分

$$\int_a^\infty g_1(x)\,dx \tag{10}$$

发散，则对于所有足够大的 x 值不存在属于区域 (B) 的任何其他的解. 如果积分(10)收敛，则对于所有足够大的 x 值存在这样一条通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线 $y = y(x)$，当适当选

---

1) 关于线性方程的情况，见 4.4 节. [进一步的详细情况，可在下列著作中找到: Sansone; Bellman; Cesari.——俄译本编者注.]

取常数 c 时，对于足够小的 $|y_0|$ 和足够大的 x_0，下列关系式成立：

$$\lim_{x\to\infty}\left[y(x)-c\exp\int_a^x g(t)\,dt\right]=0. \tag{11}$$

(b) $$y'=-g(x)y+f(x,y),$$

其中 g 和 f 满足在(a)的前一部分中所指出的那些条件．对于所有足够大的 x_0 和足够小的 $|y_0|$，存在通过点 (x_0,y_0) 的、对于所有 $x\geqslant x_0$ 有定义并且处于区域 (B) 内的积分曲线．如果积分(10)发散，则当 $x\to\infty$ 时，解仍然趋向于零．如果积分(10)收敛，则对于这些解，关系式(11)仍然成立，而只不过需要由函数 $-g$ 来代替 g．

(c) 对于方程

$$y'=F(x,y),$$

在相应的条件之下，仍然有同样的结果．例如，如果函数 F 在区域 (B) 内连续，对于 y 二次可微，并且

$\Re F_y>0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x,0)}{\Re F_y(x,0)}=0,\ \dfrac{F_{yy}(x,y)}{\Re F_y(x,0)}$ 在区域 (B) 内有界，

则确实存在一个对于所有足够大的 x 值有定义并且当 $x\to\infty$ 时趋于零的解．

§3．未解出导数的微分方程：$F(y',y,x)=0$

3.1．关于解和解法． 对于未解出导数的方程

$$F(y',y,x)=0. \tag{1}$$

即使当函数 F 的形式非常简单时，同形如 §1(1)的方程相比，情况也可能大不一样．例如，方程

$$y'^2-2y'+y^2+1=0，\text{即}\ (y'-1)^2+y^2=0,$$

一般说来，没有任何一个（实的）解．对于方程 $y'^2=1$，形如 $y=\pm x+C$ 的相互垂直的直线显然都是解，因此通过每一点有两条积分曲线。

所以，这里不存在象已解出导数的方程那样的一般解法．当然，这里也可以定义满足方程 $F(t, y, x)=0$ 的线素 $x, y, t=\operatorname{tg}\alpha$，采用与 1.1 节和 2.1 节中同样的方法，借助于线素来建立相应于这个微分方程的方向场，而根据方向场用图形法求出近似解。

这时，拐线可能仍然是有用的（见 2.1 节），这里拐线是由下列两个方程一起确定的：

$$F=0, \quad F_y y'+F_x=0,$$

其中 y' 应当被看作为参数。

如果函数 $F(t, y, x)$ 能够展开为幂级数，那么，同 2.3 节一样，可以寻找幂级数形式的解 $y(x)$，将这个级数代入方程，通过比较 x 的相应的幂，求出级数的系数；当然，这时必须考察对于 $y(x)$ 所得到的级数的收敛性。

有时也可将方程写成下列形式：

$$G(y', y, x)\cdot H(y', y, x)=0$$

（可分解的方程）；显然，这时两个方程

$$G(y', y, x)=0, \quad H(y', y, x)=0$$

的每一个的解，也满足原方程(1)．但是，这时必须考察，是否由这两个方程的积分曲线的个别部分还会构成新的解．

在一般情况下，微分方程(1)可以转化为已解出导数的方程：$y'=f(x, y)$，并且 $t=f(x, y)$ 表示方程 $F(t, y, x)=0$ 的解．根据众所周知的稳函数定理，这种转化在某一点 (ξ, η, τ) 的邻域内是可能的，如果 $F(\tau, \eta, \xi)=0$ 和 $F_t(\tau, \eta, \xi)\neq 0$．但是，采用这种方法时，方程的某些解可能会丢掉．

其次，存在着所谓借助于微分的积分法（见 4.14 节），而

对于某些特殊类型的方程还存在其他方法(见§4)[1].

3.2. 正则线素和奇异线素. 满足方程 $F(t, y, x)=0$ 的线素 x, y, t，如果 $F_t(t, y, x)\neq 0$，则称为正则线素，而如果 $F_t(t, y, x)=0$，则称为奇异线素[2]. 这样的一些点 (x, y)——具有奇异线素的支集 (carrier)，构成所谓判别曲线. 积分曲线，如果整个是由正则线素组成的，则称为正则积分曲线，相应地如果整个是由奇异线素组成的，则称为奇异积分曲线.

例1. $xy'=y$. 奇异线素是：$x=0, y=0, t$ 任意. 判别曲线由唯一的点 $(0,0)$ 组成. 这个方程的解是直线 $y=Cx$. 判别曲线收缩到一点 $(0,0)$，而所有的积分曲线都通过此点 $(0,0)$.

例2. $y'^2=4x^2$. 奇异线素：$x=0, y$ 任意，$t=0$. 判别曲线是纵坐标轴. 方程的解是抛物线 $y=x^2+C, y=-x^2+C$，以及可以由这两族抛物线的一些部分组成的可微曲线. 在判别曲线的每一点上，确实有两条这样的抛物线通过(图5). 判别曲线本身不是积分曲线. 任何一条积分曲线，只要它延拓到足够远，就不会是正则的.

例3. $y'^2=4|y|$. 判别曲线是横坐标轴. 奇异线素：x 任意，$y=0, t=0$. 判别曲线是解，同时是奇解. 它与积分曲线 $y=\pm(x+C)^2$ 相切(图6). 如果取这些抛物线之一的一支到它与 x 轴的切点为止，接着取 x 轴的任意一段，以后再转到某一条新的抛物线，这样也能得到一些积分曲线.

例4. $y'^2=4|y|^3$. 这里，奇导线素和判别曲线同前一例中一样.

---

1) 关于更一般的存在定理，见 B. Manià, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **69**(1936), p. 461—476; M. Müller, *Jahrbuch FdM* **62**$_{II}$, p. 1258.

2) 可以对所述定义提出异议，按照这个定义，在 $F\equiv(t-x)^2=0$ 这个例子中，满足微分方程的每一个线素都是奇异的，同时，这个微分方程确实等价于非常简单的已解出导数的方程：$y'=x$. 区分正则线素和奇异线素之所以必要，是由于：根据隐函数定理，在正则线素的邻域内，方程(1)可以解出 y'. 但是，隐函数定理给出的只是可解性的充分条件，而绝不是必要条件；在奇异线素的邻域内，方程也可能解出 y'. 因此，所述定义存在着种种变形.

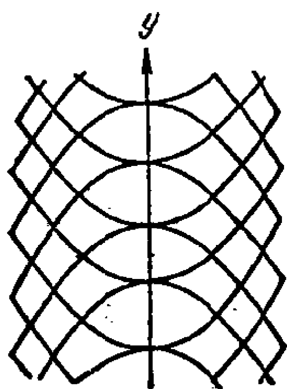


图 5

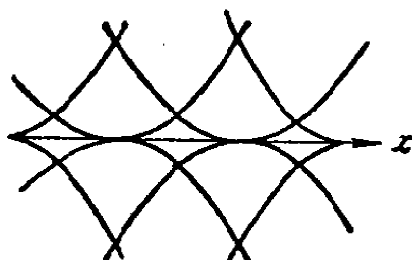


图 6

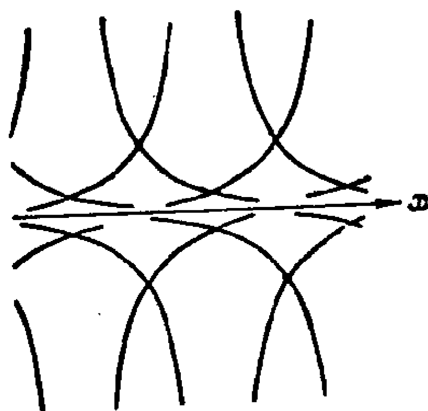


图 7

判别曲线是奇解。其余的解具有下列形式：

$$y=\frac{1}{(x+C)^2} \text{ 和 } y=-\frac{1}{(x+C)^2};$$

所有这些解都是正则的，并且对于其中每一个来说，判别曲线都是它的渐近线(图 7)。

进一步的例子见 4.18 节。

§ 4. 特殊类型的一阶微分方程的解[1)]

4.1. 可分离变量的微分方程.

(a)$y'=f(x)$. 这是最简单类型的微分方程. 对于连续函数 $f(x)$，此方程通过点 (ξ,η) 的积分曲线具有方程

$$y=\eta+\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx.$$

(b)$y'=f(x)g(y)$，其中包括 $f(x)\equiv 1$ 的情况.

如果函数 $f(x)$, $g(y)$ 连续，并且 $g(\eta)\neq 0$，那么，只要由方程

1) [可通过积分求解的各种特殊类型的微分方程的详细讨论，包含在下列书中，例如:

Степанов; Матвеев; Еругин; Ince; Angot; Эльсгольц.

在这些书中可以找到证明和进一步的详细论述。——俄译本编者注。]

$$\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$$

解出 y 来，则可得到通过点 (ξ,η) 的积分曲线。

如果 $g(\eta)=0$，则直线 $y=\eta$ 是解。将上述两种类型的积分曲线组合起来，可以得到其他的解。

4.2. $y'=f(ax+by+c)$. 如果 $b=0$，则得到情况 4.1 (a)。如果 $b\neq0$，那么这个方程借助于变换 $u(x)=ax+by+c$ 可化为类型 4.1 (b)。如果函数 $f(y)$ 连续，并且 $a+bf(u)\neq0$，那么，只要由方程

$$\int_{a\xi+b\eta+c}^{ax+by+c}\frac{du}{a+bf(u)}=x-\xi$$

解出 y 来，则可得到通过点 (ξ,η) 的积分曲线。

4.3. 线性微分方程. 一阶线性微分方程的一般形式是：$y'+f(x)y=g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $a<x<b$ 时连续，那么通过点 (ξ,η) 的积分曲线由下列方程确定：

$$y=e^{-F}\left(\eta+\int_{\xi}^{x}g(x)e^{F}dx\right),\quad 其中\ F(x)=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx.$$

如果 $g(x)\neq0$，则这条曲线同 x 轴的公共点不多于一个，因为在这种情况下，括号中的表达式是单调函数。

如果 $\varphi_0(x)$ 是任何确定的特解，而 $\varphi(x)$ 包括对应齐次方程（即 $g\equiv0$ 时的方程）的所有的解，则公式 $y=\varphi_0(x)+\varphi(x)$ 给出所有的解。对于线性方程的任何三个不同的解 φ_ν，表达式 $\dfrac{\varphi_3-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}$ 是常数。

建立这种方程的方向场的过程可以简化，因为同处于垂直线 $x=x_0$ 上的各点相应的方向全都指向同一点 $P(x_0)$，即具有坐标

$$\xi = x_0 + \frac{1}{f(x_0)}, \quad \eta = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$$

的点．点 $P(x_0)$ 构成**准线**[1]．例如，如果已给方程

$$y' + \frac{2x}{x^2+1} y = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

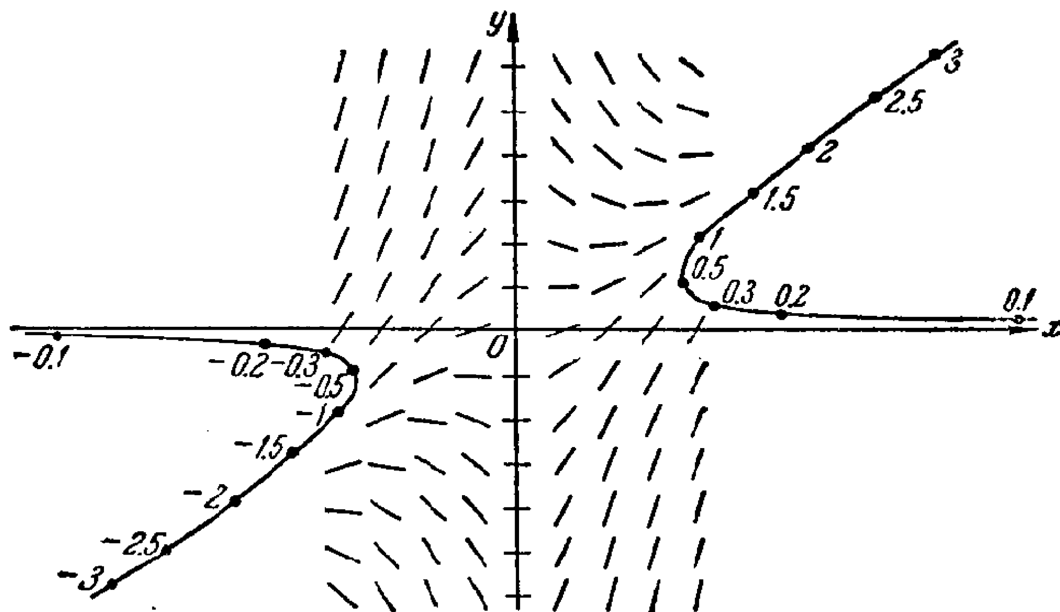


图 8

则准线由参数方程

$$\xi = \frac{3x_0^2+1}{2x_0}, \quad \eta = x_0$$

确定，也就是图 8 上所表示的双曲线 $2\xi\eta - 3\eta^2 = 1$．双曲线上的数字则是数值 x_0．

4.4．线性微分方程解的渐近性质． 也可参阅 2.8 节．

(A) $y' + ay = g(x)$，并且当 $x \to \infty$ 时 $g(x) \to b$．

根据 4.3 节

---

1) ［作者用的术语是 *Leitkurve*.——俄译本译者注．］见 E. Czuber, *Zeitschrift. f. Math.Phys*. **44**(1899), p. 41-49．

$$y=e^{-ax}\left(C+\int g(x)e^{ax}dx\right);$$

应用洛比达法则，我们得到：在 $\Re a>0$ 的情况下，当 $x\to\infty$ 时，每一个解都趋向于$\frac{b}{a}$；在 $\Re a<0$ 的情况下，则只有解

$$y=-e^{-ax}\int_x^\infty e^{ax}g(x)dx$$

趋向于$\frac{b}{a}$.

(B) $xy'+(ax+b)y=x^\alpha P\left(\frac{1}{x}\right)$，其中 $P(x)$ 是多项式，$P(0)\neq0$，α 是整数，$a\neq0$ 和 $\alpha+b\leqslant1$.

(a) $a<0$. 为了使在解中出现的积分收敛，应当限定区域为 $x>0$. 解

$$y=x^{-b}e^{-ax}\left(C-\int_x^\infty e^{ax}Q(x)dx\right)，其中 Q(x)=x^{\alpha+b-1}P\left(\frac{1}{x}\right),$$

具有这种性质，即

$$yx^be^{ax}\to C \quad 当\ x\to\infty 时.$$

按分部积分法给出：对于任何 $m\geqslant0$

$$yx^be^{ax}-C=e^{ax}\sum_{k=0}^m(-1)^k\frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^m}{a^{m+1}}\int_x^\infty e^{ax}Q^{(m+1)}(x)dx;$$

当 m 取某个固定值时对相应的积分估值，由此可得

$$\left|y-Cx^{-b}e^{-ax}-\sum_{k=0}^m(-1)^k\frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}}x^{-b}\right|<Ax^{\alpha-m-2}.$$

因为数值 A 可以借助于前面的方程的解而准确化，所

以，这个公式当 x 取大值时，甚至当级数 $\sum_k \frac{Q^k(x)}{a^{k-1}}$ 发散时，也可以用来对 y 作近似计算。

(b) $a>0$。现在设 $x<0$。这时，相应地得到

$$y|x|^b e^{ax} - C = e^{ax}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}} +$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{a^{m+1}}\int_{-\infty}^{x} e^{ax}Q^{(m+1)}(x)\,dx,$$

其中

$$Q(x) = x^{\alpha-1}|x|^b P\left(\frac{1}{x}\right).$$

由此得到，对于固定的 m

$$\left| y - C|x|^{-b}e^{-ax} - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}}|x|^{-b}\right| < A|x|^{\alpha-m-2}.$$

例. $xy'+xy=1$. 精确解具有下列形式：

$$y = e^{-x}\left(C + \int \frac{e^x}{x}dx\right).$$

根据 (b)，当 $x<0$ 取大 值时，对于相应于 $C=0$ 情况的解，可以得到：

$$\left| y - \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{x^{k+1}} \right| < \frac{(m+1)!}{|x|^{m+2}}.$$

所以，可以写成

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

甚至当这个级数不收敛时也可以。此时，这个级数称为*渐近展开式*[1]。

1）关于渐近展开式，详细情况见下列著作：Еругин; Tricomi; Bellman; Sansone. ——俄译本编者注。]

(C) $x^2y'-(bx+a)y=x^{-\alpha}P(x)$. 这里,$P, a, b, \alpha$ 和在(B)中具有同样的含意,并且满足同样的条件.

经过变换 $y(x)=\eta(\xi), \xi=\frac{1}{x}$,可以把这个方程化为具有变量 ξ, η(代替了 x, y)的方程 (B). 在对于这种情况所得到的渐近展开式中做相反的变换,便得到对于已给情况当 $|x|$ 取小值时适用的渐近展开式.

例. $x^2y'+y=x$. 根据(B) (a),当 $x>0$ 取小值时得到

$$y\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!x^{k+1}.$$

(D) 关于方程 $x^k y'+f(x)y=g(x)$ 当 $x\to 0$ 时的解,见 J. Horn, *Journal f. Math*. 120 (1899), p.1—26; 122 (1900), p 73—83; 143 (1913), p. 212—240.

4.5. 伯努利方程 $y'+f(x)y+g(x)y^{\alpha}=0$. 设 $u(x)=y^{1-\alpha}$, 便得到 4.3 类型的方程

$$u'+(1-\alpha)f(x)u+(1-\alpha)g(x)=0.$$

4.6. 齐次微分方程与可化为齐次的微分方程.

(a) $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$. 经过变换 $y=xu(x)$, 便得到可分离变量的微分方程

$$xu'=f(u)-u.$$

如果 $f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\neq\frac{\eta}{\xi}$,那么,由方程

$$\int_{\eta/\xi}^{y/x}\frac{du}{f(u)-u}=\ln\frac{x}{\xi}$$

解出 y, 则可得到通过点(ξ, η)的积分曲线.

如果 $f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\frac{\eta}{\xi}$,则 $y=\frac{\eta}{\xi}x$ 是解. 还可能存在这样的解,它们是上述两种类型的组合.

方程

$$P(x, y)y' = Q(x, y),$$

这里 P, Q 是同次幂的齐次多项式，除以方程中 x 的最高次幂，而且除以多项式 $P\left(1, \frac{y}{x}\right)$，便可化为形式(a)。

(b) $\boldsymbol{F\left(y', \frac{y}{x}\right)=0}$. 在许多场合，这个方程可以化为形式(a)。当导数 y' 连续而且不为零时，这个方程的所有的解可以这样来求得：找到所有这样的连续函数 $\varphi(u)$ 和连续可微函数 $\psi(u)$，使得对于一切 u，$F(\varphi(u), \psi(u)) \equiv 0$，并且 $\psi' \neq 0$，$\varphi \neq \psi$. 这时公式

$$x = \exp\int \frac{\psi'}{\varphi-\psi} du,\ y = x\psi(u)$$

给出了参数形式的解。

(c) $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$. 如果 $\Delta = a\beta - b\alpha \neq 0$，那么经过变换

$$au + bv = ax + by + c, \alpha u + \beta v = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

即

$$x = u + \frac{b\gamma - c\beta}{\Delta},\ y = v(u) + \frac{c\alpha - a\gamma}{\Delta},$$

可将此方程化为形式(a)：

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right);$$

如果 $\Delta = 0$，$b \neq 0$，那么经过变换 $v(x) = ax + by + c$，可将此方程化为 4.1 节的形式：

$$\frac{dv}{dx} = a + bf\left(\frac{bv}{\beta v + b\gamma - c\beta}\right);$$

如果 $\Delta = 0, \beta \neq 0$，则经过变换 $v(x) = \alpha x + \beta y + \gamma$，也可将此方程化为 4.1 节的形式：

$$\frac{dv}{dx}=\alpha+\beta f\left(\frac{bv+c\beta-b\gamma}{\beta v}\right).$$

(d) $y'=\frac{y}{x}+g(x)f\left(\frac{y}{x}\right)$. 经过变换 $y=xu(x)$, 可将此方程化为4.1节形式的方程：

$$xu'=g(x)f(u).$$

(e) $\left[f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{\alpha}h\left(\frac{y}{x}\right)\right]y'=g\left(\frac{y}{x}\right)+yx^{\alpha-1}h\left(\frac{y}{x}\right)$. 如果作变换 $y=xu(x)$，然后把 u 取作为自变量，则得到伯努利方程

$$[g(u)-uf(u)]\frac{dx}{du}=xf(u)+x^{\alpha+1}h(u).$$

(f) 达布方程[1]：

$$[P(x,y)+xR(x,y)]y'=Q(x,y)+yR(x,y),$$

其中 P, Q, R 均为齐次多项式，并且 P 和 Q 为同次的，如果用 P 中的 x 的最高次幂来除这个方程，则可化为上述类型的方程.

4.7. 广义齐次方程. 微分方程

$$P(y',y,x)=0$$

称为**广义齐次方程**：如果 $P(u,v,w)$ 是多项式，或者在更一般的情况下，是形如 $au^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}$ 的一些项的和，并且当适当选取数 r 和 $k(|r|+|k|>0)$ 时，表达式 $P(x^{k-r},x^k,x^r)$ 中的各项具有相同的次数[2].

(a) $r\neq0$. 这时总可以认为 $r=1$. 经过变换 $y(x)=|x|^k\eta(\xi)$, $\xi=\ln|x|$，则可化为不显含 ξ 的方程.

---

1) 详见 Ince, p. 29—31.

2) 4.7节中论及的方法也可以用于其他情况. 例如，本节的方法(a)可以应用于方程 $x^2y'=e^{xy}$：经过变换 $y(x)=\frac{1}{x}\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 可化为方程 $\eta'-\eta=e^{\eta}$.

(b) $r=0$。经变换

$$u(x)=\frac{y'}{y}$$

原方程化为关于 u 的代数方程。解出这个代数方程以后，再解可分离变量的方程 $y'=uy$ 即可。

4.8. 特殊的黎卡提方程[1)]： $y'+ay^2=bx^\alpha$。

也可参阅 4.9。

假设 $u(x)=ay, c=ab, q=\frac{1}{2}\alpha+1$，可将此方程化为下列形式：

$$u'+u^2=cx^{2q-2}.$$

关于这个方程的其他形式，见第三部分 1.30，1.99，1.107.

对于 $\alpha=0$ 的情况，见第三部分 1.23，对于 $\alpha=-2$ 的情况，见第三部分 1.143. 当 $\alpha_n=-\frac{4n}{2n-1}$（$n$ 为整数）时，经过变换

$$\frac{1}{\eta(\xi)}=x^2y(x)-\frac{x}{a},\ \xi=x^{\alpha_n+3},$$

方程可化为下列形式：

$$\eta'+\frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2=\frac{a}{\alpha_n+3}\xi^{\alpha_{n-1}},$$

而经过变换

$$\frac{1}{y(x)}=\xi^2\eta(\xi)+\frac{\alpha_n+1}{b}\xi,\ \xi=x^{-(\alpha_n+1)},$$

则可化为下列形式：

1) [详见 Еругин; Степанов; Матвеев; Watson; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950, p. 60以及以后.——俄译本编者注.]

$$\eta' - \frac{b}{\alpha_n + 1}\eta^2 = -\frac{a}{\alpha_n + 1}\xi^{\alpha_{n+1}}$$

(J. 伯努利)。根据 n 为正或为负，而重复运用上述变换中的第一种或第二种，可以将具有上述数值 α 的方程化为 $\alpha=0$ 的情况。在其他所有情况下，不能用积分法来解这个方程，并且解也不能通过初等函数表示为有限形式(J. 刘维尔)。

原方程（同 4.9 节相比较）也可以化为二阶线性方程 $y''=abx^\alpha y$(见第三部分 2.14)。根据第三部分 2.162(10)，此方程的解可以通过贝塞耳函数来表示。

4.9. 一般的黎卡提方程[1]：$y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$.

经过变换

$$y=E(x)u(x),\quad E(x)=\exp\int g\,dx,$$

此方程化为下列形式：

$$u'=fEu^2+\frac{h}{E},$$

即线性项等于零。如果 $f\neq 0$，且 f, g 连续可微，那么经过变换 $u(x)=y+\frac{g}{2f}$ 则可导致类似的结果，即

$$u'=fu^2+\left(\frac{g}{2f}\right)'-\frac{g^2}{4f}+h.$$

假设

$$y=E(x)\eta(\xi),\quad \xi=-\int f(x)E(x)\,dx,$$

---

1) 详见 4.8 节中所指出的文献，用积分法可以求积的各种情况在下述文章中曾讨论过：M. Kourensky, *Atti Accad. Lincei* (6), **9**(1929), p. 450; R. Lagrange, *Bulletin Soc. Math. France* **66**(1938), p. 155; Chiellini, *Rendiconti Cagliari* **9**(1939), p. 142; L. Tchacaloff, *Giornale Mat.* **63** (1925), p. 139.

得到方程

$$fE^2(\eta'+\eta^2)+h=0,$$

并且f，h和E中的x需要通过ξ来表示。

当$h=0$时，黎卡提方程化为伯努利方程，而经过变换$u(x)=\frac{1}{y}$，则可化为线性方程

$$u'+gu+f=0.$$

一般的黎卡提方程同二阶线性微分方程密切地联系着。如果当$a<x<b$时，函数f和g连续，而f可微，那么黎卡提方程定义在区间$\alpha<x<\beta(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$内的每一个解，经过变换

$$u(x)=\exp\left(-\int fy\,dx\right),$$

可化为下列线性微分方程的非零解：

$$fu''-(f'+fg)u'+f^2hu=0$$

(对于4.8节的特殊的黎卡提方程，此方程简化为方程$u''=abx^{\alpha}u$)。相反地，如果$f\neq0$，那么这个线性方程的每一个非零解u，经过变换

$$y(x)=-\frac{u'}{uf(x)},$$

则化为黎卡提方程的解。这种变换之所以重要，是由于线性方程往往比原黎卡提方程容易求解。

如果已知一个特解$\varphi(x)$，$a<x<b$，那么求通解的问题则归结为解一阶线性方程。函数$y(x)$，$a\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant b$，是黎卡提方程不同于$\varphi(x)$的解，当且仅当

$$\Phi(x)=\frac{1}{y(x)-\varphi(x)},\alpha<x<\beta$$

是方程

$$z'+(2f\varphi+g)z+f=0$$

处处都不等于零的解。

对于黎卡提方程的任何四个解 φ_ν，二重比

$$\frac{\varphi_3-\varphi_1}{\varphi_4-\varphi_1}:\frac{\varphi_3-\varphi_2}{\varphi_4-\varphi_2}$$

为常数．如果已知三个解，那么令上述二重比等于任意常数，则可以得到其他所有的解．如果四个函数 $\varphi_\nu(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内具有连续导数，并且 $\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3\neq0$，则一切函数

$$y=\frac{\varphi_1+C\varphi_2}{\varphi_3+C\varphi_4}$$

的集合满足某一个黎卡提方程．

由于黎卡提方程和各种重要类型的二阶线性方程之间有着密切联系，所以总是应当尽力寻找能够容易求得黎卡提方程的一个或者甚至所有的解的情况．这是可能的，例如在下列情况中：

(a) $f+g+h\equiv0$；

$$y=\frac{C+\int(f+h)E\,dx-E}{C+\int(f+h)E\,dx+E},$$

其中 $E=\exp\int(f-h)\,dx$．

M Kourensky, *Proceedings London Math Soc* (2), 24 (1926), p. 202–210.

(b) 更一般的情况：存在着这样的常数 a，b，并且 $|a|+|b|>0$，使得

$$a^2f+abg+b^2h\equiv0.$$

如果 $b=0$，即 $f\equiv0$，方程则化为线性的，而当 $b\neq0$ 时，经过变换 $y=\frac{a}{b}+u(x)$，方程则化为伯努利方程

$$u'=fu^2+\left(\frac{2a}{b}f+g\right)u,$$

因而，在这两种情况下方程不难求解。

(c) 如果 $h=C_0^2 f\exp 2\int g dx$ 和 $fh>0$，则

$$y=\sqrt{\frac{h}{f}}\operatorname{tg}\left(\int\sqrt{fh}\,dx+C\right)$$

是解. 如果 $fh<0$，则

$$y=-\sqrt{-\frac{h}{f}}\operatorname{th}\left(\int\sqrt{-fh}\,dx+C\right)$$

是解.

(d) 如果以适当的方式选取 函 数 $\Phi(x)$ 并 且 当 $\Psi(x)=\frac{\Phi-g}{2f}$ 时，有

$$h=f\Psi^2-\Phi\Psi+\Psi',$$

则 $y=\Psi$ 显然是解. 这个条件能够满足，例如，如果 f, g 和 h 以下列关系式之一相联系着：

$$4h=\frac{g^2}{f}-2\left(\frac{g}{f}\right)' \qquad (\Phi=0);$$

$$2g=4\sqrt{fh}+\frac{h'}{h}-\frac{f'}{f} \qquad (\Phi=g-2\sqrt{fh});$$

$$4h=2\left(\frac{1}{f}\right)''-f\left(\frac{1}{f}\right)'^2-2\left(\frac{g}{f}\right)'+\frac{g^2}{f} \quad \left(\Phi=-\frac{f'}{f}\right).$$

D Mitrinovitch, *C R Paris* 206(1938), p.4 11—413; R Guigue, *Bulletin Sc. math.* (2), 62 (1938), p 166—171.

(e) 设 $G(x)$ 和 $H(x)$ 是多项式。如果多项式

$$\Delta=G^2-2G'-4H$$

的次数是奇数，则方程

$$y'=y^2+G(x)y+H(x).$$

不能具有多项式的解. 如果 Δ 的次数是偶数，则只有多项式

$$y=-\frac{1}{2}\left(G\pm[\sqrt{\Delta}]\right) \tag{1}$$

能够满足这个方程，其中$[\sqrt{\Delta}]$表示$\sqrt{\Delta}$按 x 降幂的展开式中的整有理部分(例如，$[\sqrt{x^4-2x^3+x-6}]=x^2-x-\frac{1}{2}$)。当且仅当 Δ=常数时，(1)的两个函数是解。

E D Rainville, *Americ Math Monthly* 43 (1936), p 473—476.

4.10. 第一类阿贝耳方程.

文献：P Appel, *Journal de Math.* (4), 5(1889), p 361—423; R Liouville, *Acta Math* 27 (1903), p 55—78; P Boutroux, *Annals of Math* (2), 22(1920—1921), p. 1—10.

形如

$$y'=\sum_{\nu=0}^{3} f_\nu(x)y^\nu$$

即

$$y'=f_3(x)y^3+f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x)$$

的方程，称为第一类阿贝耳方程.

(a) 如果f_1连续，f_2和f_3连续可微，而$f_3\neq 0$，则经过变换

$$y=w(x)\eta(\xi)-\frac{f_2}{3f_3},\quad \xi=\int f_3 w^2 dx,$$

其中

$$w(x)=\exp\int\left(f_1-\frac{f_2^2}{3f_3}\right)dx,$$

可将方程

$$y'=\sum_{\nu=0}^{3} f_\nu(x)y^\nu \tag{2}$$

化为标准形式

$$\eta'=\eta^3+J(x), \tag{3}$$

其中

$$f_3w^3I=f_0+\frac{d}{dx}\frac{f_2}{3f_3}-\frac{f_1f_2}{3f_3}+\frac{2f_2^3}{27f_3^2}.$$

(b) 如果 $u(x)$是原方程的解，则经过变换

$y=u(x)+\dfrac{E(x)}{z(x)}$,其中 $E(x)=\exp\int(3f_3u^2+2f_2u+f_1)dx$,

可将方程化为下列形式：

$$z'+\frac{\Phi_1}{z}+\Phi_2=0, \tag{4}$$

其中

$$\Phi_1(x)=f_3E^2,\quad \Phi_2(x)=(3f_3u+f_2)E.$$

关于此方程，见 4.11 节．如果 $\Phi_2=0$，即如果 $u=-\dfrac{f_2}{3f_3}$是原方程(2)的解，则方程(4)，因而连同方程(2)，是可解的．

(c) 会有这种情况发生，例如，对于方程

$$y'=f_3y^3+f_2y^2+f_1y-\left(\frac{f_2}{3f_3}\right)'+\frac{f_2}{3f_3}\left(f_1-\frac{2f_2^2}{9f_3}\right);$$

其解具有下列形式：

$$y(x)=E_1\left(C-2\int f_3E_1^2dx\right)^{-1/2}-\frac{f_2}{3f_3},$$

其中

$$E_1(x)=\exp\int\left(f_1-\frac{f_2^2}{3f_3}\right)dx.$$

P. Scalizzi, *Atti Accad. Lincei*(5),26(1917),p. 60—64.

(d) 如果 $f_0\equiv0$，即如果方程具有下列形式：

$$y'=f_3y^3+f_2y^2+f_1y,$$

并且如果 $f_2\neq0$，则经过变换

$$y(x)=u(x)\eta(\xi),\quad \xi=\int uf_2dx,\quad u=\exp\int f_1dx,$$

可将方程化为下列形式：

$$\eta'(\xi)=g(\xi)\eta^3+\eta^2, \tag{5}$$

其中

$$g(\xi)=u(x)\frac{f_3(x)}{f_2(x)}.$$

其次，经过变换

$$\xi'(t)=-\frac{1}{t\eta(\xi)} \tag{6}$$

可将(5)化为方程

$$t^2\xi''+g(\xi)=0. \tag{7}$$

如果从(7)可以求出 $\xi(t)$，则从(6)可确定函数 $\eta(\xi)$.

H Lemke. *Sitzungsberichte Berlin Math. Ges* 18(1920), p 26.

(e) 如果 $f_0\equiv 0$ 和 $f_2\equiv 0$，则方程化为伯努利方程，并且经过变换

$$y=u(x)\exp\int f_1dx$$

可以化为可分离变量的方程

$$u'=f_3u^3\exp 2\int f_1dx,$$

由此方程我们得到

$$\frac{1}{u^2}=-2\int f_3\exp\left(2\int f_1dx\right)dx+C.$$

(f) 如果 $f_0\equiv 0, f_1\equiv 0$，并且 $\left(\frac{f_3}{f_2}\right)'=af_2$ (a 为某个常数)，则经过变换 $y=\frac{f_2}{f_3}u(x)$，可将方程化为可分离变量的方程

$$u'=\frac{f_2^2}{f_3}(u^3+u^2+au).$$

A Chiellini. *Bolletino Unione Mat Italiana* 10(1931), p 301—307.

(g) 如果函数

$$\Phi(x)=f_0 f_3^2+\frac{1}{3}(f_2' f_3-f_2 f_3'-f_1 f_2 f_3)+\frac{2}{27}f_2^3$$

当适当选取常数 α 时，满足方程

$$f_3\Phi'+(f_2^2-3f_1 f_3-3f_3')\Phi=3\alpha\Phi^{5/3},$$

则阿贝耳方程的解具有下列形式：

$$y=\frac{3\Phi^{1/3}u-f_2}{3f_3},$$

其中 $u=u(x)$ 由等式

$$\int\frac{du}{u^3-\alpha u+1}+C=\int\frac{\Phi^{2/3}}{f_3}dx$$

来确定.

如果 $\Phi\equiv 0$，则 $y=-\dfrac{f_2}{3f_3}$是解. 经过变换

$$y=u(x)-\frac{f_2}{3f_3},$$

可将所讨论的方程化为伯努利方程.

$$u'=f_3u^3+\left(f_1+\frac{f_2^2}{3f_3}\right)u.$$

M Chini. *Rendiconti Istituto Lombardo*(2), 57(1924), p 506.

4.11. 第二类阿贝耳方程.

(a) $[y+g(x)]y'=f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x).$

经过变换

$$u(x)=(y+g)E,\ \text{其中}\ E=\exp\left(-\int f_2 dx\right),$$

可将此方程化为特殊形式

$$uu'=(f_1+g'-2f_2g)Eu+(f_0-f_1g+f_2g^2)E^2, \quad (8)$$

而如果 $y+g\neq 0$，利用变换

$$y+g=\frac{1}{u(x)},$$

可将此方程化为 4.10 节的方程：

$$u'+(f_2g^2-f_1g+f_0)u^3+(f_1-2f_2g+g')u^2+f_2u=0.$$

方程(8)具有下列形式：

$$yy'=f_1(x)y+f_0(x),$$

此方程经过变换

$$y=u(x)+F(x),\quad 其中\ F(x)=\int f_1dx,$$

便可化为下列形式：

$$(u+F)u'=f_0.$$

如果$f_0\neq 0$，那么，在这里可假设

$$u(x)=\eta(\xi),\quad \xi=\int f_0dx,$$

结果则得到

$$(\eta+F)\eta'=1.$$

这种类型的某些方程能够用初等积分法求解。例如，在方程(a)中如果

$$f_1=2f_2g-g',$$

则有

$$y=-g+E[2\int(f_0+gg'-f_2g^2)E^{-2}dx]^{1/2},$$

其中 $E=\exp\int f_2dx$.

方程

$$(y+g)y'=f_2y^2+f_1y+f_1g-f_2g^2$$

具有解

$$y=-g+E\int(f_1+g'-2f_2g)E^{-1}dx,$$

其中　$E=\exp\int f_2 dx$.

(b) $[g_1(x)y+g_0(x)]y'=f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x)$.

如果

$$g_0(2f_2+g_1')=g_1(f_1+g_0')\text{和 } g_1\neq 0,$$

则有

$$\frac{g_1y^2+2g_0y}{g_1I}=2\int\frac{f_0}{g_1I}dx+C,$$

其中　$I=\exp\int\frac{2f_2}{g_1}dx$.

(c) $[g_1(x)y+g_0(x)]y'=\sum_{\nu=0}^{3}f_\nu(x)y^\nu$.

假设 g_1 和 g_0 可微，并且 $g_1\neq 0$. 如果 $y(x)$ 是此方程的解，并且 $g_1y+g_0\neq 0$，那么经过变换

$$g_1y+g_0=\frac{1}{u(x)}$$

则可将此方程化为 4.10 节的形式. 如果 $f_0\equiv 0$，那么经过变换 $y=\frac{1}{u}$，则可得到形式(a)的方程:

$$(g_0u+g_1)u'+f_1u^2+f_2u+f_3=0.$$

见 E Haentzschel, *Journal f. Math.* 112(1893), p 148—155.

4.12. 全微分方程. 形如

$$h(x,y)y'+g(x,y)=0$$

的微分方程，如果存在具有连续一阶偏导数的函数 $F(x,y)$，使得 $F_x=g$, $F_y=h$，则称为全微分方程. 这时，$F(x,y)$ 是微分方程的通积分(见 1.1 节)，而方程的解是一些可微函数 $y=\varphi(x)$，对于这些函数，有 $F(x,\varphi(x))=$常数.

如果 g, h, g_y, h_x 在某一个单连通的区域 $G(x,y)$ 内有定义并且连续，则当且仅当 $g_y=h_x$ 时，微分方程是全微分方程.

通积分可以表示为下列形式：

$$F(x, y)=\int_{(\xi, \eta)}^{x, y}(g\,dx+h\,dy),$$

其中(ξ, η)是 G 内的任意一点，而积分是沿着处于 G 内并连接(ξ, η)和(x, y)的任何连续可求长的曲线来取的. 但是，通常比较方便的办法是：首先求出这样的函数 $\Phi(x, y)$，使得 $\Phi_x=g$，然后假设 $F=\Phi+\Psi(y)$，选择 Ψ，使得条件 $F_y=h$ 也被满足.

4.13. 积分因子. 函数 $M(x, y)\neq 0$，如果

$$Mg+Mhy'=0$$

是全微分方程(见 4.12 节)，则函数 $M(x, y)$称为微分方程 $g+hy'=0$ 的**积分因子**. 因为按照假设 $M\neq 0$，所以此方程和原方程具有同样的解. 如果 G，g 和 h 满足 4.12 节中所指出的条件，则具有连续一阶偏导数的函数 $M(x, y)\neq 0$，当且仅当

$$h\frac{\partial M}{\partial x}-g\frac{\partial M}{\partial y}=M\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

时，是积分因子.

如果 g 和 h 具有连续的一阶偏导数，并且 $|g|+|h|>0$，则在区域 G 的任何有界子区域 G_1(与 G 没有公共边界点)内，这个方程是可解的[1]. 因此，原则上每一个常微分方程都能用积分因子法求解. 但是，事实上寻找这样的积分因子可能是非常复杂的.

如果已知两个具有连续一阶偏导数的积分因子 M_1 和 M_2，并且如果

1) E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **41**(1936), p.66; **42**(1937), p.287 以及以后.

$$\frac{D(M_1, M_2)}{D(x, y)} = M_{1x}M_{2y} - M_{1y}M_{2x} \neq 0,$$

则原微分方程的解是这样一些函数 $y=\varphi(x)$，对于这些函数，$\frac{M_1(x, \varphi(x))}{M_2(x, \varphi(x))}=$ 常数。

微分方程常常具有下列积分因子：

如果 $xg+yh\neq0$，而 g 和 h 是同次的齐次函数，则有积分因子 $M=(xg+yh)^{-1}$；

如果 $xg-yh\neq0$，而 $g=yg_1(x\cdot y)$，$h=xh_1(x\cdot y)$，则有积分因子 $M=(xg-yh)^{-1}$；

如果 $(g_y-h_x)/h$ 仅仅依赖于 x，则有仅依赖于 x 的积分因子；

如果表达式 g_y-h_x 可以表示为 $gY(y)-hX(x)$ 的形式，则有形如 $M=m(x)\cdot n(y)$ 的积分因子；

如果 $g_x=h_y$，$g_y=-h_x$，即如果 $g+ih$ 在区域 G 内是复变量 $x+iy$ 的正则函数，则有积分因子 $M=(g^2+h^2)^{-1}$。

4.14. $F(y', y, x)=0$，"借助于微分的积分法"。 如果解 $y=\varphi(x)$ 具有不等于零的二阶导数 $\varphi''(x)$，则对于函数 $t=\varphi'(x)$，存在可微的反函数 $x=x(t)$。将给定的微分方程对 t 微分，只要 $F_x+tF_y\neq0$，我们就得到下列方程：

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{F_t}{F_x+tF_y}, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{tF_t}{F_x+tF_y}.$$

如果解这个具有两个微分方程的方程组，则得到原微分方程 $F=0$ 的参数形式的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$。还需要研究的是，用这种方法能否得到所有的解，抑或是在某些情况下会失掉一部分解。

4.15. (a) $y=G(x, y')$；(b) $x=G(y, y')$.

对于(a)，由 4.14 节所讨论的方法得知：如果 $x(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{G_t(x, t)}{t-G_x(x, t)}$$

的解，并且如果在这个方程中分子和分母都不等于零，则

$$x=x(t),\quad y=G(x(t), t)$$

是方程(a)的参数形式的解.

对于(b)，由 4.14 节所讨论的方法得知：如果 $y(t)$ 是方程

$$\frac{dy}{dt}=\frac{tG_t(y, t)}{1-tG_y(y, t)}$$

的解，并且如果 G_t 和这个方程的分母都不等于零，则

$$x=G(y(t), t),\quad y=y(t)$$

是方程(b)的参数形式的解.

4.16. (a) $G(y', x)=0$; (b) $G(y', y)=0$.

对于(a)，如果此方程可解出 y'，则方程的积分毫无困难. 如果仅限于考虑这样一些解 $y(x)$，对于这些解 $y'\neq 0$，那么把 y 看作自变量，而把 x 看作函数，则可将此方程化为情况(b).

对于(b)，在许多场合，此方程可以化为 4.1 节的类型，即 $y'=g(y)$，或者化为 4.17 节 (a) 的类型. 此外，如果求出所有这样的连续函数 $\varphi(u)\neq 0$，以及所有这样的连续可微函数 $\psi(u)$，使得 $G(\varphi(u), \psi(u))\equiv 0$ 和 $\psi'(u)\neq 0$，也可以得到所有具有连续导数 y' 的解. 这时，解可以按下列方式表示为参数形式：

$$x=\int\frac{\psi'(u)}{\varphi(u)}du,\quad y=\psi(u).$$

4.17. (a) $y=g(y')$; (b) $x=g(y')$.

对于(a)，设在某一个不包含零点的区间(t_1, t_2)内，函数 $g(t)$ 是严格单调的和连续可微的，$t_1<t_0<t_2$，ξ 任意，$\eta=$

$g(t_0)$，并且设表达式

$$\xi+\int_{t_0}^{t}\frac{g'(t)}{t}dt$$

之值的下界是 a，上界是 b.

这时，存在一条且仅存在一条通过点 (ξ,η) 而定义在区间 $a<x<b$ 上的积分曲线 $y=\varphi(x)$，并且具有下列参数表示式：

$$x=\xi+\int_{t_0}^{t}\frac{g'(t)}{t}dt,\quad y=g(t).$$

对于(b)，设 $g(t)$ 是在区间 $t_1<t<t_2$ 上的严格单调和连续可微函数，并且设 $g(t)$ 之值的下界是 a，上界是 b。这时，对于每一个 $\xi(a<\xi<b)$和任何 η，存在一条且仅存在一条通过点(ξ,η)的积分曲线 $y=\varphi(x)$，它在区间 $a<x<b$ 上存在，而由参数方程

$$x=g(t),\quad y=\eta+\int_{t_0}^{t}tg'(t)dt$$

确定，并且 $g(t_0)=\xi$。

4.18. 克莱罗方程.

(a) $\boldsymbol{y=xy'+g(y')}$。如果函数 $g(t)$ 在点 $t=a$ 处有定义，则直线

$$y=ax+g(a)$$

是解. 如果 $g'(t)$ 在区间 $t_1<t<t_2$ 内存在并且不等于零，则由参数方程

$$x=-g'(t),\quad y=-tg'(t)+g(t)$$

定义的曲线，这条曲线的切线 $y=ax+g(a)$，以及由前一条曲线的一段和其端点处的切线所组成的曲线，都是积分曲线.

(b) $\boldsymbol{F(y-xy',y')=0}$。对于 $y-xy'$ 解此方程，可将其

化为上述情况.

4.19. 拉格朗日-达兰贝尔方程. 此方程具有下列形式：

$$y=xf(y')+g(y').$$

此方程的等斜线是直线

$$y=xf(c)+g(c).$$

当 $f(t)=t$ 时，此方程化为 4.18 节中讨论过的方程.

如果 $f(t)$, $g(t)$ 是区间 $\tau_1<t<\tau_2$ 上的连续可微函数，那么，选择数 x_0, t_0，使得在点 t_0 的某个邻域内，不等式 $f(t)\neq t$ 成立，而函数

$$x=\left(\exp\int_{t_0}^{t}\frac{f'(t)}{t-f(t)}dt\right)\times$$

$$\times\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}\frac{g'(t)}{t-f(t)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{f'(t)}{f(t)-t}dt\right)dt\right\} \qquad (9)$$

具有不为零的导数，则可以得到具有连续导数并且满足下列不等式的所有的解 $y=\varphi(x)$：

$$f(\varphi'(x))\neq\varphi'(x),\quad xf'(\varphi'(x))+g'(\varphi'(x))\neq 0. \qquad (10)$$

这就是说，设 (t_1, t_2) 是包含在 (τ_1, τ_2) 内并使得上述条件成立的最大区间；这时方程 (9) 和方程 $y=xf(t)+g(t)$ 给出了定义在区间 $t_1<t<t_2$ 上的参数形式的解. 同时，还必须考察由于(10)的限制是否会丢掉某些解.

4.20. $F(x, xy'-y, y')=0$. 勒让德变换. 如果 $y=y(x)$ 是二次可微函数，并且 $y''\neq 0$，则函数 $X=y'(x)$ 具有可微的反函数 $x=h(X)$. 函数

$$Y=Y(X)=Xh(X)-y(h(X))$$

是二次可微的，而

$$X=y'(x),\quad Y(x)=xy'(x)-y(x),\quad Y'(X)=x,$$

$$x=Y'(X),\quad y(x)=XY'(X)-Y(X),\quad y'(x)=X,$$

并且$Y''\neq 0$. 这就是所谓的勒让德变换. 勒让德变换将原方程的每一个解$y(x)$ ($y''\neq 0$),转变为方程$F(Y', Y, X)=0$的解,这个方程有时比较容易积分. 如果$Y(X)$是这个方程的解,并且$Y''\neq 0$,则方程

$$x=Y'(X),\quad y=XY'(X)-Y(X)$$

以参数形式给出原方程的解.

第二章　已解出导数的任意微分方程组

§5. 基本概念

5.1. 微分方程组的表示法和几何意义. 在本章里我们将研究下列形式的微分方程组：

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (\nu = 1, \cdots, n). \tag{1}$$

满足(1)的 n 个方程的 n 个可微函数

$$y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x)$$

的集合，称为微分方程组(1)的解、积分或积分曲线. 我们把数组 $x, y_1, \cdots, y_n$ 看作为 $n+1$维空间中的点，而把数组 $x, y_1, \cdots, y_n; p_1, \cdots, p_n$，其中 $p_i = f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$，看作为这个空间中的线素，对应于给定微分方程组的全部线素，构成一个方向场，这个方向场可以看作为此方程组的直观表示.（只是当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，直观表示这个词才有充分的意义.）

方程组(1)可以写成向量形式：

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}).$$

这里 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}$ 表示向量

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n), \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n).$$

5.2. 解的存在和唯一性. 下述的皮亚诺存在定理成立：如果函数 $f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)$，$\nu = 1, \cdots, n$，在变量 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n+1$ 维空间的区域 G 内连续，则通过区域 G 的每一点 $P(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 至少有一条积分曲线，这些积分曲线中的每一条，可以从两边延拓到全部包含在 G 内而本身又

包含着点P的任何闭区域的边界.

如果通过点 P 的积分曲线不只一条，则有包含无穷多条的一整束积分曲线通过点P. 当这一束积分曲线同每一个平面$x=x_0$相交时，组成某一个连续统. 如果 Q 是积分曲线束边界上的某一点，则存在一条连接 Q 和 P 而在 Q 和 P 之间的一段上仅由积分曲线束的边界点所组成的积分曲线[1].

如果函数f_ν 具有对于 y_k 的偏导数，且这些偏导数在区域 G 内对于 $x, y_1, \cdots, y_n$ 是连续的，或者如果每一个函数 f_ν 满足李普希茨条件：

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)-f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)|\leqslant L\sum_{k=1}^{n}|\bar{y}_k-y_k|, \tag{2}$$

则通过每一点 $\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n$ 只有唯一的一条积分曲线.

[关于所论的问题，也可参阅第三部分8.26.——俄译本编者注.]

5.3. 卡拉西奥多里存在定理. 设函数 $f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)$ 定义在区域 G：

$$a<x<b;\ -\infty<y_1, \cdots, y_n<+\infty$$

上，当 $y_1, \cdots, y_n$ 取任意一些固定值时对于 x 是可测的，而当 x 取属于区间 $a<x<b$ 的某一个完全测度子集中的每一个固定值时，对于 $y_1, \cdots, y_n$ 是连续的；最后，设

$$|f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)|\leqslant M(x) \quad (\nu=1, \cdots, n),$$

其中 $M(x)$ 是区间 $a<x<b$ 上的某一个勒贝格可积函数. 那么，对于区域 G 的每一个点$(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$，存在一组连续函数 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$，在区间 $a<x<b$ 上满足方程组

---

1) H. Kneser, *Sitzungsberichte Preuß. Akad.* (1923), p. 171—174; M. Müller, *Math. Zeitschrift* **28** (1928), p. 349—355. M. Fukuhara, *Proceedings Acad. Tokyo* **6** (1930), p. 360—362; E. Kamke, *Acta Math.* **58** (1932), p. 71; E. Digel, *Math. Zeitschrift* **39** (1934), p. 157—160.

$$y_\nu(x)=\eta_\nu+\int_\xi^x f_\nu(x, y_1(x), \cdots, y_n(x))\,dx \quad (\nu=1,\cdots,n). \tag{3}$$

在使得被积表达式连续的各点上，函数 y_ν 满足方程组(1).

如果函数 $y_\nu(x)$满足方程组(3)，并且如果 $\bar{y}_\nu$ 取任意值时，下列广义的李普希茨条件：

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)-f_\nu(x, y_1(x), \cdots, y_n(x))| \leqslant$$
$$\leqslant N(x)\sum_{p=1}^{n}|\bar{y}_p-y_p(x)| \quad (\nu=1,\cdots,n)$$

成立，其中 $N(x)$是某一个勒贝格可积函数，则方程组(3)具有唯一的解 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$，并且这个解连续地依赖于 ξ, $\eta_1, \cdots, \eta_n$[1].

此定理对于托马斯-费米方程的应用，见第三部分6.100.

5.4. 解对于初始条件和对于参数的依赖性. 如果函数 $f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)$在区域 G 内连续，并且如果方程组(1)是简单的，即如果通过区域 G 内的每一点 $(\xi, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 只有一条积分曲线，则我们可以用

$$y_1=\varphi_1(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n), \cdots, y_n=\varphi_n(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

来表示这条一直延伸到区域 G 边界的曲线. 函数 φ_ν，可以看作为其 $n+2$ 个自变量的函数，称为特征函数. 每一个特征函数在自己的定义域内是其 $n+2$ 个自变量的连续函数. 如果 f_ν 具有对于 y_ν 的r $(r\geqslant 1)$阶连续偏导数，则 φ_ν 对于其所有自变量也具有 r 阶连续偏导数，其限制只是：在这些偏导数的每一个当中对于 x 或者对于 ξ 的微分不多于一个（如果f_ν 对于其所有 $n+1$ 个自变量都具有 r 阶连续偏导数，则此限制可以取消）. 其次，

---

1) [详见：例如，Coddington 和 Levinson; Хартман; Sansone. ——俄译本编者注.]

$$\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\xi}\sum_{k=1}^{n} f_k(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\eta_k}=0,$$

而函数行列式

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\eta_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_n}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\eta_n} \end{vmatrix}$$

等于

$$\exp\int_{\xi}^{x}\sum_{\nu=1}^{n} f'_{\nu(y_\nu)}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n), \cdots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n))dx,$$

其中

$$f'_{\nu(y_k)}=\frac{\partial}{\partial y_k}f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n).$$

林德略夫提出的这个定理，在线性偏微分方程理论当中起着重要的作用。

如果函数f_ν还依赖某一些参数，例如

$$f_\nu=f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n, \mu_1, \cdots, \mu_k),$$

则函数 φ_ν 当然也依赖于参数 $\mu_1, \cdots, \mu_k$. 如果 f_ν 连续地依赖于参数，则 φ_ν 也连续地依赖于参数；类似地，f_ν 对于 μ 的可微性，可以引出 φ_ν 对于 μ 的可微性[1].

5.5. 稳定性问题. 在许多应用场合，时间起着自变量的作用. 在这种情况下，方程组(1)可写成下列形式：

$$x'_\nu(t)=f_\nu(t, x_1, \cdots, x_n)(\nu=1, \cdots, n), \tag{4}$$

这里，$x_\nu=x_\nu(t)$ 是确定运动点轨迹的未知函数. 如果函数

---

1) f_ν 连续但不假设方程组是简单的那种情况 E. Kamke 曾研究过，见：Acta Math. 58(1932), p.57—85.

f_ν 在区域

$$t \geqslant \tau, \ -\infty < x_1, \cdots, x_n < +\infty$$

内连续，并且方程组(4)在这个区域内是简单的（见 5.4 节），则对于方程组(4)的每一个解

$$x_1 = \varphi_1(t, \tau, \xi_1^0, \cdots, \xi_n^0), \cdots, x_n = \varphi_n(t, \tau, \xi_1^0, \cdots, \xi_n^0), \quad (5)$$

从 5.4 节可以得出下述结论。如果对于某些固定值 $\tau, \xi_1^0, \cdots, \xi_n^0$，轨迹(5)对于所有 $t \geqslant \tau$ 存在，则通过点 $(\xi_1^0, \cdots, \xi_n^0)$ 附近各点的所有轨迹，对于满足条件 $\tau \leqslant t \leqslant T$ 的一切 t 值，保持在轨迹(5)的附近。更确切地说：对于任何 $T > \tau$ 和 $\varepsilon > 0$，存在这样的 $\delta > 0$，只要

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu - \xi_\nu^0| \leqslant \delta, \quad (6)$$

则所有的解

$$x_1 = \varphi_1(t, \tau, \xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n = \varphi_n(t, \tau, \xi_1, \cdots, \xi_n) \quad (7)$$

当 $\tau \leqslant t \leqslant T$ 时存在，并且满足不等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu(t, \tau, \xi_1, \cdots, \xi_n) - \varphi_\nu(t, \tau, \xi_1^0, \cdots, \xi_n^0)| \leqslant \varepsilon. \quad (8)$$

如果对于每一个 $\varepsilon > 0$，可以找到这样的 $\delta > 0$，使得当条件 (6) 成立时，解(7) 甚至在整个半直线 $\tau \leqslant t < \infty$ 上存在并且满足不等式(8)，则解(5) 称为**按李雅普诺夫的意义是稳定的**[1)]. 如果对于某一个 $\varepsilon > 0$，不能找到这样的 δ，则解(5)称为**不稳定的**.

当研究稳定性时，显然可以假设 $\tau = \xi_1^0 = \cdots = \xi_n^0 = 0$，而不会失去一般性。其次，借助于变换

$$y_\nu = x_\nu - \varphi_\nu(t, \tau, \xi_1^0, \cdots, \xi_n^0) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

---

1) [关于其他的稳定性概念，见 В. В. Немыцкий 和 В. В. Степанов; Lefschetz; Sansone; Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, 1955, гл. IV, § 3. ——俄译本编者注。]

总是可以把问题化为这样的情况，即所要探讨其稳定性的解是由 n 个常值函数 $0,\cdots,0$ 组成的.

从关于稳定性[1] 以及相近问题的一切广泛的研究当中，我们在这里列举下列结果[2].

设在方程组

$$x'_\nu=\alpha_{\nu,1}x_1+\cdots+a_{\nu,n}x_n+\psi_\nu(t,x_1,\cdots,x_n)$$
$$(\nu=1,\cdots,n) \tag{9}$$

(其中 α_ν, x_ν, ψ_ν 也可以取复数值)中，函数 ψ 在区域

$$t\geqslant 0,\ |x_\nu|\leqslant a \quad (\nu=1,\cdots,n)$$

内有定义并且是连续的，此外，对于某个常数 K 有

$$\sum|\psi_\nu|\leqslant K\sum|x_\nu|.$$

特别是，这意味着 $\psi_\nu(t,0,\cdots,0)=0$，而因此 $x_1=0,\cdots,x_n=0$ 是方程组(9)的解. 其次，设

$$\frac{\sum|\psi_\nu|}{\sum|x_\nu|}\to 0 \quad \text{当 } \sum|x_\nu|\to 0,\ t\to\infty \text{时}.$$

最后，设特征行列式

---

1) [谈到关于按李雅普诺夫意义的稳定性问题，特别是关于自治系统稳定性问题(见 7.1 节)的文献非常丰富，例如，见：А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950; Понтрягин; Еругин; Bellman; Lefschetz; Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, 1967; Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, 1967; J. La-Salle and S. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method, 1961(俄译本：Ж. Ла-Салль и С. Лефшец, Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, 1964); И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1966 (中译本：И. Г. 马尔金，运动稳定性理论，科学出版社，1958); В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957; Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959; Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, 1956 (中译本：Н. Г. 切塔耶夫，运动的稳定性，国防工业出版社，1959); Cesari; К. А. Карачаров и А. Г. Пилютик, Введение в техническую теорию устойчивости движения, 1962. ——俄译本编者注.]

2) O. Perron, *Math. Zeitschrift* **29**(1929), p. 129—160.

$$\operatorname{Det}|a_{p,q}-se_{p,q}|$$
所有根的实部都是负的. 这时，解 $x_1=0, \cdots, x_n=0$ 是稳定的。

§6. 解　法

6.1. 折线法. 对应于方程组
$$y'(x)=f(x, y, z), z'(x)=g(x, y, z)$$
的方向场处于三维空间中，所以为了说明积分曲线的走向，方向场用处不大. 因此，为了初步判断积分曲线的走向，利用下述折线法是适宜的：为了建立 xy 平面和 xz 平面上的图形，从给定方程算出数量 $p(\xi)=y'(\xi)=f(\xi, \eta, \zeta)$ 和 $q(\xi)=z'(\xi)=g(\xi, \eta, \zeta)$；在 xy 平面上从点 (ξ, η) 出发，沿着由线素 $\xi, \eta, p(\xi)$ 确定的方向引一线段到达某一点 (ξ_1, η_1)；相应地，在 xz 平面上从点 (ξ, ζ) 出发，沿着由线素 $\xi, \zeta, q(\xi)$ 确定的方向引一线段到达点 (ξ_1, ζ_1)。这时，在点 (ξ_1, η_1, ζ_1) 可以算出方向 $p(\xi_1)=y'(\xi_1), q(\xi_1)=z'(\xi_1)$. 对这两个方向中的每一个，在相应的平面上分别描绘从点 (ξ_1, η_1) 到点 (ξ_2, η_2) 和从点 (ξ_1, ζ_1) 到点 (ξ_2, ζ_2) 的线段. 对于点 (ξ_2, η_2, ζ_2)，又可以借助于原微分方程算出两个方向，如此等等. 关于这个方法的进一步发展，见 29.1 节(a). 对于多于两个方程的方程组，也可以应用这种方法.

6.2. 皮卡尔-林德略夫逐次逼近法. 设函数 $f_\nu(x, y, \cdots, y_n)$ 在平行多面体
$$|x-\xi|<a, |y_1-\eta_1|<b, \cdots, |y_n-\eta_n|<b \qquad (1)$$
(a 和 b 可以等于 ∞)中是连续的，满足李普希茨条件 §5(2)，并且设 $|f_\nu|\leqslant A(\nu=1, \cdots, n)$. 为了寻找方程组 §5(1) 通过点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的积分曲线，假设 $\varphi_{\nu,0}(x)\equiv\eta_\nu(\nu=1, \cdots, n)$，并

且按照下述方式对于 $k=1,2,\cdots$ 依次地确定函数 $\varphi_{\nu,k}(\nu=1,\cdots,n)$：

$$\varphi_{\nu,k}(x)=\eta_\nu+\int_\xi^x f_\nu(x,\varphi_{1,k-1}(x),\cdots,\varphi_{n,k-1}(x))\,dx.$$

这时，在区间

$$|x-\xi|<\min\left(a,\frac{b}{A}\right) \tag{2}$$

上，函数 $\varphi_{\nu,k}(x)$ 当 $k\to\infty$ 时收敛于通过点 $(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 的积分曲线，并且有下列估值：

$$|\varphi_{\nu,k}(x)-\varphi_\nu(x)|\leqslant\frac{A}{nL}\sum_{p=k+1}^{\infty}\frac{(nL|x-\xi|)^p}{p!}.$$

6.3. 幂级数的应用[1]. 如果函数 f_ν 能够按变量 $x,y_1,\cdots,y_n$ 的幂展开，则类似于 2.3 节，也可以找到幂级数形式的函数 $y_\nu(x)$，并通过比较 x 的同次幂的系数，算出这些级数原先未知的系数。如果函数 $f_\nu(x)$ 的级数在区域(1)内收敛，则用这样方式得到的函数 $y_\nu(x)$ 的幂级数在区域(2)内收敛，并且在这个区域内给出方程组 §5(1)的解。数 A 在这里和在 6.2 节中具有同样的意义。

关于解按初始值和按参数展为级数方面，2.5 节中所述结果的下述推广成立[2]。如果在方程组

$$y_p'(x)=\sum_{q_0+\cdots+q_n\geqslant 1}f_{p,q_0,\cdots,q_n}(x)\rho^{q_0}y_1^{q_1}\cdots y_n^{q_n}(p=1,\cdots,n)$$

中，系数 f 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时连续，并且如果对于某些固定的正的常数 A 和 r_ν，不等式

$$|f_{p,q_0,\cdots,q_n}(x)|\leqslant\frac{(q_0+q_1+\cdots+q_n)!}{q_0!q_1!\cdots q_n!}\cdot\frac{Ar_p}{r_0^{q_0}r_1^{q_1}\cdots r_n^{q_n}}$$

1) 关于类似于 2.4 节的更一般形式的级数的应用，见 O. Perron, *Sitzungsberichte Heidelberg*, 1920，卷 9。

2) O. Perron, *Math. Annalen* 113(1936) p. 300. 也可同 §12 相比较。

成立，则具有初始值 $y_p(0)=c_p\,(p=1, \cdots, n)$ 的解 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 可以按 $\rho, c_1, \cdots, c_n$ 的幂展成级数：

$$y_p = \sum_{q_0+\cdots+q_n\geqslant 1} \varphi_{p,q_0,\cdots,q_n}(x)\rho^{q_0}c_1^{q_1}\cdots c_n^{q_n},$$

并且此级数在区域

$$\frac{|\rho|}{r_0}+\frac{|c_1|}{r_1}+\cdots+\frac{|c_n|}{r_n}<\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!}e^{-\nu(naA+1)}$$

内绝对收敛.

6.4. 同偏微分方程的联系[1]. 方程组 §5(1) 同齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}=0 \tag{3}$$

密切地联系着. 也就是说，如果 f_ν 在 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n+1$ 维空间的区域 G 内连续，则在 G 内具有连续一阶偏导数的函数 $z=\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$，在下述的情况下是方程(3)的解：即当它沿着方程组 §5(1)的每一条积分曲线取常值，也就是对于方程组 §5(1)的每一条积分曲线 $y_1=\varphi_1(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x)$ 都有 $\psi(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))=$常数. 这种情形对于求解方程组 §5(1)可能是有用的(同 6.5 节相比较).

6.5. 借助于解之间的已知关系简化方程组. 在某些情况下，不难找到这样的连续可微函数 $z=\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$，此函数沿着所讨论的方程组的每一条积分曲线具有某个常值，因而根据 6.4 节可知，此函数是偏微分方程(3)的解. 〔这种函数称为方程组的首次积分. ——俄译本译者注. 〕

如果已知首次积分，则由方程 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)=C$ 解出 y_ν 之一，并且用所得到的表达式代替原方程组中的 y_ν，就

1) 〔详细情况，例如可以见下列著作. Петровский 和 Степанов; Еругин. ——俄译本编者注. 〕

可以减少未知函数的个数．如果已知 n 个独立的这种类型的函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$，则由方程组

$$\psi_1=C_1, \cdots, \psi_n=C_n$$

解出变量 $y_1, \cdots, y_n$，便不难得到方程组§5(1)的解．

例如，从方程组

$$y_1'=y_2+x; \quad y'_2=y_1+x$$

得到$(y_1-y_2)'+(y_1-y_2)=0$，因此具有首次积分

$$x+\ln|y_1-y_2|=C.$$

其次，还有

$$y_1'+y_2'+2=y_1+y_2+2x+2,$$

因而有 $x-\ln|y_1+y_2+2x+2|=C^*$．从这两个关系式得到

$$y_1=-x-1+C_1e^{-x}+C_2e^x,$$

$$y_2=-x-1-C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

6.6．利用微分法和消元法简化方程组．有时通过对方程组中的某些方程进行微分，不难从方程组中消去一部分未知函数及其导数．当然，这时在方程组中会出现更高阶的导数．譬如，在6.5节所举的例子中，将第一个方程微分，得到 $y_1''=y_2'+1$，注意到第二个方程，由此得到方程 $y_1''-y_1=x+1$，此方程是不难求解的．

6.7．估值定理．

(a) 设函数$f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)$和$g(x, y_1, \cdots, y_n)$ $(\nu=1, \cdots, n)$在 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n+1$ 维空间的区域 G 内是连续的；其次，设 g_ν 在此区域内满足李普希茨条件§5(2)，并且设

$$|f_\nu-g_\nu|\leqslant\varepsilon \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

如果 $y_1=\varphi_1(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x)$ 和 $y_1=\psi_1(x), \cdots, y_n=\psi_n(x)$，$a<x<b$，分别是方程组§5(1)和方程组

$$y_\nu'=g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (\nu=1, \cdots, n)$$

通过同一点$(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$的积分曲线，则有

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu(x)-\psi_\nu(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{L}(e^{nL|x-\xi|}-1).$$

这里，同在一个方程的情况中一样，通过以适当方式选择的比较容易积分的方程组，就可以得到比较复杂的方程组的近似解。

(b) 设函数 $f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n+1$ 维空间的区域 G 内满足 6.2 节中提出的假定(连续性、有界性、李普希茨条件)。其次，设

$$y_1=\varphi_1(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x)$$

和 $\quad y_1=\psi_1(x), \cdots, y_n=\psi_n(x), \ a<x<b,$

是处于区域 G 内分别通过点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$和 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_n)$的两条连续可微曲线，并且是方程组 §5 (1) 在下列意义下的近似解：

$|\varphi'_\nu-f_\nu(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)| \leqslant \varepsilon_1, |\psi'_\nu-f_\nu(x, \psi_1, \cdots, \psi_n)| \leqslant \varepsilon_2.$

这时，当 $a<x<b$ 时，有

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu(x)-\psi_\nu(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{L}(e^{nL|x-\xi|}-1)+$$

$$+\left\{n(A+\varepsilon_1+\varepsilon_2)|\xi-\bar{\xi}|+\sum_{\nu=1}^{n}|\eta_\nu-\bar{\eta}_\nu|\right\}e^{nL|x-\xi|}.$$

(c)[1] 设点 $P(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 和 $\bar{P}(\xi, \bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_n)$ 处于 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n+1$ 维空间的区域 G 内，并且

$$\eta_\nu \leqslant \bar{\eta}_\nu \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

其次，设函数

$$f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n), g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (\nu=1, \cdots, n)$$

在 G 内有定义，并且当 $x \geqslant \xi$ 时下列不等式成立：

---

1) E. Kamke, *Acta Math.* **58** (1932), p.74, 82; M. Picone, *Annali di Mat.* (4), **20** (1941), p.67—103.

$$f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) < g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (\nu=1, \cdots, n); \tag{4}$$

此外，设对于每一个 ν，函数 f_ν（或者 g_ν）是每一个变量 y_μ $(\mu \neq \nu)$ 的单调增大的函数. 如果

$$y_1=\varphi_1(x), \cdots, y_n=\varphi_n(x)$$

是方程组 §5 (1) 当 $\xi \leqslant x < \xi+a$ 时有定义的并且通过点 P 的积分曲线，而

$$y_1=\psi_1(x), \cdots, y_n=\psi_n(x)$$

是方程组

$$y'_\nu = g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (\nu=1, \cdots, n) \tag{5}$$

当 $\xi \leqslant x < \xi+a$ 时有定义的并且通过点 $\bar{P}$ 的积分曲线，则当 $\xi < x < \xi+a$ 时，有：

$$\varphi_\nu(x) < \psi_\nu(x) \quad (\nu=1, \cdots, n). \tag{6}$$

如果在不等式(4)中，用符号 $\leqslant$ 代替 $<$，那么，只要在(6)中把 $<$ 号换成 $\leqslant$ 号，并且假设 f_ν 和 g_ν 是连续的，方程组(5)是简单的（在 5.4 节的意义下），则定理仍然成立。

§7. 自治系统[1]

7.1. 自治系统的定义和几何意义. 我们考虑方程组

$$\frac{dx_\nu}{dt} = f_\nu(x_1, \cdots, x_n) \quad (\nu=1, \cdots, n), \tag{1}$$

此方程组与在 §5 和 §6 中讨论过的不同：第一，表示法稍有

---

1) 〔在探讨自治系统和一般动力学系统的大量研究工作当中，首先必须指出如下一些著作：Понтрягин; Еругин; Lefschetz; Немыцкий 和 Степанов; Д. Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941；Э. Хопф, Эргодическая теория. *УМН* 4(1949)，卷 1 (29)，p. 113; Андронов, Витт 和 Хайкин; Coddington 和 Levinson. 关于自治系统按李雅普诺夫意义下的稳定性的文献，见 5.5 节. ——俄译本编者注.〕

改变（用 t, x_ν 代替 x, y_ν，正如 5.5 节那样），第二（这是主要的），在 f_ν 中不显含自变量. ［这种系统称为自治系统. ——俄译本编者注. ］

在这种情况下，特征函数（见 5.4 节）不再单独地依赖于 t 和 τ，而只是依赖于二者之差 $t-\tau$：

$$x_1=\varphi_1(t-\tau, \xi_1, \cdots, \xi_n), \cdots, x_n=\varphi_n(t-\tau, \xi_1, \cdots, \xi_n). \tag{2}$$

由此可以得到积分曲线的这样的几何解释：对于固定的 $\tau, \xi_1, \cdots \xi_n$，表达式 (2) 可以看作为变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 维空间中的某一条曲线（特征线）的参数方程，或者看作为在时刻 $t-\tau$ 具有坐标 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的某一点的轨跡.

我们假设，在变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 维空间的区域 G 内方程组(1)是简单的，即函数 f_ν 在区域 G 内连续，并且对于任何 τ 和 G 中的任何一点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，通过变量 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的 $n+1$ 维空间中的一点 $(\tau, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 只有唯一的一条积分曲线；这时，只要规定把仅仅是越过点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的时刻不同的所有曲线看成是一样的，则通过每一点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 也只有唯一的一条积分曲线.

应用方程组(1)的基本领域是力学，首先是动力学和流体动力学. 这时所研究的流动必须认为是不可压缩的，即如果把积分曲线解释为流体的流线，则必须假设这种流体的任何有限部分的体积在运动时是不变的.

当研究方程组 (1) 并且把它的解解释为变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间中点的轨跡时，如果存在所谓奇点（静止点或稳定点），就会产生某些复杂性；奇点是这样一些点 $(x_1, \cdots, x_n)$，在这些点上

$$f_1(x_1, \cdots, x_n)=\cdots=f_n(x_1, \cdots, x_n)=0.$$

在 $n=2$ 的情况下，对于方程组的全面研究，归结为考察

奇点附近积分曲线的性状(见 7.2 节)。

7.2. 当 $n=2$ 时,奇点邻域内积分曲线的性状[1]. 设给定方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=g(x, y). \tag{3}$$

在 $f\neq 0$ 之处,此方程组在 xy 平面上所定义的曲线,也可以由一个方程

$$y'(x)=\frac{g(x, y)}{f(x, y)} \tag{4}$$

来确定. 在这种意义下,方程组(3)同此方程是等价的,并且对于方程组(4)的积分曲线的研究,常常化为方程组(3)的形式来研究. 方程组(3)的静止点是方程(4)的(特殊类型的)奇点.

在 7.1 节中所表述的条件(函数连续性和方程组是简单的)下,下列结论是正确的:在每一条其内部属于区域 $G(x, y)$ 的闭轨线中,至少包含着一个静止点. 如果单联通域 $G(x, y)$ 包含着唯一的静止点 S,则只能有下列情况之一发生(作为例子,见第三部分 8.5):

(a) 轨线是封闭曲线,点 S 在闭曲线内;其他所有封闭轨线(如果存在)是这样分布着:使得点 S 处于它们每一条内部;

(b) 轨线两端均与点 S 相连接,这时,处于其中的其他的每一条封闭轨线的两端,也与点 S 相连接;

(c) 轨线的每一端都是渐近地趋向于(a)型或(b)型曲线的螺线;

---

1)[例如,见:Понтрягин; Еругин; Lefschetz; Tricomi; А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон и А. Е. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, 1966; Немыцкий 和 Степанов; Coddington 和 Levinson; Спепанов; И. Г. Петровский, *Матем. сборник*, **41**:1(1934), p. 107—156.——俄译本编者注。]

(d) 轨线的一端达到区域 G 的边界，而另一端与点 S 相连接；

(e) 轨线的一端达到区域 G 的边界，而另一端形成渐近地趋向于(a)型或(b)型曲线的螺线；

(f) 轨线从区域 G 边界上的一点通过而到达另一个边界点.

奇点称为：

结点，如果每一条轨线都与奇点相连接，在连接处有确定的切线(图 9，10)；



图 9　　图 10　　图 11　　图 12

中心，如果奇点只被一些封闭轨线所包围(图 11)；

焦点，如果一些轨线渐近地趋向奇点，在奇点处卷成螺线形(图 12)；

鞍点，如果两对半轨线同奇点相连接，在连接处具有确定的切线，而其他轨线在此奇点的邻域内通过，好象是山垭地区的地图上所画的水平线那样(图13).

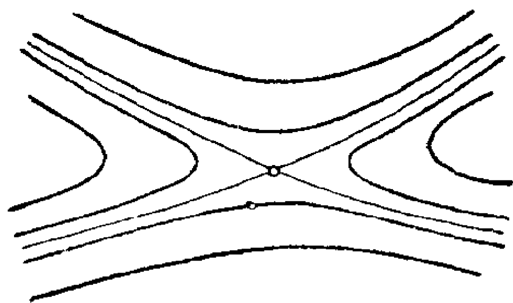


图 13

这些情况可能以各种组合的形式出现；例如，在两条如图 11 所示的封闭曲线之间，可能不是这样的封闭曲线，而是逼近于这两条封闭曲线的一些螺线形曲线，或者图 13 上的“角”可能是填满类似于图 9

所示曲线的区域.

7.3. 确定奇点类型的准则. [线性方程组

$$x'(t)=ax+by,$$
$$y'(t)=cx+dy$$

的情况，在第三部分 8.5 中有详细的讨论. ——俄译本编者注.]

(A) 假设方程组(3)具有下列形式:

$$x'(t)=ax+by+f(x,y),\ y'(t)=cx+dy+g(x,y) \quad (5)$$
$$(ad-bc\neq 0).$$

(a)[1] 设函数 f, g 在坐标原点的某一个邻域内具有连续一阶偏导数，此外，设

$$f(0,0)=g(0,0)=0,$$

$$\lim_{|x|+|y|\to 0}\frac{|f_x|+|f_y|+|g_x|+|g_y|}{(|x|+|y|)^{\delta}}=0$$

对于某一个 $\delta>0$.

这时，如果下列三个条件之一成立，则原点是结点:

$$(a-d)^2+4bc>0,\quad ad-bc>0, \quad (6)$$

$$(a-d)^2+4bc=0,\quad |b|+|c|>0, \quad (7)$$

$$a=d,\quad b=c=0. \quad (8)$$

这时，通过充分接近原点的每一个点，有一条且仅有一条积分曲线，并且所有这些积分曲线都与坐标原点相连接. 在情况(6)中，所有这些积分曲线，除去两条半特征线以外，在坐标原点具有公切线，而两条半特征线也具有公切线，不过是另一条(图 9). 在情况(7)中，所有积分曲线都与坐标原点相连接，并且具有公切线，然而在情况(8)中，在原点的每一个方向上，都有一条且仅有一条积分曲线通过(图 10).

---

1) O. Perron, *Math. Zeitschrift* 15 (1922), p. 121; G. Hoheisel, *Jahresbericht DMV* 42(1932), p. 33.

(b)[1] 设在坐标原点的某一个邻域内函数 f, g 连续，其次，设当

$$|x|+|y|\to 0$$

时，

$$f(x, y)=o(|x|+|y|),\ g(x, y)=o(|x|+|y|),$$

并且差值的比

$$\frac{f(x_2, y)-f(x_1, y)}{x_2-x_1},\quad \frac{g(x_2, y)-g(x_1, y)}{x_2-x_1},$$

$$\frac{f(x, y_2)-f(x, y_1)}{y_2-y_1},\quad \frac{g(x, y_2)-g(x, y_1)}{y_2-y_1}$$

是有界的. 这时，通过与坐标原点充分接近但不与原点重合的每一个点，有一条且仅有一条轨线。

其次，如果

$$(a-d)^2+4bc>0,\quad ad-bc<0, \tag{9}$$

则至少存在着两对与原点相连接的半轨线，它们具有两条彼此不同的确定切线。此外，如果当逼近于坐标原点时上述四个差值的比趋向于零，则我们有形如图 13 所示的鞍点。

如果

$$(a-d)^2+4bc<0, \tag{10}$$

此外，如果 $a+d\neq 0$，或者对于不同于坐标原点的所有点，有

$$a+d=0 \text{ 和 } (ax+by)g(x, y)\neq(cx+dy)f(x, y), \tag{11}$$

则(0, 0)是焦点。如果条件(11)中的第二个不成立，则坐标原点是中心，或者同时是中心和焦点，即原点被一些封闭曲线包围着，而封闭曲线之间还可能分布着一些螺线。

(B)[2] 设方程组(3)具有下列形式：

1) O. Perron, *Math. Zeitschrift* **16**(1923), p. 273—295; S. K. Zaremba, *Bulletin Acad. Polonaise Cracovie A* (1934), p. 197—207.

2) O. Perron, *Math. Ann.* **75** (1914), p. 256—273; J. Haag, *Bulletin Sc. math.* (2) **60**(1936), p.131—138.

$$y'(t)=f(x, y),\ x'(t)=\varphi(x),$$

这时确定轨线的方程(4)可以写为：

$$\varphi(x)y'(x)=f(x, y). \tag{12}$$

假设，当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时 $\varphi(x)$ 连续，当 $0<x\leqslant a$ 时 $\varphi(x)>0$，而当 $0\leqslant x\leqslant a$，$|y-\eta|\leqslant b$ 时 $f(x, y)$ 连续。此外，如果积分

$$\xi=\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)} \tag{13}$$

收敛，则在方程(12)中可以将 ξ 取作为自变量。假设 $u(\xi)=y(x)$，我们得到方程

$$u'(\xi)=f(x(\xi), u)=f^*(\xi, u).$$

如果 f 对于 y 满足李普希茨条件，则根据 1.2 节可知，存在着唯一的解，使得：

$$y(x)\to\eta \qquad \text{当 } x\to 0 \text{ 时.}$$

现在假设，积分(13)发散。积分曲线仅在使 $f(0, \eta)=0$ 的这些点 $(0, \eta)$ 上，能与 y 轴相接。设 $\eta=0$，$f(0,0)=0$ 以及

$$0<k<\left|\frac{f(x, y_2)-f(x, y_1)}{y_2-y_1}\right|<K \quad \text{当 } y_2\neq y_1 \text{时,}$$

因此表达式

$$[f(x, y_2)-f(x, y_1)](y_2-y_1)$$

不变号。如果此表达式取负值，则方程(12)具有唯一的一个当 $x\to+0$ 时趋于零的解；如果此表达式取正值，则存在着无穷多个具有这种性质的解。其次，如果当 $x\to 0$ 时 $\varphi(x)=o(x)$，并且如果显然存在并由方程 $f(x, y)=0$ 给定的曲线在坐标原点处具有确定的切线，此切线不与 y 轴重合，则与点 $(0, 0)$ 连接的积分曲线在这一点同曲线 $f(x, y)=0$ 相切。

(C) 方程组

$$x'(t)=\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu x^\nu y^{m-\nu}+f(x,y),$$

$$y'(t)=\sum_{\nu=0}^{m}b_\nu x^\nu y^{m-\nu}+g(x,y),$$

其中 f 和 g 在坐标原点比它们前面的和式具有更高阶的零点，这个方程组的详细研究见下列著作：

M. Frommer, *Math. Ann* 99(1928), p. 222—272,〔俄译本：*УМН*,卷 IX(1941),p. 212—253.——俄译本编者注.〕;H. Forster,*Math Zeitschrift* 43 (1938), p. 271—320; E. R. Lonn. 同前, **44** (1939), p. 507—530; R. v. Mises, *Compos. math.* **6**(1938),p.203—220; M. Hukuhara, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3),**21** (1939), p. 183—190;(3),**20**(1938),p.167—189,409—441,865—907.

第三章　线性微分方程组

§ 8. 任意的线性微分方程组

8.1. 一般注记. 我们考虑下列形式的微分方程组：

$$y'_p=f_p(x)+f_{p,1}(x)y_1+\cdots+f_{p,n}(x)y_n \quad (p=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中f_p和$f_{p,q}$在区间

$$-\infty\leqslant a<x<b\leqslant+\infty$$

内连续.

将方程组(1)中所有的f_p换为零而得到的方程组，称为对应的齐次方程组；f_p称为扰动函数.

如果已知对应的齐次方程组所有的解，此外还知道方程组(1)的一个解，则由此可知方程组(1)所有的解. 也就是说，如果$\psi_1(x),\cdots,\psi_n(x)$是方程组(1)的某一个解，并且如果在表达式

$$y_1=\psi_1+\varphi_1,\cdots,y_n=\psi_n+\varphi_n$$

中，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$包括对应的齐次方程组所有的解，则得到方程组(1)所有的解.[1)]

研究齐次方程组特别重要，因为根据8.3节可知，非齐次方程组的解可由对应的齐次方程组的解通过一次求积而得到.

---

1) [线性方程组的理论见下列著作：Понтрягин; Coddington 和 Levinson; Хартман; Sansone; Еругин; Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гродман и В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости, 1966. ——俄译本编者注.]

8.2. 存在和唯一性定理. 解法. 如果函数 $f_{p,q}(x)$ 和 $f_p(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上连续，则对于每一组数值 $\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n$，其中 $a<\xi<b$，存在通过点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的唯一的积分曲线

$$y_1=\psi_1(x), \cdots, y_n=\psi_n(x), \tag{2}$$

即这样的积分曲线：

$$\psi_1(\xi)=\eta_1, \cdots, \psi_n(\xi)=\eta_n, \tag{3}$$

并且**这条曲线定义在整个区间** $a<x<b$ **上**.[1]

作为求解方法，除了在§6中指出的一般方法以外，这里也可以应用8.3节的简化方法.

此外，可以利用任意给定的线性无关的函数序列[2] $\chi_1(x), \chi_2(x), \cdots$，来设法逼近具有初始值(3)的解. 为此，我们设

$$y_p(x)=c_{p,1}\chi_1+\cdots+c_{p,m}\chi_m \quad (p=1, \cdots, n)$$

并且这样来选择数 $c_{p,q}$，例如，使得对于某一个确定的正数 r，下列条件成立：

$$\sum_{p=1}^{n}\int_a^b\left|y_p'-\sum_{q=1}^{n}f_{p,q}y_q-f_p\right|^r dx=\text{极小}.$$

8.3. 化非齐次方程组为齐次方程组. 设

$$\varphi_{p,1}(x), \cdots, \varphi_{p,n}(x) \quad (p=1, \cdots, n)$$

是齐次方程组的基本解组(关于这一点见9.1节)，并且设 Δ_ν 表示由行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_{1,1}\cdots\varphi_{1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{n,1}\cdots\varphi_{n,n}\end{vmatrix}$$

将其第 ν 行元素用函数 $f_1, \cdots, f_n$ 代替而得到的行列式. 这

1) 当然，在这种情况下，也能从5.3节的一般存在定理得到更为一般的定理.

2) 这意味着，这些函数的任何有限组合是线性无关的.

时，函数

$$\psi_p(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_{\nu,p}\left(\int\frac{\Delta_\nu}{\Delta}dx+C_\nu\right)\quad(p=1,\cdots,n)$$

是方程组(1)所有的解．因而，实质上，如果已知对应的齐次方程组的全部解，就可将任意的方程组(1)看作为已被解出了。

8.4. 估值定理． 除了在6.7节中列举的一般估值以外，例如还有下列结果：

(a)[1] 设函数 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$在区间 $a\leqslant x<b$ 上是可微的，并且对于常值 $M>0,N>0$ 满足下列不等式：

$$\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu'(x)|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu(x)|+N.$$

这时，对于属于上述区间的任何两个数 x,ξ 有：

$$\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu(\xi)|e^{M|x-\xi|}+\frac{N}{M}(e^{M|x-\xi|}-1).$$

(b) 设函数$f_p(x),f_{p,q}(x),g_p(x),g_{p,q}(x)$在区间$a\leqslant x<b$ 上是连续的，并且满足下列不等式：

$$\sum_{p=1}^{n}|f_p|\leqslant A,\quad\sum_{p=1}^{n}|f_{p,q}|\leqslant B,$$

$$\sum_{p=1}^{n}|f_p-g_p|\leqslant\delta,\quad\sum_{p=1}^{n}|f_{p,q}-g_{p,q}|\leqslant\varepsilon.$$

如果(2)是方程组(1)具有初始值(3)的解，而

$$z_1=\chi_1(x),\ \cdots,\ z_n=\chi_n(x)$$

是方程组

---

1) E. Kamke, *Sitzungsberichte Heidelberg* (1930)，卷17，p.10.

$$z_p' = g_p + \sum_{q=1}^{n} g_{p,q} z_q \quad (p=1, \cdots, n) \tag{4}$$

具有同样初始值的解，则有

$$\sum_{p=1}^{n} |\psi_p - \chi_p| \leqslant \left\{ \frac{\delta}{B} + \frac{\varepsilon}{B} \left(\sum_{p=1}^{n} |\eta_p| + \frac{A}{B} \right) e^{B(b-a)} \right\} e^{(B+\varepsilon)(b-a)}. \tag{5}$$

对于单独的$|\psi_p - \chi_p|$，也不难(借助于(a))得到类似的估值。

§9. 齐次线性方程组

9.1. 解的性质.基本解组。 我们研究下列形式的方程组：

$$y_p' = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x) y_q \quad (p=1, \cdots, n), \tag{1}$$

其中函数$f_{p,q}(x)$在区间

$$-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$$

上连续. 显然，函数 $y_1=0, \cdots, y_n=0$ 是任何方程组 (1) 的解. 这个解通常称为平凡解，而不是由一些零所构成的解则认为是非平凡解。

如果 p 组函数

$$\varphi_{\nu,1}(x), \cdots, \varphi_{\nu,n}(x) \quad (\nu=1, \cdots, p) \tag{2}$$

中的每一组都是方程组(1)的解，则这些函数的任何线性组合

$$\varphi_1 = \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,1}, \ \ldots, \ \varphi_n = \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,n}$$

也是解，其中 C_ν 是任意常系数。 如果 $p>n$，则任何 p 组解

(2)彼此线性相关，即存在一些不全为零的常数 C_ν，使得

$$\sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,1} \equiv 0, \cdots, \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,n} \equiv 0.$$

对于任何 n 组解(2)和任何 ξ, $a<\xi<b$, 有

$$\operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(x)| = \operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(\xi)| \exp\int_{\xi}^{x} \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\nu}(x)\,dx.$$

[这就是刘维尔公式.——俄译本编者注.]

如果 n 组解(2)线性无关，或者，与此等价地，如果

$$\operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(x)| \neq 0,$$

那么就说，这 n 组解(2)构成了基本解组.

如果引进(依赖于 x 的) 矩阵 $\boldsymbol{F} = \| f_{p,q} \|$，方程组(1)可以写得非常简单. 这时，求基本解组等价于去寻找矩阵方程[1)]

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Y}(x) \tag{1a}$$

使行列式 $|\boldsymbol{Y}(x)| \neq 0$ 的解；这时，矩阵 $\boldsymbol{Y}(x)$ 的各列构成了方程组(1)的基本解组.

9.2. 存在定理和解法. 由 8.2 节存在定理得知：通过每一点 $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ (这里 $a<\xi<b$)，有一条且仅有一条积分曲线

$$y_1 = \varphi_1(x), \cdots, y_n = \varphi_n(x),$$

并且这条曲线定义在整个区间 $a<x<b$ 上. 其次，基本解组

---

1) 如果 $A = \| a_{p,q} \|$ 和 $B = \| b_{p,q} \|$ 是两个 n 阶矩阵，则它们的乘积 AB (一般说来，不等于 BA)是具有下列元素的矩阵：

$$c_{p,q} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{p,\nu} b_{\nu,q}.$$

[关于方程组的矩阵写法，详见 Понтрягин; Матвеев; Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, 1967(1953 年版中译本：Ф. Р. 甘特马尔，矩阵论，高等教育出版社，1955.)；Bellman. ——俄译本编者注.]

总是存在。如果给出 n 组数

$$\eta_{p,1},\ \cdots,\ \eta_{p,n}\quad (p=1,\ \cdots,\ n),$$

使得

$$\mathrm{Det}\,|\eta_{p,q}|\neq 0,$$

并且选取任意的 $\xi,\ a<\xi<b$，对于每一个 p，求出通过点 $(\xi,\ \eta_{p,1},\ \cdots,\ \eta_{p,n})$ 的积分曲线，则可得到基本解组。

用矩阵学的语言来说，这个定理表示：对于每一个行列式不为零的常数矩阵 $\boldsymbol{H}=\|\eta_{p,q}\|$，矩阵方程 (1 a) 有一个且仅有一个满足初始条件 $\boldsymbol{Y}(\xi)=\boldsymbol{H}$ 的解。

借助于某一个基本解组的线性组合所能够得到的那些解，构成了方程组(1)所有解的集合。

为了解方程组(1)，除了在 §6 中叙述的一般方法以外，在某些情况下，可以利用 9.3 节中的结果。

6.2 节的逐次逼近法，在这里可以采用，其形式如下：设(记号与 9.1 节中相同)

$$\boldsymbol{IF}=\int_{\xi}^{x}\boldsymbol{F}dx=\left\|\int_{\xi}^{x} f_{p,q}(x)\,dx\right\|,$$

用 $\boldsymbol{F}^{I}\boldsymbol{F}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $I\boldsymbol{F}$ 的乘积，并且对于每一个自然数 $m\geqslant 2$，假设

$$(I\boldsymbol{F})^{m}=I\boldsymbol{F}(I\boldsymbol{F})^{m-1}=\int_{\xi}^{x}\boldsymbol{F}(I\boldsymbol{F})^{m-1}dx,$$

最后，假设 $(I\boldsymbol{F})^{0}=1$。这时，由矩阵组成的级数

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(I\boldsymbol{F})^{m}$$

当 $a<x<b$ 时收敛，而矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的各列构成的基本解组，在点 $x=\xi$ 处，满足由单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的各列所确定的初始条件。

如果方程组（1）的系数$f_{p,q}$是复变量x的单值解析函数，那么在所有的$f_{p,q}$在点ξ处是正则的这个条件下，则上述一切仍然成立。对于Φ的级数，在由函数$f_{p,q}$所确定的所谓米塔格-莱弗勒星形域内收敛并且给出解。如果从所有函数$f_{p,q}$的奇点$A_1, A_2, \cdots, A_\nu$中的每一个，顺着由ξ到该奇点的方向画一射线与无穷远点相连接，然后，在x平面上，沿着每一条射线，从相应的奇点到无穷远点剪开，这样就得到米塔格莱弗勒星形域（图 1 4)。解中所包含的积分，应当沿着处于剩余的区域里的路线Γ来取[1]。

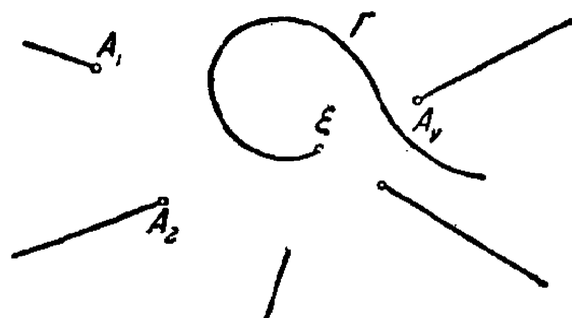


图 14

9.3. 把方程组简化为方程个数较少的方程组. 除了在§6中叙述的一般解法以外，这里还应指出下述方法：如果已知方程组（1）的一个非平凡解，则可以将方程组(1)化为类型相同而方程个数较少的方程组。如果$\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$是非平凡解，并且$\varphi_1(x) \neq 0$，则可按下述方式把它补充到基本解组中去：找出由$n-1$个方程构成的齐次方程组

1) 这就是所谓的皮亚诺-贝克法。见 Ince. p.408 以及以后。关于用 Volterra 和 Schlesinger 研究过的积分来证明解的存在，见 G. Rasch, *Journ. f. Math.* 171(1934), p. 75—119.

$$y_\nu' = \sum_{q=2}^{n}\left[f_{\nu,q}(x) - \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_1(x)}f_{1q}(x)\right]y_q \quad (\nu=2, \cdots, n) \tag{3}$$

的基本解组

$$\psi_{p,2}(x), \cdots, \psi_{p,n}(x) \quad (p=2, \cdots, n),$$

并且假设

$$\psi_{p,1}(x) = \int \frac{1}{\varphi_1(x)}\sum_{q=2}^{n} f_{1,q}(x)\psi_{p,q}(x)\,dx \quad (p=2, \cdots, n);$$

这时，函数

$$\varphi_{p,1} = \psi_{p,1}\varphi_1,\ \varphi_{p,2} = \psi_{p,1}\varphi_2 + \psi_{p,2},\ \cdots,\ \varphi_{p,n} = \psi_{p,1}\varphi_n + \psi_{p,n}$$
$$(p=2, \cdots, n)$$

同原来的解一起构成原方程组(1)的基本解组.

9.4. 共轭微分方程组. 线性方程组

$$u_p' = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)u_q \quad (p=1, \cdots, n) \tag{4}$$

和

$$v_p' = -\sum_{q=1}^{n} f_{q,p}(x)v_q \quad (p=1, \cdots, n) \tag{5}$$

称为相互**共轭的**. 如果 $u_1, \cdots, u_n$ 是方程组(4)的任何一个解，而 $v_1, \cdots, v_n$ 是方程组(5)的任何一个解，则显然有

$$\sum_{p=1}^{n}(u_p v_p)' = 0, \quad \text{而这意味着} \quad \sum_{p=1}^{n} u_p v_p = \text{常数}.$$

如果

$$u_{p,1}, \cdots, u_{p,n} \quad (p=1, \cdots, n)$$

是方程组(4)的基本解组，则函数组

$$v_{p,1} = \frac{U_{p,1}}{U}, \cdots, v_{p,n} = \frac{U_{p,n}}{U} \quad (p=1, \cdots, n), \tag{6}$$

构成方程组(5)的基本解组，其中

$$U = \operatorname{Det}|u_{p,q}|,$$

而 $U_{p,q}$ 表示此行列式中元素 $u_{p,q}$ 的代数余因式.

9.5. 自共轭微分方程组.

如果用函数 u_ν 代替 v_ν 时方程组 (5) 可化为方程组(4), 则方程组 (4)称为自共轭的 (在严格的意义下), 换句话说, 当且仅当 $f_{p,q}=-f_{q,p}$ (特别是, 这意味着对于所有的 p, $f_{p,p}=0$)时, 方程组(4)是自共轭的. 自共轭方程组的这个定义在很多情况下是太窄了; 例如, 从自共轭方程(见 24.1 节)

$$(f(x)y')'+g(x)y=0,$$

如果假设 $u_1=y$, $u_2=fy'$ 而得到的方程组

$$u_1'=\frac{u_2}{f},\quad u_2'=-gu_1,$$

一般说来, 在这种意义下不是自共轭的.

如果存在着这样一些连续可微函数

$$T_{p,q}(x),\quad (p,q=1,\cdots,n),$$

使得

$$\mathrm{Det}\,|T_{p,q}|\neq 0\,, \tag{7}$$

并且当 $u_1,\cdots,u_n$ 包括方程组(4)所有的解时, 函数

$$v_p=\sum_{q=1}^{n}T_{p,q}(x)u_q(x)\qquad(p=1,\cdots,n)$$

包括了方程组(5)所有解的全体, 在这种情况下, 我们也将方程组(4)称为**自共轭的**(在广义下). 在这种意义下, 当且仅当方程组

$$T'_{p,q}=-\sum_{\nu=1}^{n}(T_{p,\nu}f_{\nu,q}+T_{\nu,q}f_{\nu,p})\qquad(p,q=1,\cdots,n)$$

具有满足不等式(7)的解 $T_{p,q}$ 的全体时, 方程组 (4) 是自共轭的. 如果

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu(x)y^{(\nu)}$$

是某一个自共轭或反自共轭的微分型(见 17.5 节)，即如果 $L^*(y)=\pm L(y)$，则微分方程 $L(y)=0$，经过代换 $y=u_1$, $y'=u_2, \cdots, y^{(n-1)}=u_n$，总可以化为在这种扩大意义下的自共轭方程组.这时，如果想使所有的 $T_{p,q}$ 都是常数，则等式 $f_{1,1}+f_{2,2}+\cdots+f_{n,n}=0$ 必须成立；当 $n=2$ 时，这个条件也是充分的.

9.6. 共轭微分型组；拉格朗日恒等式；格林公式. 设 n 阶微分型

$$L_{p,q}(u)=\sum_{\nu=0}^{n} f_{p,q,\nu}(x)u^{(\nu)}$$

借助于函数 $f_{p,q,\nu}$ 来确定，其中每一个 $f_{p,q,\nu}$ 是 ν 次连续可微的.根据 17.5 节，共轭微分型

$$L^*_{p,q}(v)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}(f_{p,q,\nu}v)^{(\nu)}$$

以及与其相联系的双线性微分型 $\mathscr{L}_{p,q}[u, v]$ 满足下列拉格朗日恒等式：

$$vL_{p,q}(u)-uL^*_{p,q}(v)=\frac{d}{dx}\mathscr{L}_{p,q}[u, v].$$

如果对于 m 个函数 $u_1(x), \cdots, u_m(x)$ 组成线性微分型

$$L_p(u_1, \cdots, u_m)=\sum_{q=1}^{m} L_{p,q}(u_q),$$

则微分型

$$L^*_p(v_1, \cdots, v_m)=\sum_{q=1}^{m} L^*_{q,p}(v_q)$$

称为同 L_p 是共轭的. 这时，拉格朗日恒等式(见 17.6 节)具有下列形式：

$$\sum_{p=1}^{m}[v_pL_p(u_1, \cdots, u_m)-u_pL^*_p(v_1, \cdots, v_m)]=$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{p,q=1}^{m}\mathscr{L}_{q,p}[u_p, v_q]. \tag{8}$$

恒等式的右端是关于

$$u_p, u_p', \cdots, u_p^{(n-1)}$$

和

$$v_p, v_p', \cdots, v_p^{(n-1)}$$

的双线性型，其行列式等于(最多差一符号)行列式

$$\mathrm{Det}\,|f_{p,q,n}(x)| \quad (p, q=1, \cdots, m)$$

的 n 次幂。

在从 a 到 b 的范围内将(8)积分，则得到**格林公式**(同17.6节相比较)。

9.7. 基本解. n 组函数

$$g_{\nu,1}(x,\xi), \cdots, g_{\nu,n}(x,\xi) \quad (\nu=1, \cdots, n) \tag{9}$$

称为方程组(4)在区间 $a<x<b$ 上的**基本解**，如果这些函数具有下列性质：

(α) 每一个函数 $g_{p,q}(x,\xi)$，在 $x\xi$ 平面上两个三角形区域 $a\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b$ 和 $a\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b$ 的每一个区域内，具有对于 x 的连续一阶偏导数；

(β) 在这两个三角形区域的每一个区域内，函数组(9)中的每一组，对于任何 ξ，都是方程组(4)的某一个解；

(γ) 当 $a<\xi<b$ 时

$$g_{\nu,k}(\xi+0,\xi)-g_{\nu,k}(\xi-0,\xi)=e_{\nu,k}$$[1].

方程组(4)的基本解是：

$$g_{\nu,k}(x)=\begin{cases}\sum_{p=1}^{n}[c_{p,\nu}(\xi)-v_{p,\nu}(\xi)]u_{p,k}(x) & \text{当 } a\leqslant x\leqslant\xi \text{ 时},\\ \sum_{p=1}^{n}c_{p,\nu}(\xi)u_{p,k}(x) & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant b \text{ 时},\end{cases}$$

1) 此处很多作者用 $-e_{\nu,k}$ 代替 $e_{\nu,k}$。

其中

$$u_{p,1}, \cdots, u_{p,n} \quad (p=1, \cdots, n)$$

是方程组(4)的某一个基本解组，$v_{p,1}(x), \cdots, v_{p,n}(x)$是与其对应的函数组(6)，而$c_{p,\nu}$是任意的一些连续函数.

§10. 具有奇点的齐次线性方程组

10.1. 奇点的分类[1]. 现在假设方程组§9(1)的系数$f_{p,q}(x)$是复变量x的函数，这些函数在某一点x_0的邻域内是半纯的，即除了极点外没有任何奇点. 不失一般性，可以认为$x_0=0$. 这时，所研究的方程组可以表示为下列形式：

$$x^\alpha y_p'(x) = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x) y_q \quad (p=1, \cdots, n), \tag{1}$$

其中α是某一个整数，而所有函数$f_{p,q}(x)$在点$x=0$是正则的，并且不同时等于零；换句话说，这意味着，函数$f_{p,q}$可以表示为在零点的某一个确定的邻域内收敛的幂级数

$$f_{p,q}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p,q}^{(\nu)} x^\nu, \tag{2}$$

其中所有$a_{p,q}^{(0)}$不全为零.

当$\alpha \leqslant 0$时，点$x=0$称为正则点[2]，当$\alpha \geqslant 1$时，称为奇点，特别是当$\alpha=1$时，称为弱奇点(正则奇点)，而当$\alpha \geqslant 2$时，称为强奇点(非正则奇点)；$\alpha-1$称为奇点的阶.

变换

$$y(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\frac{1}{x}$$

1) [见 Ince; Coddington 和 Levinson; Еругин; Tricomi 以及在§18中指出的文献.——俄译本编者注.]

2) 这时，发生了在6.3节中讨论过的情况.

将奇点 $x=0$ 转换为点 $\xi=\infty$。这时，方程组(1)化为

$$\eta_p'(\xi)=\xi^{\alpha-2}\sum_{q=1}^{n}g_{p,q}(\xi)\eta_q \quad (p=1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 $g_{p,q}(\xi)$ 现在为按 ξ 的降幂表示的级数

$$g_{p,q}(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{p,q}^{(\nu)}\xi^{-\nu},$$

其中不是所有的 $a_{p,q}^{(0)}$ 都等于零。上面引入的按照 α 的各种可能值对于点 $x=0$ 的类型的定义，也可转移到点 $\xi=\infty$。也可以参阅 § 18。

10.2. 弱奇点. 如果点 $x=0$ 是弱奇点，则方程组(1)具有下列形式：

$$xy_p'(x)=\sum_{q=1}^{n}f_{p,q}(x)y_q \quad (p=1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中函数 $f_{p,q}$ 由等式(2)给出，并且具有上面指出的性质。方程组(4)的解可按下列形式来寻找：

$$y_1=x^r\varphi_1(x),\ \cdots,\ y_n=x^r\varphi_n(x), \tag{5}$$

这时，每一个级数

$$\varphi_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{p,\nu}x^{\nu} \tag{6}$$

在零点的某一个固定的邻域内应当是收敛的，而 $c_{p,0}$ 不应当同时都等于零。

将(5)代入方程组(4)，我们得到

$$x\varphi_p'=f_{p,1}\varphi+\cdots+(f_{p,p}-r)\varphi_p+\cdots+f_{p,n}\varphi_n \quad (p=1,\cdots,n); \tag{7}$$

特别是，当 $x=0$ 时，

$$f_{p,1}(0)c_{1,0}+\cdots+[f_{p,p}(0)-r]\,c_{p,0}+\cdots+f_{p,n}(0)\,c_{n,0}=0 \quad (p=1,\cdots,n). \tag{8}$$

因为不是所有的 $c_{p,0}$ 都等于零，所以 r 应当是下列特征方程

的根：

$$F(r)=0,\quad 其中\ F(r)=\mathrm{Det}\,|f_{p,q}(0)-re_{p,q}|. \tag{9}$$

设 r 是这些根之一。这时，数 $c_{1,0},\cdots,c_{n,0}$ 可以这样选择，使得它们不全为零，并且满足方程(8)。如果把表达式(6)代入(7)，并且对于每一个 $k=1,2,\cdots$，使 x 的同次幂的系数相等，则得到线性方程组

$$\sum_{q=1}^{n}[a_{p,q}^{(0)}-(r+k)e_{p,q}]c_{p,k}=-\sum_{q=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}a_{p,q}^{(k-\nu)}c_{p,\nu}$$

$$(p=1,\cdots,n). \tag{10}$$

如果特征方程(9)没有任何一个根与已知的根 r 相差一个整数，则从方程(10)，当 $k=1$ 时，可以求出所有的数 $c_{p,1}$，然后($k=2$)，求出数 $c_{p,2}$，等等。如果特征方程具有同 r 相差为整数的根，那么把特征方程彼此相差为整数的所有根中"最大的"取作为 r，即取这样的根，使得数 $r+1,r+2,\cdots$中的任何一个都不会满足方程(9)[1)]，则仍然可以求得数值 $c_{p,k}$。从(10)中按这种方式求出数值 $c_{p,k}$ 的级数(6)，在点 $x=0$ 的某个邻域内收敛，用这些级数确定的函数(5)，在这个邻域内(点 $x=0$ 除外)表示方程组(4)的解，其中 x^r 的幂还需这样来确定，使得这个解在零点的该邻域内(点 $x=0$ 本身除外)是正则的。

如果存在着与"最大的"根 r 相差为整数的一些特征根(这里也包括 r 是重根的情况)，那么利用所求出的解，根据9.3节，则方程组(4)可以化为方程个数较少的方程组，而同样的方法又可以用于这个新的方程组。这时，所得到的解，在一般情况下只具有对数奇点。

线性微分方程§18(5)：

---

1) 这样谨慎的表述是必要的，因为 r 可能是复数。

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} g_{\nu}(x) y^{(\nu)}=0$$

是方程组(4)的特殊情况；如果假设

$$y_1(x)=y,\quad y_2(x)=xy_1',\ \cdots,\ y_n(x)=xy_{n-1}',$$

则此方程便化为形如(4)的方程组。

对于实变量的情况，曾研究过[1] 类似于方程组(4)的方程组

$$xy_p'(x)=\sum_{q=1}^{n}[a_{p,q}+xf_{p,q}(x)]y_q\quad (p=1,\ \cdots,\ n),$$

这里 $a_{p,q}$ 是一些常数，而函数 $f_{p,q}(x)$ 当 $0<x<a$ 时是连续的，并且当 $0\leqslant x<a$ 时是绝对可积的。

10.3. 强奇点. 如果点 $x=\infty$ 是强奇点，那么根据(3)，在 $x=\infty$ 的邻域内，方程组具有下列形式：

$$y_p'(x)=x^{\alpha}\sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x)y_q\quad (p=1,\ \cdots,\ n),\tag{11}$$

其中

$$g_{p,q}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p,q}^{(\nu)}x^{-\nu},$$

并且不是所有的 $a_{p,q}^{(0)}$ 都等于零，α 是某一个非负整数； $\alpha+1$ 是奇点的阶。

如果用下列表达式代替方程组(11)中的 y_p：

$$y_p=e^{P(x)}x^s\varphi_p(x)\quad (p=1,\ \cdots,\ n),\tag{12}$$

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{\alpha}\rho_\nu\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1},\quad \varphi_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{p,k}x^{-k},$$

并且使 x 的同次幂的系数相等，则可以确定数 ρ_ν, s, $c_{p,k}$[2]。

---

1) O. Dunkel, *Proceedings Americ. Acad.* 38(1903), p. 341—370.

2) 据我们所知，只是在方程组(1)预先化为典则形式的一些情况下，这一点成立。

数 $r=\rho_\alpha$ 是特征方程

$$\mathrm{Det}\,|a_{p,q}^{(0)}-re_{p,q}|=0$$

的根. 如果此特征方程具有重根，这就会引起某些复杂性. 如果特征方程所有的根都不同，我们便得到形式上的解. 一般说来，这个解是发散的，但是，在某个区域内，它是当 $|x|\to\infty$ 时解的渐近展开式. 借助于广义的拉普拉斯变换[1)]，可以得到解的收敛的表达式.

如果 $x=0$ 是奇点，并且如果方程组具有下列形式：

$$x^{\alpha_p}y_p'(x)=\sum_{q=1}^{n}f_{p,q}(x)y_q\quad(p=1,\cdots,n),$$

其中 α_p 是这样一些非负整数，它们的和 $\alpha=\sum\alpha_p<n$，而函数 $f_{p,q}(x)$ 在点 $x=0$ 是正则的，则方程组至少具有 $n-\alpha$ 个线性无关的、在点 $x=0$ 为正则的解[2)].

§ 11. 对于大的 x 值解的性状[3)]

自变量 x 仍然认为是实数.

(a) 如果在方程组

$$y_p'(x)=\sum_{q=1}^{n}f_{p,q}(x)y_q\quad(p=1,\cdots,n)$$

中，函数 $f_{p,q}(x)$ 当 $x\geqslant x_0$ 时连续并且有界，则对于每一个解 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 存在这样的数 λ（依赖于这个解），对于所有的 $p=1,\cdots,n$

---

1) [见 Ince; Sansone. ——俄译本编者注.]

2) F. Lettenmeyer, *Sitzungsberichte München*(1926), p. 287—307.

3) [关于这个问题的各种结果可以在下列著作中找到：Еругин; Tricomi; Ince; Bellman; Наймарк, § 22; И. М. Раппопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, 1954; Cecari.——俄译本编者注.]

$$y_p(x)e^{\lambda x}\to 0,\ 当\ x\to\infty\ 时。$$

(b) 设在方程组

$$y_p'(x)=f_p(x)y_p+\sum_{q=1}^{n}g_{p,q}(x)y_q \quad (p=1,\cdots,n) \qquad (1)$$

中，函数 f_p 和 $g_{p,q}$ 当 $x\geqslant x_0$ 时连续，并且设当 $x\to\infty$ 时，$g_{p,q}\to 0$(例如，所有的 $g_{p,q}\equiv 0$)。

如果

$$\Re f_1>\Re f_p+c \quad (c>0,p=2,\cdots,n),$$

则方程组 (1) 具有这样的解 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$，使当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{y_p}{y_1}\to 0\ (p=2,\cdots,n)$ 和 $\left(\dfrac{y_1'}{y_1}-f_1\right)\to 0$，并且存在着由这种形式的解所构成的基本解组。

如果下列更强的条件成立：

$$\Re f_p>\Re f_{p+1}+c \quad (c>0;p=1,\cdots,n-1),$$

则存在这样的基本解组

$$y_{p,1}(x),\cdots,y_{p,n}(x) \quad (p=1,\cdots,n),$$

使得当 $x\to\infty$ 时，有

$$\frac{y_{p,q}}{y_{p,p}}\to 0(q\neq p)\ 和\ \left(\frac{y_{p,p}'}{y_{p,p}}-f_p\right)\to 0;$$

特别是，如果 $f_p=\rho_p$ 是常数，则后一关系式表示

$$\frac{y_{p,p}'}{y_{p,p}}\to\rho_p.$$

一般说来，对于下列形式的方程组的解，也可以得出类似的论断：

$$y_p'=\sum_{q=1}^{n}f_{p,q}(x)y_q \quad (p=1,\cdots,n),$$

其中$f_{p,q}$当$x\to\infty$时趋向于某些极限值[1]。

§ 12. 依赖于参数的线性方程组[2]

(a) 从5.4节可知：设在方程组

$$y_p'(x)=\sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x,\rho)y_q \quad (p=1,\cdots,n) \tag{1}$$

中，函数$f_{p,q}$具有下列形式：

$$f_{p,q}(x,\rho)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{p,q,\nu}(x)\rho^{\nu}, \tag{2}$$

其中$g_{p,q,\nu}(x)$在区间$a\leqslant x\leqslant b$上是连续的并且满足不等式

$$|g_{p,q,\nu}(x)|\leqslant Gr^{-\nu},$$

这里G和r是某些常数，因此，当$a\leqslant x\leqslant b$，$|\rho|<r$时，级数(2)收敛于对于x连续的函数。这时，对于方程组(1)存在这样的基本解组：

$$y_{k,1}(x,\rho),\cdots,y_{k,n}(x,\rho) \quad (k=1,\cdots,n),$$

所有的$y_{k,l}$都是ρ的解析函数，当$|\rho|<r$时是正则的，而当$x=a$时具有与ρ无关的初始值的任何解$y_1(x,\rho),\cdots,y_n(x,\rho)$，本身也与$\rho$无关。

(b) 设方程组具有下列形式[3]：

$$y_p'(x)=\rho f_p(x)y_p+\rho\sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x,\rho)y_q \quad (p=1,\cdots,n),$$

其中f_p和$g_{p,q}$当$a\leqslant x\leqslant b$时对于一切足够大的ρ是x的连

---

1) O. Perron, *Journ. f. Math.* **142**(1913), p. 254—270; **143**(1913), p. 25—50; T. Peyovitch, *Bulletin Soc. Math. France* **61**(1933), p. 85—94.

2) O. Perron, *Sitzungsberichte Heidelberg*, 卷13和15(1918); 卷6(1919). [也可以参阅: Coddington 和 Levinson; Наймарк. ——俄译本编者注.]

3) 函数f_p、$g_{p,q}$可能具有复数值；x和ρ是实数。

续函数，其次，设

$$\Re f_1(x)>\Re f_p(x) \quad (p=2,\cdots,n) \tag{3}$$

$$|g_{p,q}(x,\rho)|<g(\rho), \text{ 并且当 } \rho\to\infty \text{ 时 } g(\rho)\to 0.$$

这时，存在这样的解 $y_1(x,\rho),\cdots,y_n(x,\rho)$，而 y_p 具有下列形式：

$$y_p=\omega_p(x,\rho)\exp\rho\left[\int_a^x f_1(x)dx+\psi(x,\rho)\right] \quad (p=1,\cdots,n),$$

其中 $\omega_1\equiv 1$，并且当 $\rho\to\infty$ 时，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有：

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x,\rho)=O(g(\rho)), \quad \omega_p(x,\rho)=O(g(\rho)) \quad (p>1),\\&\frac{d\psi}{dx}=O(\rho g(\rho)), \qquad \frac{d\omega_p}{dx}=O(\rho g(\rho)) \quad (p>1).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

甚至存在这种类型的 n 个线性无关的解.

如果代替(3)，下列更强的条件成立：

$$\Re f_1(x)>\Re f_2(x)>\cdots>\Re f_n(x),$$

则存在这样的基本解组：

$$y_{k,1}(x,\rho),\cdots,y_{k,n}(x,\rho) \quad (k=1,\cdots,n),$$

$y_{k,p}$ 具有下列形式

$$y_{k,p}=\omega_{k,p}(x)\exp\rho\left[\int_a^x f_k(x)dx+\psi_k(x,\rho)\right],$$

其中 $\omega_{k,k}\equiv 1$，并且由(4)，以 $\psi_k,\omega_{k,p}$，$p\neq k$ 来代替 ψ，ω_p，$p>1$ 而得到的条件成立.

(c) 设在方程组

$$y_p'(x)=\rho^m f_p(x)y_p+\rho^{m-1}\sum_{q=1}^n g_{p,q}(x,\rho)y_q$$

$$(p=1,\cdots,n) \tag{5}$$

中，m 是某一个自然数，当 $\rho\to\infty$ 时，函数 $g_{p,q}(x,\rho)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有渐近展开式

$$g_{p,q}(x,\rho)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_{p,q,\nu}(x)\rho^{-\nu}, \tag{6}$$

而 f_p 和 $\varphi_{p,q,\nu}$ 具有各阶导数.

此外，如果

$$\Re f_1(x)>\Re f_p(x)\quad(p=2,\cdots,n), \tag{7}$$

则存在这样的解 $y_1(x,\rho),\cdots,y_n(x,\rho)$，当 $\rho\to\infty$ 时，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有

$$y_p(x)\sim\left\{\exp\rho^m\sum_{\mu=0}^{m-1}h_\mu(x)\,\rho^{-\mu}\right\}\sum_{\nu=0}^{\infty}\omega_{p,\nu}(x)\rho^{-\nu};$$

这时，处于右边的表达式这样来选择，使得它们形式地满足方程组(5)．当形式上计算数值 h_μ 和 $\omega_{p,\nu}$ 时所得到的积分常数可以任意选取；因此，例如可以得到

$$h_0(x)=\int f_1(x)\,dx,\quad \omega_{1,0}\neq0,\quad \omega_{2,0}=\cdots=\omega_{n,0}=0.$$

如果将(7)代以下列更强的条件：

$$\Re f_1(x)>\Re f_2(x)>\cdots>\Re f_n(x), \tag{8}$$

则存在这样的基本解组

$$y_{k,1}(x,\rho),\cdots,y_{k,n}(x,\rho)\quad(k=1,\cdots,n),$$

当 $\rho\to\infty$ 时在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有：

$$y_{k,p}\sim\exp\left\{\rho^m\sum_{\mu=0}^{m-1}h_{k,\mu}(x)\,\rho^{-\mu}\right\}\sum_{\nu=0}^{\infty}\omega_{k,p,\nu}(x)\rho^{-\nu},$$

并且上面所做的结论仍然正确，只不过在这里

$$h_{k,0}(x)=\int f_k(x)\,dx,\quad \omega_{k,k,0}\neq0,\quad \omega_{k,p,0}=0\ \text{当}\ p\neq k\ \text{时}.$$

如果 $m=1$，且当 $p\neq1$ 和 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f_1(x)\neq f_p(x)$，则在(7)中可以增加等号.

如果 $m=1$ 且当 $p\neq q$ 和 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f_p(x)\neq f_q(x)$，则在(8)中也可以增加等号.

§13. 常系数线性方程组

13.1. 齐次方程组. 现在我们考虑方程组

$$y_p'=a_{p,1}y_1+\cdots+a_{p,n}y_n \quad (p=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $a_{p,q}$ 是给定的常数.

如果 s_0 是特征多项式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-s & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-s & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n}-s \end{vmatrix} \tag{2}$$

的某一个 r 重实根,则方程组(1)具有形如

$$y_1=P_{h,1}(x)e^{s_0x}, \cdots, y_n=P_{h,n}(x)e^{s_0x} \quad (h=1,\cdots,r) \tag{3}$$

的 r 个线性无关的解, 其中 $P_{h,k}$ 是次数不高于 $h-1$ 的多项式. 因而,解中总是包含有($h=1$)形如

$$y_1=C_1e^{s_0x};\cdots;y_n=C_ne^{s_0x}$$

的解. 如果(2)具有 n 个不同的实根 $s_1,\cdots,s_n$, 则存在形如

$$y_{\nu,1}=C_{\nu,1}e^{s_\nu x},\cdots,y_{\nu,n}=C_{\nu,n}e^{s_\nu x} \quad (\nu=1,\cdots,n)$$

的 n 个线性无关的解.

如果 s_0 是 r 重复根,当假设多项式 $P_{h,k}$ 的系数可以是复数时,则具有同样的结果.将函数(3)中的实部和虚部分开,我们就得到方程组 (1) 的一组 $2r$ 个线性无关的实数解. 如果对于多项式 (2) 的每一个实根和每一对彼此共轭的复根中的一个, 建立相应的线性无关的解组,则它们合起来构成(1)的基本解组. 方程组(1)的每一个解,可以表示为上述形式解的线性组合. 如果把形如(3)的表达式代入方程组(1), 常常更容易求得解(3).

13.2. 更一般形式的方程组. 设已给方程组

$$\sum_{\rho=1}^{n} P_{\nu,\rho}(D)\,y_{\rho}(x)=f_{\nu}(x) \quad (\nu=1,\cdots,n), \qquad (4)$$

其中 $D=\frac{d}{dx}$ 和 $P_{\nu,\rho}(u)$ 是具有常系数的多项式[1].

如果方程组中包含着高阶导数，根据§14可知，这样的方程组可以化为仅含有一阶导数的另一个方程组．其次，如果这样的方程组能够化为形式(1)，可能仅有这一点差别：右端还可能有"扰动函数" $g_{\nu}(x)$，则根据13.1节可知，可以首先解对应的齐次方程组，然后，根据8.3节，再来解非齐次方程组．

但是，下述方法要简单得多：设 $p_{\nu,\rho}(u)$ 是行列式

$$\Delta(u)=\mathrm{Det}\,|P_{\nu,\rho}(u)|$$

的元素 $P_{\nu,\rho}(u)$ 的代数余因式．因为用微分表达式 $P(D)$ 可以如同多项式 $P(u)$ 那样进行计算，如果只限于加法和乘法运算，则方程组(4)的解也应当满足方程

$$\Delta(\mathrm{D})\,y_{\nu}=\sum_{\lambda=1}^{n} p_{\lambda,\nu}(D) f_{\lambda}(x).$$

这就是§22(3)类型的方程．根据这一点，就可以说明方程组(4)解的形式应当是怎样的，并且如果将相应形式的表达式代入方程(4)，就能求出这些解．但是这时应当注意，正象第三部分8.26所表明的，对于任意的方程组(4)，可能发生某些复杂情况．

---

1) [见 Понтрягин; Sansone. ——俄译本编者注.]

第四章　任意 n 阶微分方程

§ 14. 已解出最高阶导数的方程：$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

满足微分方程

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}) \tag{1}$$

的所有 n 次可微函数 $y=\varphi(x)$ 称为此方程的解或积分．显然，微分方程(1)等价于具有 n 个未知函数 $y_0(x), y_1(x), \cdots, y_{n-1}(x)$ 的 n 个一阶方程的方程组：

$$y_0'=y_1,\ y_1'=y_2,\ \cdots,\ y_{n-2}'=y_{n-1},$$
$$y_{n-1}'=f(x,\ y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-1}).$$

所以，在第二章中所叙述的存在和唯一性定理以及各种解法，对于方程(1)，也可以直接给出相应的结果．

应当指出，如果函数 $f(x,\ y_0,\ \cdots,\ y_{n-1})$ 在区域 $G(x,\ y_0,\ \cdots,\ y_{n-1})$ 内是连续的，则对于 G 内的每一点 $(\xi,\eta_0,\ \cdots,\ \eta_{n-1})$，至少存在一个解 $y=\varphi(x)$ 在点 ξ 的某一个邻域内有定义并且满足初始条件

$$\varphi(\xi)=\eta_0,\quad \varphi'(\xi)=\eta_1,\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(\xi)=\eta_{n-1};$$

此外，如果函数 f 还满足李普希茨条件

$$|f(x,\ \bar{y}_0,\ \cdots,\bar{y}_{n-1})-f(x,\ y_0,\ \cdots,y_{n-1})|\leqslant L\sum_{p=0}^{n-1}|\bar{y}_p-y_p|,$$

则这样的解是唯一的．

对于高阶(微分)方程，除了当在某一点上给出未知函数

及其前 $n-1$ 阶导数值时按照初始条件确定解的问题（柯西问题）以外，所谓边值问题起着重要的作用，在边值问题中，未知函数值及其导数值（或者它们之间的关系）是在一些不同的点上给定的（见第二部分）.

§ 15. 未解出最高阶导数的方程：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

15.1. 全微分方程. 微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = f(x) \tag{1}$$

称为全微分方程，如果存在着函数 $\Phi(x, u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$，使得

$$F(x, u_0, \cdots, u_n) = \Phi_x + u_1\Phi_{u_0} + \cdots + u_n\Phi_{u_{n-1}}$$

对于变量 $x, u_0, \cdots, u_n$ 成为恒等. 因为某一 n 次可微函数 $\varphi(x)$，当且仅当

$$\Phi(x, \varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}) = \int f(x)\,dx$$

时，是方程(1)的解，所以全微分方程总可以化为较低阶的方程.

如果 $F(x, u_0, \cdots, u_n)$ 具有直到 n 阶为止的连续偏导数，并且如果要求 Φ 具有直到二阶为止的连续偏导数，则使得微分方程(1)是全微分方程的条件如下：假设

$$\Delta\Phi = \Phi_x + u_1\Phi_{u_0} + \cdots + u_n\Phi_{u_{n-1}},$$

$$\Delta_0 F = F_{u_n}, \quad \Delta_\nu F = F_{u_{n-\nu}} - \Delta\Delta_{\nu-1}F;$$

这时，函数 $\Delta_\nu F$ 应当与 u_n 无关，而 $\Delta_n F$ 应当等于 0，特别是，u_n 只能线性地包含在 F 当中.

15.2. 广义齐次方程. 设 $P(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 是整有理

函数，或者是形如 $ax^{\alpha}y^{\beta}y_1^{\beta_1},\cdots,y_n^{\beta_n}$ 的各项之和[1]. 微分方程

$$P(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

称为广义齐次方程，如果在适当选择不同时等于零的数 r 和 k 时，表达式

$$P(x^r, x^k, x^{k-r}, x^{k-2r}, \cdots, x^{k-nr})$$

中的各项具有相同的次数.

(a) $r\neq0$；这时可以认为 $r=1$. 经过变换

$$y(x)=|x|^k\eta(\xi),\ \xi=\ln|x|,$$

则化为不显含 ξ 的方程，因此(根据 15.3 节)是可降低阶数的方程.

(b) $r=0$；经过变换 $u(x)=\dfrac{y'}{y}$，则化为较低阶的方程.

15.3. 不显含 x 或 y 的方程.

(a) $F(y, y', \cdots, y^{(n)})=0$.

解 $y=y(x)$，当 $y'\neq0$ 时，存在反函数 $x=x(y)$，因此，$p(y)=y'(x(y))$ 是某一个 y 的函数，其次

$$y''(x)=pp',\ y'''=p^2p''+pp'^2,\cdots.$$

于是，此方程便化为对于 $p(y)$ 的 $n-1$ 阶方程. 如果 $p=\varphi(y)\neq0$ 是这个新方程的解，则从等式

$$x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}$$

可以得到原方程的解.

(b) $F(x, y', \cdots, y^{(n)})=0$. 假设 $p(x)=y'$，我们便得到 $n-1$ 阶方程

$$F(x, p, p', \cdots, p^{(n-1)})=0.$$

---

1) 也可与 4.7 节相比较.

第五章　n阶线性微分方程

§16．任意的n阶线性微分方程

16.1．一般注记． n 阶线性微分方程的一般形式可按下列方式写出：

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = f(x). \tag{1}$$

对于系数f_ν以及f，我们假设，在其自变量变化的某一个区域内，这些函数是连续的，或者是半纯的(见 18.1 节)；其次假设，或者$f_n \neq 0$，或者f_n只有孤立的零点．

如果$f(x)\equiv 0$，则微分方程称为齐次的；$f(x)$称为扰动函数．

如果$\psi(x)$是方程(1)的某一个解，当$\varphi(x)$为对应的齐次方程的通解时，则表达式$\psi(x)+\varphi(x)$即为方程(1)的通解．因为，根据 16.4 节，只须经过一次求积，便可由对应的齐次方程的解得到方程(1)的解，所以研究齐次方程非常重要．

利用§14中指出的变换，可将方程(1)化为一阶线性微分方程组．所以，从第三章关于线性微分方程组的定理，对于形如(1)的方程可以直接得出相应的定理．

16.2．存在和唯一性定理．解法． 如果在区间 $a<x<b$ 上函数$f_\nu(x)$和$f(x)$是连续的，并且如果$f_n \neq 0$，则对于每一组值$\xi, \eta_0, \cdots, \eta_{n-1}$，其中$a<\xi<b$，方程 (1) 存在一个且仅存在一个解 $y=\varphi(x)$满足初始条件

$$\varphi(\xi)=\eta_0,\ \varphi'(\xi)=\eta_1,\ \cdots,\ \varphi^{(n-1)}(\xi)=\eta_{n-1},$$

并且这个解是定义在整个区间 $a<x<b$ 上的.

从 5.3 节的定理,也可以得到更一般的存在定理.

关于解法,见 § 14,8.2节和 16.4 节,§ 18 以及 § 19.

有时也会用到下述简单原理. 我们用 $L(y)$ 表示方程(1)的左端;如果 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是方程

$$L(u_1)=f_1(x) \quad \text{和} \quad L(u_2)=f_2(x)$$

的解,则 u_1+u_2 是方程(1)的解,其中 $f=f_1+f_2$.

如果引入(比 22.2 节中的更一般的)微分算子

$$P(D)=\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) D^\nu, \text{其中 } D^\nu=\frac{d^\nu}{dx^\nu}, \tag{2}$$

则方程(1)可以写为下列形式:

$$P(D)y=f(x).$$

还可以引入更一般的算子 $Q(D)$,假设

$$Q(D)y=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} Q_\mu(x) D^\mu y, \tag{3}$$

其中 $Q_\mu(x)$ 是某些函数,并且对于自然数 k, 算子 D^{-k} 表示 k 重积分

$$D^{-k}y=I^k y=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x} y(x)\,dx^k=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}y(t)\,dt.$$

对于两个这种形式的算子 D 和 Q,表达式

$$P(D)Q(D)y=R(D)y$$

表示按下述步骤得到的函数,即如果首先建立函数 $Q(D)y$,然后将算子 $P(D)$ 作用于此函数.

为了求解微分方程(1),只须建立[1]算子(2)的逆算子 Q,即这样的算子(3),对于任一具有足够多阶导数的函数 $y(x)$,

---

1) I.M. Sheffer, *Tôhoku Math. Journ.* 39(1934), p. 299—315; L. Fantappié, *Memorie Accad. d'Italia* 1 (1930),№ 2.

能够使得

$$Q(D)P(D)y \equiv P(D)Q(D)y \equiv y \tag{4}$$

成立.

这时，显然可以得到下列形式的解：

$$y = Q(D)f(x). \tag{5}$$

将(2)和(3)代入恒等式(4)，我们得到对于 Q_μ 的方程，其中，当 $\mu \geqslant 1-n$ 时，应当假设 $Q_\mu = 0$. 这时，从等式(5)我们得到：

$$y = \int_{x_0}^{x} H(x, t) f(t) dt,$$

其中

$$H(x, t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} Q_{-\nu}(x) \frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

因而，这个方法符合于§19中所叙述的原理.

16.3. $n-1$ 阶导数的消去法. 如果$\frac{f_{n-1}}{f_n}$具有 $n-1$阶连续导数，并且如果假设

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int \frac{f_{n-1}}{f_n} dx\right),$$

那么，经过变换 $y = zu$，方程(1)则可化为方程

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}(zu) = f(x),$$

或者

$$\sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x) z^{(\nu)} = f(x),$$

其中 $F_{n-1} \equiv 0$，即方程中不再出现 $n-1$ 阶导数. 最后这个方程的解 ψ 同原方程(1)的解 φ 之间存在着关系式 $\varphi = \psi u$.

16.4. 化非齐次微分方程为齐次微分方程. 设 16.2 节

中提出的假设成立．如果 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 构成对应于非齐次方程(1)的齐次微分方程的基本解组，并且如果 $W_\nu(x)$ 表示由对应于此基本解组的朗斯基行列式 W（见 17.1 节）将其第 ν 列元素换为 $0,\cdots,0,f$ 而得到的行列式，则函数

$$\psi(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\int\frac{W_\nu(x)}{f_n(x)W(x)}dx$$

是方程(1)的解．因而，每一个线性微分方程，如果对应于它的齐次方程已经完全解出，则原则上可以认为是已解出了．

关于借助于齐次方程的基本解来求解微分方程，见 17.4 节．

16.5．对于大的 x 值解的性状[1]．设方程 (1) 中的系数 $f_\nu(x)$，$f(x)$ 对于一切 $x\geqslant x_0$ 是连续的，并且是实的；$f_n=1$，并且设当 $x\to\infty$ 时

$$f_\nu(x)\to a_\nu\ (\nu=0,1,\cdots,n-1),a_0\neq 0;\ f(x)\to a;$$

最后设"特征多项式"

$$\rho^n+a_{n-1}\rho^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{6}$$

所有的根都是实的，并且各不相同．这时，方程(1)存在着这样的解 $y(x)$，即当 $x\to\infty$ 时，

$$y\to\frac{a}{a_0},\quad y^{(\nu)}\to 0\quad(\nu=1,\cdots,n). \tag{7}$$

如果多项式(6)所有的根都是负的，则对于方程 (1) 的每一个解，(7)均成立．

§17．n 阶齐次线性微分方程

17.1．解的性质和存在定理． 从现在起，到 17.4 节止，

---

1)〔见§11 的文献．——俄译本编者注．〕

我们总是假设，在齐次微分方程

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} = 0 \tag{1}$$

中，函数 $f_\nu(x)$ 当 $a<x<b$ 时是连续的，并且 $f_n \neq 0$.

显然，$y=0$ 是任何形如 (1) 的方程的解. 我们将这个解称为平凡解，而将不恒等于零的解称为非平凡解.

如果已知方程(1)的 p 个解 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)$，则它们的每一个线性组合 $C_1\varphi_1+\cdots+C_p\varphi_p$（具有任意常系数 C_ν）也是解. 如果 $p>n$，则任何 p 个解线性相关，即存在着不全等于零的常数 C_ν，使得 $C_1\varphi_1+\cdots+C_p\varphi_p\equiv 0$.

对于每 n 个解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 和任何 $\xi(a<\xi<b)$，朗斯基行列式

$$W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) \cdots\cdots \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) \cdots\cdots \varphi_n'(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \cdots \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

等于

$$W(\varphi_1(\xi), \cdots, \varphi_n(\xi)) \exp\left(-\int_\xi^x \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\, dx\right)$$

[刘维尔公式. ——俄译本编者注.]因而，如果 $f_{n-1}\equiv 0$，则等于常数. 如果 n 个解线性无关，也就是说，如果其朗斯基行列式不等于零，我们就说，这 n 个解构成基本解组.

如果假设，讨论当中所遇到的朗斯基行列式处处不等于零，则方程(1)的左端可以写为"算子乘积"

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} = f_n \frac{W_n}{W_{n-1}} D \frac{W_{n-1}^2}{W_n W_{n-2}} \cdots D \frac{W_2^2}{W_3 W_1} D \frac{W_1^2}{W_2 W_0} D \frac{W_0}{W_1} y,$$

其中

$$D = \frac{d}{dx}, \quad W_0 = 1, \quad W_r = W(\varphi_1, \cdots, \varphi_r).$$

存在定理已在16.2节中叙述过了.

其次,基本解组总是存在;如果选取 n 组数

$$\eta_{\nu,0},\cdots,\eta_{\nu,n-1}\quad(\nu=1,\cdots,n),$$

使得 $\mathrm{Det}|\eta_{\nu p}|\neq 0$,并且当 ξ 取某个任意值($a<\xi<b$)时,对于每一个 ν,找出满足初始条件 $\varphi_\nu(\xi)=\eta_{\nu,0},\cdots,\varphi_\nu^{(n-1)}(\xi)=\eta_{\nu,n-1}$ 的解 φ_ν,便可得到基本解组.

由作为某一个基本解组各项的线性组合所能得到的一切函数,构成所有解的集合.

17.2. 微分方程的降阶法. 微分方程(1)在15.2节(b)的意义下是广义齐次方程,因而,经过变换 $y'=yu(x)$ 可将此方程化为阶数较低的方程,但是,一般说来,所得到的方程不是线性的.

如果已知方程(1)的某个解 $\varphi(x)$,则此方程可以化为较低阶的线性方程.也就是说,可以求出 $y=u(x)\cdot\varphi(x)$ 这种形式的解;这时,对于 $u(x)$,得到不包含函数 $u(x)$ 而只包含其导数的 n 阶线性微分方程;因而(15.3节),此方程可以化为 $n-1$ 阶线性微分方程.

达兰贝尔简化法只不过是上述方法的另一种形式而已:设 $\varphi_1(x)$ 是方程(1)的处处不为零的解.如果认为 y 是 x 的函数并且具有各阶导数,则

$$\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu(x)\,\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\varphi_1\int y\,dx\right)=0$$

是 $n-1$ 阶齐次线性方程.如果 $\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}$ 是此方程的基本解组,则函数

$$\varphi_1,\ \varphi_1\int\psi_1dx,\ \cdots,\ \varphi_1\int\psi_{n-1}dx$$

构成方程(1)的基本解组.如果对于方程(1),已知 $n-1$ 个解,在区间 $a<x<b$ 上其朗斯基行列式 $W(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})\neq 0$,

则对于任何 $C\neq 0$，$n-1$ 阶非齐次微分方程

$$W(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1},y)=C\exp\left(-\int\frac{f_{n-1}}{f_n}dx\right)$$

的每一个解都是方程(1)的积分，此积分同 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$ 一起，构成基本解组。

17.3. 关于解的零点. 设函数 f_ν 具有各阶导数. 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个非平凡解，x_1,x_2 是函数 $y_1(x)$ 的两个相邻的零点，而函数 $y_2(x)$ 在这两点不为零，则函数 $y_2(x)$ 以及 $y_1y_2'-y_1'y_2$ 在 x_1 和 x_2 之间具有奇数个零点（每一零点的个数认为同其重数是一样的）. 这就是 25.4 节(b)的零点交换定理的推广.

17.4. 基本解. 微分方程 (1)[1] 的基本解指的是定义在正方形域 $a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$ 上的具有下列性质的函数 $g(x,\xi)$：

(α) 在两个三角形域 $a\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b$ 和 $a\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b$ 中的每一个内(图 15)，$g(x,\xi)$ 具有对于 x 的直到 n 阶的偏导数，并且这些导数在每一个三角形域内，对于 x 和 ξ 是连续的；

(β) 在每一个三角形域内，$g(x,\xi)$(作为 x 的函数)满足方程(1)；

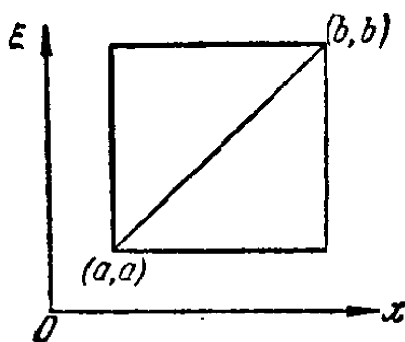


图 15

1) 在 17.1 节的开始叙述的假设，现在应当在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上成立. 应特别注意，在整个这个区间上 $f_n(x)\neq 0$.

(γ) 在整个正方形域 $a \leqslant x, \xi \leqslant b$ 内，$g(x,\xi)$是连续的，并且具有对于 x 的直到 $n-2$ 阶的偏导数，这些偏导数在此正方形域内对于 x 和 ξ 是连续的；

(δ) 当 $a<\xi<b$ 时[1)]

$$g_x^{(n-1)}(\xi+0,\xi)-g_x^{(n-1)}(\xi-0,\xi)=\frac{1}{f_n(\xi)}.$$

基本解总是存在的. 不难验证

$$g(x,\xi)=\frac{\operatorname{sign}(x-\xi)}{2f_n(\xi)W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(\xi)\cdots y_n(\xi)\\ y_1'(\xi)\cdots y_n'(\xi)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_1^{(n-2)}(\xi)\cdots y_n^{(n-2)}(\xi)\\ y_1(x)\cdots y_n(x)\end{vmatrix}$$

是基本解，其中 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 是方程 (1) 的某一个基本解组，而 $W(x)$ 是其朗斯基行列式.

这个特殊的基本解具有这种性质，即对于它来说，

$$g(\xi,\xi)=g_x'(\xi,\xi)=\cdots=g_x^{(n-2)}(\xi,\xi)=0.$$

公式

$$g(x,\xi)+C_1(\xi)y_1(x)+\cdots+C_n(\xi)y_n(x)$$

给出了基本解的集合，其中 $C_\nu(\xi)$是一些连续函数.

基本解之所以重要，是因为

$$y(x)=\int_a^b g(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

是非齐次方程 §16(1)的解.

17.5. 共轭的、自共轭的和反自共轭的微分型. 如果函数 $f_\nu(x)$具有 r_ν 阶和 s_ν 阶的导数，并且如果 $y(x)$具有直到 $\max(r_\nu+s_\nu)$ 阶为止的各阶导数，则可以建立微分型

1) 这里 $g_x^{(p)}$ 表示$\frac{\partial^p g}{\partial x^p}$. 某些作者将右端写为 $-\frac{1}{f_n(\xi)}$，即取函数 $-g(x,\xi)$ 作为基本解.

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}[f_\nu(x)\,y^{(r_\nu)}]^{(s_\nu)} \tag{2}$$

和

$$L^*(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{r_\nu+s_\nu}[f_\nu(x)\,y^{(s_\nu)}]^{(r_\nu)}. \tag{3}$$

第二个微分型 $L^*(y)$ 称为与第一个微分型是**共轭的**，而方程 $L^*(y)=0$ 称为与方程 $L(u)=0$ 是共轭的．显然，与 $L^*(y)$ 共轭的微分型仍为 $L(y)$．

如果所有的 $s_\nu=0$，则上述微分型具有特殊的形式

$$L_0(y)=\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu y^{(\nu)} \tag{4}$$

和

$$L_0^*(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(f_\nu y)^{(\nu)}. \tag{5}$$

如果微分型(2)中的每一个函数 f_ν 甚至具有 $(r_\nu+s_\nu)$ 阶的导数，那么借助于乘积的微分法则，L 则可化为 L_0 的形式（具有另一些 f_ν）；这时 $L^*(y)\equiv L_0^*(y)$，即共轭的微分型同原微分型的写法无关．

如果 $L^*(y)=L(y)$，则微分型 $L(y)$ 称为**自共轭的**，而如果 $L^*(y)=-L(y)$，则 $L(y)$ 称为**反自共轭的**．对于方程 $L(y)=0$，也可以相应地定义自共轭性和反自共轭性的概念．因此，自共轭微分型

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}[f_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)}$$

总是偶数阶的．反自共轭微分型

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}\{[f_\nu(x)\,y]^{(2\nu+1)}+f_\nu(x)\,y^{(2\nu+1)}\}$$

或者

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}\{[f_\nu(x)y^{(\nu)}]^{(\nu+1)}+[f_\nu(x)y^{(\nu+1)}]^{(\nu)}\}$$

总是奇数阶的.

自共轭微分方程在边值问题和特征值问题当中起着重要的作用(第二部分).

17.6. 拉格朗日恒等式；狄里克莱公式和格林公式. 如果$U(x)$和$V(x)$是s次连续可微函数，应用分部积分法则可得到

$$\int U^{(s)}V\,dx=(-1)^s\int UV^{(s)}dx+\sum_{p+q=s-1}(-1)^pU^{(q)}V^{(p)}.$$

如果假设$U=f_\nu u^{(r_\nu)}$，$V=v$，那么，对于微分型(2)，从这个公式可以得到狄里克莱公式

$$\int vL(u)\,dx=\int\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{s_\nu}f_\nu(x)u^{(r_\nu)}v^{(s_\nu)}\,dx+\mathscr{R}[u,v], \tag{6}$$

其中

$$\mathscr{R}[u,v]=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{p+q=s_\nu-1}(-1)^p[f_\nu u^{(r_\nu)}]^{(q)}v^{(p)}.$$

对于$\int uL^*(v)\,dx$可以得到相应的表达式. 从第一个表达式减去第二个表达式，我们得到

$$\int[vL(u)-uL^*(v)]dx=\mathscr{L}[u,v], \tag{7}$$

其中$\mathscr{L}$是双线性微分型

$$\mathscr{L}[u,v]=\sum_{\nu=0}^{m}\Big\{\sum_{p+q=s_\nu-1}(-1)^p(f_\nu u^{(r_\nu)})^{(q)}v^{(p)}-$$

$$-\sum_{p+q=r_\nu-1}(-1)^{r_\nu+s_\nu+p}(f_\nu v^{(s_\nu)})^{(q)}u^{(p)}\Big\}.$$

对 x 微分，我们得到拉格朗日恒等式

$$vL(u)-uL^*(v)=\frac{d}{dx}\mathscr{L}[u,v], \tag{8}$$

而用定积分代替不定积分，则得到格林公式

$$\int_a^b [vL(u)-uL^*(v)]dx=\mathscr{L}[u,v]\Big|_a^b. \tag{9}$$

对于特殊的微分型(4)，$\mathscr{L}$ 具有下列比较简单的形式：

$$\mathscr{L}[u,v]=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{p+q=\nu-1}(-1)^p u^{(q)}(f_\nu v)^{(p)}.$$

17.7. 关于共轭方程和全微分方程的解. 从(7)得知：如果已知共轭方程 $L^*(v)=0$ 的某一个解 $v(x)\neq 0$，则方程

$$L(y)=f(x) \tag{10}$$

的解可以从下列方程求得：

$$\mathscr{L}[y,v]=\int v(x)f(x)dx+C,$$

这个方程的阶数比原方程低.

特别是，如果 L 是形如(4)的微分型，并且

$$f_0-f_1'+f_2''-\cdots+(-1)^n f_n^{(n)}\equiv 0, \tag{11}$$

则方程(10)是全微分方程（见 15.1 节）. 如果将方程(10)的两端对于 x 积分，由于(11)，利用分部积分法在不知道函数 y 的情况下可以得到左端的积分；我们又得到对于 y 的较低阶的方程.

微分方程 $L_0(u)=f(x)$，如果乘以函数 $v(x)$ 后，则可化为全微分方程，当且仅当 $v(x)$ 满足共轭方程 $L_0^*(v)=0$ 时. 在这种情况下，v 将是给定微分方程的积分因子.

如果 $u_1,\cdots,u_n$ 是方程 $L_0(u)=0$ 的基本解组，而 $W(x)$ 是这个基本解组的朗斯基行列式，则

$$v_\nu = \frac{1}{f_n} \frac{\partial \ln |W|}{\partial u_\nu^{(n-1)}} \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

是 $L_0^*(v)=0$ 的基本解组，并且

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^{(k)} v_\nu = 0, \text{ 当 } k=0,1,\cdots,n-2 \text{ 时},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^{(n-1)} v_\nu = f_n .$$

§ 18. 具有奇点的齐次线性微分方程[1)]

18.1. 奇点的分类. 现在假设齐次线性方程

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} = 0 \tag{1}$$

的系数 $f_\nu(x)$ 在点 $x=\xi$ 的某一个邻域内是半纯的，即除了点 $x=\xi$ 可能是极点以外，没有任何奇点，此外，自然还要假设 $f_n(x)\not\equiv 0$ 和 $f_0(x)\not\equiv 0$. 用 $(x-\xi)^m$ 乘方程(1)，其中 m 为适当的整数，可以使得所有的 $f_\nu(x)$ 在点 ξ 是正则的，但是不都等于零. 这时，ξ 称为方程(1)的**正则点**还是**奇点**，取决于

是 $f_n(\xi)\neq 0$ 还是 $f_n(\xi)=0$.

于是，设 ξ 是正则点或者奇点. 进行上述运算以后，可以

---

1) [这里谈到的问题，在下列著作中有更详细的讨论: Ince; Coddington 和 Levinson; Tricomi; Еругин; Sansone; Whittaker 和 Watson; В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1968; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950; И. А. Лаппо-Данилевский, Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, 1957. ——俄译本编者注.]

认为

$$f_\nu(x)=(x-\xi)^{\alpha_\nu}h_\nu(x),\tag{2}$$

其中 α_ν 是非负整数，而 $h_\nu(\xi)\neq 0$，并且 $h_\nu(x)$ 在点 $x=\xi$ 的某一个邻域内是正则的，即可按 $(x-\xi)$ 的幂展开为通常的幂级数，其自由项为 $h_\nu(\xi)$. 试问方程(1)是否具有下列形式的解：

$$y=(x-\xi)^r\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu(x-\xi)^\mu\quad(c_0\neq 0);\tag{3}$$

这时，如果 r 不是整数，则 $(x-\xi)^r$ 表示这个函数的定义在复平面上的某一正则分支，此复平面为沿着由点 ξ 出发的某一条射线被剪开的平面（也可以利用函数 $(x-\xi)^r$ 的黎曼曲面来代替剪开的平面）.

为了使方程(1)存在形如(3)的解，r 必须是方程 $F(r)=0$ 的根，其中 $F(r)$ 表示在表达式

$$\sum_\nu C_r^\nu\nu!h_\nu(\xi)(x-\xi)^{\alpha_\nu-\nu}\tag{4}$$

中最低次项的系数. 方程 $F(r)=0$ 称为微分方程(1)在点 ξ 的**判定方程**，而每一个根称为这一点的**指数**. 如果点 ξ 是奇点，那么这一点称为**弱奇点**（正则奇点）还是**强奇点**（非正则奇点），取决于 $F(r)$ 是否具有 n 次幂.

当且仅当微分方程可以写为下列形式：

$$\sum_{\nu=0}^{n}(x-\xi)^\nu g_\nu(x)y^{(\nu)}=0,\tag{5}$$

其中所有的 $g_\nu(x)$ 在点 ξ 都是正则的并且 $g_n(\xi)\neq 0$ 时，点 ξ 是正则点或弱奇点[1). 在这种情况下，判定方程的左端具有下列形式：

1) 当每个函数 g_ν 包含因子 $(x-\xi)^{n-\nu}$ 时，点 ξ 是正则点；这时，可以用 $(x-\xi)^n$ 来除给定的微分方程。

$$F(r)=\sum_{\nu=0}^{n} C_r^{\nu}\nu!g_{\nu}(\xi). \tag{6}$$

当且仅当 $\alpha_{\nu}-\nu<\alpha_n-n$ 即使对于一个 ν 成立时，点 ξ 是强奇点. 在这种情况下，存在这样的数 ρ，$0\leqslant\rho<n$，使得

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_{\nu}-\nu>\alpha_{\rho}-\rho, & \text{当 } \rho<\nu\leqslant n \text{ 时},\\ \alpha_{\nu}-\nu\geqslant\alpha_{\rho}-\rho, & \text{当 } 0\leqslant\nu\leqslant\rho \text{ 时};\end{array}\right\} \tag{7}$$

判定方程具有 ρ 次幂；$n-\rho$ 称为奇点的级或特征指数. 在点 $x=\xi$ 的邻域内存在着不多于 ρ 个形如(3)的线性无关的解.

所有这些概念也可以用在点 $\xi=\infty$ 的情况. 函数 $f_{\nu}(x)$，如果它们$\neq 0$，对于所有的按模来说足够大的 x，可以表示为下列形式：

$$f_{\nu}(x)=x^{\alpha_{\nu}}h_{\nu}\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中所有的 $h_{\nu}(0)\neq 0$，并且所有的 $h_{\nu}(x)$ 在点 $x=0$ 是正则的. 由此可知，为了使方程(1)存在形如

$$y=x^{r}\sum_{\mu=0}^{\infty}c_{\mu}x^{-\mu} \quad (c_0\neq 0) \tag{8}$$

的解，r 必须是方程 $F(r)=0$ 的根，其中 $F(r)$ 表示在表达式

$$\sum_{\nu} C_r^{\nu}\nu!h_{\nu}(0)x^{\alpha_{\nu}-\nu} \tag{9}$$

中首项的系数.

无穷远点称为方程的正则点还是奇点，取决于点 $x^*=0$ 是由给定方程经过变换

$$y(x)=y^*(x^*),\ x^*=\frac{1}{x}$$

所得方程的正则点还是奇点. 同前面一样，可以根据表达式 $F(r)$ 的次数将奇点划分为弱奇点和强奇点. 当且仅当方程

可以写为下列形式时：

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} g_{\nu}\left(\frac{1}{x}\right) y^{(\nu)}=0 \quad (g_n(0)\neq 0),$$

无穷远点是正则点或弱奇点，其中 $g_\nu(x)$ 在点 $x=0$ 是正则的. 当且仅当对于某一个 ν，有 $\alpha_\nu-\nu>\alpha_n-n$ 时，无穷远点是强奇点. 这时，存在这样的数 ρ, $0\leqslant\rho<n$，使得当 $\rho<\nu\leqslant n$ 时，$\alpha_\nu-\nu<\alpha_\rho-\rho$，而当 $0\leqslant\nu\leqslant\rho$ 时，$\alpha_\nu-\nu\leqslant\alpha_\rho-\rho$；在这种情况下，数 $n-\rho$ 也称为奇点的级.

下列形式的微分方程称为富克斯型方程：

$$\sum_{\nu=0}^{n} P^{\nu} Q_\nu y^{(\nu)}=0,$$

其中

$$P=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m),$$

并且所有的 a_μ 是一些彼此不相等的数（实数或复数），Q_ν 是次数 $\leqslant(n-\nu)(m-1)$ 的多项式，而 $Q_n=1$. 对于这个方程，点 $x=\infty$ 只能或者是正则点或者是弱奇点. 显然，勒让德方程（第三部分，2.240）和超几何方程（第三部分，2.260）都属于这种类型. 对于贝塞耳方程（第三部分，2.162），点 $x=0$ 是弱奇点，而 $x=\infty$ 是强奇点.

18.2. 点 $x=\xi$ 是正则点或弱奇点的情况. 在这种情况下，根据 18.1 节，方程可以表示为形式(5)：

$$\sum_{\nu=0}^{n}(x-\xi)^{\nu} g_\nu(x) y^{(\nu)}=0,$$

并且每一个函数 $g_\nu(x)$ 可以写成幂级数的形式：

$$g_\nu(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)}(x-\xi)^{\mu}, \tag{10}$$

此级数在点 $x=\xi$ 的某一个确定的邻域内收敛；这时，$g_n(\xi)=a_0^{(n)}\neq 0$.

第一种解法. 设 r 是判定方程

$$F(r) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} C_r^\nu \nu! g_\nu(\xi) = 0 \quad (11)$$

的根.

将表达式

$$y = (x-\xi)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-\xi)^\nu \quad (12)$$

代入微分方程,并且使所有的 $(x-\xi)^k$ 的系数等于零, 得到

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu \sum_{\nu=0}^{n} C_{r+\mu}^\nu \nu! \ a_{k-\mu}^{(\nu)} = 0 \quad (k=0,1,2,\cdots). \quad (13)$$

只要判定方程没有同 r 相差为整数的解, 那么任意选取 $c_0 \neq 0$, 则可由(13) 唯一地逐个确定所有的 c_μ. 如果存在同 r 相差为整数的指数,那么将所有彼此相差为整数的数指中"最大者"取作为 r, 即取这样的 r 使得数 $r+1, r+2, \cdots$ 中的任何一个都不会是指数, 则可以算出 c_μ.[1] 这样求出的 c_μ 值的级数(12),在使所有 g_ν 为正则的并且 $g_n \neq 0$ 的每一个圆内收敛, 并且在每一个这样的(沿着由ξ出发的射线剪开的)圆内, 是给定的微分方程(5)的解.

如果存在着若干个彼此相差为整数的指数, 比如说 $r_1, \cdots, r_m$, 那么利用刚才求出的解,按照 17.2 节中叙述过的, 方程(5)的阶数可以降低,以后,又可以重新采用同样的方法.

如果 r_ν"按减少的次序"排列, 即使得 $r_1 - r_2 \geqslant 0, \cdots, r_{m-1} - r_m \geqslant 0$,这样则可得到下列形式的独立解组:

$$y_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\mu} (x-\xi)^{r_\varkappa} \varphi_{\mu,\mu-\varkappa}(x) \ln^{\mu-\varkappa}(x-\xi) \ (\mu=1,\cdots m,), \quad (14)$$

其中所有的 φ 都是在点 ξ 为正则的函数.

如果 ξ 是方程的正则点,则解不包含对数项,即使在指数

1) 这样仔细地叙述是必要的, 因为 r 可能是复数。

是 $r=0,1,\cdots,n-1$，因而所有指数彼此相差为整数的情况，也是如此。尤其是在这种情况下，每一个解可以在点 ξ 附近展开为幂级数

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}(x-\xi)^{\nu}.$$

第二种解法（弗罗比尼乌斯）· 同上述方法的区别在于，当建立级数(12)时，不是从预先求出的判定方程(11)的根 r 出发。这个方法的优点是：不要求利用简化方法，并且比较容易看清解的形式。为了写法简单，我们认为 $\xi=0$.

设在圆 $|x|<\rho$ 内，函数 $g_{\nu}(x)$ 是正则的，并且 $g_n(x)\neq 0$.

假设

$$F(r)=\sum_{\nu=0}^{n}C_r^{\nu}\nu!g_{\nu}(0), \tag{15}$$

$$c_0(r)=c(r)F(r+1)\cdots F(r+N), \tag{16}$$

其中 $c(r)$ 是解析函数，在多项式 $F(r)$ 每一个根的某一个确定的邻域内是正则的并且不等于零，N 是多项式 $F(r)$ 的各对根之间一切整数差中最大者（如果这些差之中没有一个是整数，则 $c_0=c(r)$）.其次，由下列关系式确定 $c_k=c_k(r)$:

$$\left.\begin{aligned}&c_1F(r+1)+c_0F(r)=0,\\&c_2F(r+2)+c_1F_1(r+1)+c_0F_2(r)=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中

$$F_k(r)=\sum_{\nu=0}^{n}C_r^{\nu}\nu!a_k^{(\nu)}. \tag{18}$$

最后，设

$$y(x,r)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k(r)x^k, \tag{19}$$

$$y_p(x,r)=\frac{\partial^p}{\partial r^p}y(x,r); \tag{20}$$

这些级数当$|x|<\rho$时收敛．如果r_1是多项式$F(r)$的根，并且如果$r_1,\cdots,r_m$(当$p<q$时，$r_p-r_q\geqslant 0$)是此多项式的根中同r_1相差为整数的那些根，则表达式

$$y_{p-1}(x,\ r_p)=x^{r_p}\sum_{q=0}^{p-1}\ C_{p-1}^q\ \ln^{p-q-1}x\sum_{k=0}^{\infty}\ c_k^{(q)}(r_p)x^k \quad (21)$$

是一组线性无关的解．如果对于方程$F(r)=0$所有的根都这样做，则得到基本解组．解(21)也可以写为下列形式：

$$y_{p-1}(x,\ r_p)=\sum_{q=0}^{p-1}x^{r_{q+1}}\ln^{p-q-1}x\ \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{k,\ q}x^k. \quad (22)$$

18.3．点$x=\infty$是正则点或弱奇点的情况．在这种情况下，根据18.1节，方程可以写为下列形式：

$$\sum_{\nu=0}^{n}x^{\nu}g_{\nu}\left(\frac{1}{x}\right)y^{(\nu)}=0.$$

其中所有的$g_\nu(x)$在$x=0$的某一个邻域内是正则的，并且$g_n(0)\neq 0$．

在无穷远点的邻域内，即对于足够大的$|x|$值研究这个方程，就相当于当$\xi=0$时在点$x=\xi$的邻域内来研究方程(5)．只是需要在方程(10)和(11)中假设$\xi=0$，这时从(12)和(13)得到：

$$y=x^r\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^{-\nu}, \quad (12\text{ a})$$

$$\sum_{\mu=0}^{k}c_\mu\sum_{\nu=0}^{n}C_{r-\mu}^{\nu}\ \nu!a_{k-\mu}^{(\nu)}=0 \quad (k=0,1,2,\cdots). \quad (13\text{ a})$$

应当把指数中“最小者”取作为r，即取这样的r，使得数$r-1,r-2,\cdots$中任何一个都不会是指数．如果函数$g_\nu(x)$当$|x|<\rho$时是正则的，并且$g_n(x)\neq 0$，则级数(12 a)当$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时收敛．数r_ν应当“按增大的次序”排列，即使得$r_1-r_2\leqslant 0$，

$\cdots r_{m-1}-r_m \leqslant 0$。这时由(14)给出：

$$y_\mu=\sum_{\varkappa=1}^{\mu} x^{r_\varkappa}\varphi_{\mu,\mu-\varkappa}\left(\frac{1}{x}\right)\ln^{\mu-\varkappa}x, \tag{14 a}$$

其中所有的 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 都是正则的。

采用第二种解法时，在(17)中应当用 $F(r-g)$ 代替 $F(r+g)$，而在(19)，(21)，(22)中应当用 x^{-k} 代替 x^k，此外，还应当有 $r_p-r_q\leqslant 0$。

18.4. 点 $x=\xi$ 是强奇点的情况. 在这种情况下，根据18.1节，方程可以化为下列形式：

$$\sum_{\nu=0}^{n}(x-\xi)^{\alpha_\nu}h_\nu(x)y^{(\nu)}=0,$$

其中 α_ν 是整数，并且所有的 $h_\nu(x)$ 在点 $x=\xi$ 的某一个邻域内是正则的，$h_n(\xi)\neq 0$，$h_0(\xi)\neq 0$，而对于所有其他的 ν，或者 $h_\nu(x)\equiv 0$，或者 $h_\nu(\xi)\neq 0$。这时还要求，至少对于一个使得 $h_\nu(\xi)\neq 0$ 的 ν，条件 $\alpha_\nu-\nu<\alpha_n-n$ 成立。

如果借助于变换

$$y(x)=y^*(x^*),\quad x^*=\frac{1}{x-\xi}$$

将奇点 ξ 化为无穷远点，则方程的研究可以变得更为清晰。

存在形如(3)的解的必要条件是：至少对于一个使得 $h_\nu(\xi)\neq 0$ 的 ν，有 $\alpha_\nu-\nu\leqslant\alpha_0$。

如果 $\alpha_n<n$，则至少存在 $n-\alpha_n$ 个形如(3)的线性无关的解，这些解在 $x=\xi$ 的某一个邻域内收敛。如果系数 $f_\nu(x)$ 在复平面上的区域 G 内是正则的，并且如果 f_n 在 G 内具有 s 个零点(每一零点的个数认为同其重数是一样的，即 k 重零点看作是 k 个零点，下同)，则(1)至少具有 $n-s$ 个在区域 G 内为正则的解。

如果

$$k = \max_{\nu=0,\ldots,n-1} \left(\frac{\alpha_n - \alpha_\nu}{n-\nu} - 1 \right),$$

则在点 ξ 的足够小的邻域 $x-\xi=|x-\xi|e^{i\vartheta}$ 内，对于每一个 ϑ 区间和对于每一个解 y，在适当地选取常数 $K>0$ 时，有

$$|y| < e^{K|x-\xi|^{-k}}.$$

这种情况的直接分析见 Ince，第 17 章. 也可以参阅 O. Perron, *Math. Ann.* **70**(1911), p. 1—32; *Math. Zeitschrift* **3**(1919), p. 161—171; E. Hilb, *Math. Ann.* **82**(1921), p. 40.

18.5. 点 $x=\infty$ 是强奇点的情况. 在这种情况下，根据 18.1 节，方程可以化为下列形式：

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\alpha_\nu} h_\nu\left(\frac{1}{x}\right) y^{(\nu)} = 0,$$

其中 α_ν 是一些整数，所有的 $h_\nu(x)$ 在点 $x=0$ 的某一个邻域内都是正则的，$h_n(0)\neq 0$，$h_0(0)\neq 0$，而对于所有其他的 ν 值，或者 $h_\nu(x)\equiv 0$，或者 $h_\nu(0)\neq 0$. 这时，还应当至少对于一个使得 $h_\nu(0)\neq 0$ 的 ν 有 $\alpha_\nu-\nu>\alpha_n-n$. 下面我们只是考虑使得最后这个不等式成立的那些 ν 值.

存在形如

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k} \quad (c_0\neq 0) \tag{23}$$

的解的必要条件是：至少对于一个 $\nu\geqslant 1$，有 $\alpha_\nu-\nu\geqslant\alpha_0$. 但是，这个条件不是充分的，正如下列例子表明的那样：

$$x^2y'' + ax^2y' + by = 0,$$

对于这个方程，虽然可以算出相应的 c_k 值，但是级数 (23) 是发散的.

为了使得可以表示为标准级数 $y=e^{P(x)}x^r\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{-k}$ 形

式的解存在[1]，这里 $P(x)$ 是 p 次多项式，则下述条件必须成立：对于某一个 $\nu\geqslant 1$, $\alpha_\nu+\nu(p-1)\geqslant\alpha_0$,并且如果 $p>1$,则对于某一个 $\nu(1\leqslant\nu<n)$, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_n$. 如果 $p>1$, 则对于 p 存在下列估值：

$$1+\min_{0<\nu\leqslant n}\frac{\alpha_0-\alpha_\nu}{\nu}\leqslant p\leqslant 1+\max_{1\leqslant\nu<n}\frac{\alpha_\nu-\alpha_n}{n-\nu};$$

右端的数称为微分方程的秩. 为了实际建立标准级数，可以取某个预先不确定的多项式,作变换

$$y=u(x)\exp P$$

然后选择多项式 P 的系数,使得所得到的对 u 的微分方程具有判定方程. 最后,将表达式

$$u=x^r\sum c_\nu x^{-\nu}$$

代入此方程. 这时得到的级数(如果它不中断)即使是发散的——常常如此,则在 $p=1$ 的所有情况下,此级数给出了 y 的渐近展开式;关于这一点,见 § 20.

18.6. 具有多项式系数的微分方程.

(a) 设已给方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)y^{(\nu)}=0,$$

其中 $P_\nu(x)$是多项式,每一个多项式 P_ν 的次数都不超过多项式 P_n 的次数. 这时,此方程(除了无穷远点以外)只具有正则点或弱奇点 $a_1,\cdots,a_m$,并且对于每一个弱奇点来说,所有的指数都是整数.

如果这个微分方程只有这样一些解，这些解是在整个复平面上的单值函数,则存在由形如 $e^{\lambda x}R(x)$ 的解所构成的基

1) [这样的解称为标准解.详见 Ince.——俄译本编者注.]

本解组，其中 R 是有理函数[1]。

(b) 设在方程

$$P(x)y^{(n+1)}+\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)y^{(\nu)}=0$$

中，P 表示 n 次多项式，每一个 P_ν 都是次数 $\leqslant\nu$ 的多项式. 如果对于某一个整数 $m\geqslant 0$，表达式

$$g(m)=\sum_{\mu=0}^{n}C_m^\mu P_\mu^{(\mu)}$$

等于零，则在此方程的解当中至少有一个是多项式. 如果对于所有的非负整数 m, $g(m)\neq 0$, 则在方程(b)的解当中有且仅有一个整(超越)函数[2].

18.7. 具有周期系数的微分方程[3]. 设在方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu(x)y^{(\nu)}=0 \tag{24}$$

中，系数 $f_\nu(x)$ 是在整个复平面上具有公共周期 ω 的一些半纯函数，其中 $f_n(x)\not\equiv 0$，并且设这个方程的解都是单值函数[4]. 这时，此方程至少具有一个解 $\varphi(x)\not\equiv 0$，使得

$$\varphi(x+\omega)=s\varphi(x),$$

其中 s 是某一个常数；在这种情况下，函数 $\varphi(x)$ 称为第二类周期函数；由等式 $s=\exp\alpha\omega$ 确定的数 α 称为这个解的**特征指**

---

1) K Yosida, *Japanese Journal of Math.* **9**(1933), p.231 以及以后.

2) 关于这种类型的定理见22.5节，也见 J. M. Sheffer, *Transactions Americ. Math. Soc.*, **35**(1933), p. 184—214.

3) [见 Ince; Матвеев; Sansone; Coddington 和 Levinson; Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950; Э. Гурса, Курс математического анализа, 卷, II, 1936.——俄译本编者注.]

4) 会发生这种情况，例如，如果 $f_1=1$，而函数 f_ν 是正则的；试与马提厄方程(第三部分，2.22)和希尔方程(第三部分，2.30)相比较.

数；函数 $\psi=\varphi(x)\exp(-\alpha x)$ 是周期为 ω 的周期函数.

其次，存在着满足下述条件的基本解组：如果 $s_1, \cdots, s_r$ 是特征多项式[1)]

$$\operatorname{Det}|a_{p,q}-se_{p,q}| \tag{25}$$

的根，而 $k_1, \cdots, k_r$ 是这些根的重数，则有

$$\varphi_1(x+\omega)=s_1\varphi_1(x),\ \varphi_2(x+\omega)=s_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)],\ \cdots$$
$$\cdots,\ \varphi_{k_1}(x+\omega)=s_1[\varphi_{k_1-1}(x)+\varphi_{k_1}(x)].$$

对于其余的 s_ν，情况类似；这时，可以看出在某一些甚至所有的方括号内的第一项不存在(弗洛盖定理).

计算特征指数通常是有一定困难的.

如果 $n=2$，所讨论的方程具有下列形式：

$$y''=f(x)y, \tag{26}$$

其中 $f(x)$ 是周期为 ω 的周期函数，则对于上述情况还可以做如下补充[2)]：设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(26)的基本解组，并且

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0 \text{ 和 } y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1.$$

这个基本解组的朗斯基行列式 W 恒等于 1，行列式(25)中的

---

1) 如果 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 是某一个基本解组，则存在着这样的一些数 $a_{p,q}$，使得行列式 $|a_{p,q}|\neq 0$，并且

$$y_p(x+\omega)=\sum_{q=1}^{n} a_{p,q}y_q(x) \quad (p=1,\cdots,n). \tag{*}$$

公式(25)中的数 $a_{p,q}$ 由条件(*)来确定.

2) 可以考虑更一般的方程

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0,$$

其中 f 和 g 是具有同样周期的周期函数. 在这种情况下特征方程具有下列形式：

$$s^2-[y_1(\omega)+y_2'(\omega)]s+W(\omega)=0,$$

其中

$$W(\omega)=\exp\left\{-\int_0^{\omega} f(x)dx\right\}.$$

见 G. Calamai, *Atti Accad. Italia* (7), 3(1942), p. 183—193.

数 $a_{p,q}$ 等于

$$a_{1,1}=y_1(\omega),\ a_{1,2}=y_1'(\omega)\ \ a_{2,1}=y_2(\omega),\ a_{2,2}=y_2'(\omega)$$

并且利用第八章中叙述的近似方法可以算出来（具有任意的精确度）。使行列式（25）等于零并且利用等式 $W=1$，对于 s 得到方程

$$s^2-[y_1(\omega)+y_2'(\omega)]s+1=0$$

或者对于特征指数 $\pm\alpha$ 得到方程

$$\operatorname{ch}\ \alpha\omega=\cos i\alpha\omega=\frac{y_1(\omega)+y_2'(\omega)}{2}. \tag{27}$$

如果 $f(x)$ 是偶函数，则(27)具有比较简单的形式

$$\operatorname{ch}\ \alpha\omega=\cos\ i\alpha\omega=y_1(\omega). \tag{28}$$

18.8. 具有双周期系数的微分方程[1]. 现在设方程(24)中的系数 $f_\nu(x)$ 是椭圆函数，即复变量 x 的双周期半纯函数，其周期为 ω_1 和 ω_2. 如果所讨论的方程的解是单值函数，并且只具有孤立奇点，则存在这样的解 $\varphi(x)\neq0$，在适当选择常数 s_1 和 s_2 时，有

$$\varphi(x+\omega_1)=s_1\varphi(x)\ 和\ \varphi\ (x+\omega_2)=s_2\varphi(x)$$

（见 18.7 节）。如果所讨论的微分方程所有的解都是半纯的，则 φ 可以表示为下列形式：

$$\varphi(x)=e^{\lambda x}\frac{\sigma(x-a)}{\sigma(x)}\Phi(x), \tag{29}$$

其中 $\Phi(x)$ 是具有周期 ω_1 和 ω_2 的椭圆函数，而 σ 是外尔斯特拉斯函数：

$$\sigma(x)=x\prod_{k^2+l^2>0}\left(1-\frac{x}{k\omega_1+l\omega_2}\right)\exp\left[\frac{x}{k\omega_1+l\omega_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{k\omega_1+l\omega_2}\right)^2\right],$$

---

1) 见 Ince, p. 375 和以后。

对于这个函数，点 $k\omega_1+k\omega_2$ 是一阶零点；a 和 λ 是方程组

$$\omega_1\lambda-\eta_1 a=\ln s_1,\quad \omega_2\lambda-\eta_2 a=\ln s_2$$

的解，数 $\eta_\nu(\nu=1,2)$ 由等式

$$\sigma(x+\omega_\nu)=-\sigma(x)\exp\left(x+\frac{1}{2}\omega_\nu\right)\eta_\nu$$

来确定.

如果 $n=2$，则所讨论的方程具有这样的基本解组 φ_1,φ_2，使得

$$\varphi_1(x+\omega_1)=s_1\varphi_1(x),\quad \varphi_1(x+\omega_2)=s_2\varphi_1(x),$$
$$\varphi_2(x+\omega_1)=s_1\varphi_2(x)+t_1\varphi_1(x),$$
$$\varphi_2(x+\omega_2)=s_2\varphi_2(x)+t_2\varphi_1(x),$$

其中 $s_1\neq0,s_2\neq0,t_1,t_2$ 是两个确定的数. 如果 $t_1=t_2=0$，则又可以将 φ_2 表示为(29). 如果 $|t_1|+|t_2|>0$，则 φ_2 可以表示为

$$\varphi_2(x)=[A\zeta(x)+Bx+\Phi(x)]\varphi_1(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是某一个椭圆函数，$\zeta(x)=\dfrac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$，并且

$$A\eta_1+B\omega_1=\frac{t}{s_1},\quad A\eta_2+B\omega_2=\frac{t_2}{s_2}.$$

18.9. 实变量的情况. 设在方程

$$y^{(n)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}f_\nu(x)y^{(\nu)}=0$$

中，实变量 x 的函数 $f_\nu(x)$ 在开区间 $a<x<b$ 内都是连续的；其次，设当 $0\leqslant k\leqslant n$ 时，函数

$$f_{n-1},\cdots,f_{n-k},(x-a)f_{n-k-1},\cdots,(x-a)^{n-k}f_0$$

和这些函数的模在区间 $a\leqslant x<b$ 上是可积的. 这时，不论给出怎样的数 $\eta_k,\cdots,\eta_{n-1}$，给定的微分方程具有一个且仅有一个这样的解，使得当 $x\to a$ 时，这个解及其前 $k-1$ 阶导数均趋

向于零，而其后的 $n-k$ 阶导数这时则分别趋向于 $\eta_k, \cdots, \eta_{n-1}$；换句话说，存在着可以表示为下列形式的解：

$$y=\eta_k\frac{(x-a)^k}{k!}+\cdots+\eta_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+$$
$$+(x-a)^{n-1}\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 当 $a\leqslant x<b$ 时是连续的，并且 $\varphi(a)=0$。

§ 19. 利用定积分解线性微分方程[1]

19.1. 一般原理. 设给定线性方程

$$L_x(y)=f(x), \tag{1}$$

其中

$$L_x(y)=\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)y^{(\nu)}. \tag{2}$$

首先，假设 x 只取实数值. 其次，假设所有的 f_ν 当 $a<x<b$ 时是连续的（包括 $a=-\infty$, $b=+\infty$ 的情况）. 我们将试图寻找方程(1)具有下列形式的解：

$$y=\int_{\mathbf{K}} K(x,t)\varphi(t)\,dt; \tag{3}$$

这时：

1) ［例如，见 Ince；相近的问题在 Sansone 中讨论过. 以后用到的各种变换的详细理论研究见下列著作：И. Снеддон, Преобразование Фурье, 1955; Б. Ван дер Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, 1952. 也可以参阅 А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937; М. Л. Расулов, метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений, 1964. ——俄译本编者注.］

(a) $\mathbf{K}$ 是复平面 t 上的曲线[1]。

(b) $\varphi(t)$在曲线 $\mathbf{K}$ 的某一邻域 G 内是解析函数，并且不恒等于零[2]。

(c) $K(x, t)$，即积分核，是这样的函数，对于每一个固定的 $t \in G$，它是区间 $a<x<b$ 上的 n 次连续可微函数，并且如果 $K_x^{(\nu)}$ 表示对于 x 的 ν 阶导数，则每一个积分

$$\int_{\mathbf{K}} K_x^{(\nu)}(x, t)\varphi(t)\,dt \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n)$$

都存在，并且

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\int_{\mathbf{K}} K(x, t)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbf{K}} K_x^{(\nu)}(x, t)\varphi(t)\,dt.$$

把(3)代入方程(1)，我们得到

$$L_x(y) = \int_{\mathbf{K}} L_x(K)\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

其次，设

(d) $M_t(u) = \sum_{\nu=0}^{m} g_\nu(t) u^{(\nu)}(t)$ 是线性微分型，其系数 $g_\nu(t)$在区域 G 内是解析的[3]；

(e) 存在这样的函数 $K_1(x, t)$，当 x 取区间 $a<x<b$ 中的每一个固定值时，函数 $K_1(x, t)$对于 t 是正则的，并且对于此函数有

$$L_x(K) = M_t(K_1). \tag{5}$$

---

1) 曲线 $\mathbf{K}$ 应当满足函数论中保证相应的积分存在的通常条件。这条曲线也可以是封闭的。这条曲线可以同实轴或实轴的一段相重合；在此情况下，我们将不超出实变量的范围。

2) 如果 $\mathbf{K}$ 是实轴的一段，则可以假设 $G=\mathbf{K}$；在这种情况下，对于 $\varphi(t)$只要求存在前 n 阶连续导数就够了。

3) 如果 $\mathbf{K}$ 是实轴的一段，则可以假设 $G=\mathbf{K}$。

如果 $M_t^*(v)$是同 $M_t(u)$共轭的微分型，而$\mathscr{M}_t[u, v]$是相应的双线性微分型（见 17.5 节和 17.6 节），由于拉格朗日恒等式以及等式(4)和(5)，则有

$$L_x(y) = \int_{\mathbf{K}} K_1(x, t)\ M_t^*(\varphi)dt + \int_{\mathbf{K}} \frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]dt. \tag{6}$$

如果 $\varphi(t)$是方程

$$M_t^*(v)=0 \tag{7}$$

的解，则函数(3)是方程(1)的解，如果

$$\int_{\mathbf{K}} \frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]dt = f(x). \tag{8}$$

这种解法的基本步骤是：建立恒等式(5)，求出所谓变换方程(7)的解并且实现等式(8)。

对于这个非常一般非常重要的原理还必须作下列注记：

(α) 显然，这种方法也可以应用于复变量 x 的情况。

(β) 这种方法也可以用来求数值解，因为积分(3)可以利用大家熟知的近似方法来计算。

(γ) 常常利用下列积分核：

$K = e^{xt}$　　(拉普拉斯)

$K = k(x\cdot t)$　　(梅林)

$K = (x-t)^{\alpha}$　　(欧拉)

(δ) 如果利用方程(7)的几个解 φ_h 和几条积分路线 $\mathbf{K}_h$，那么这种方法的应用，特别是选择满足条件 (8) 的函数，有时可以简化。

这时则寻找下列形式的解：

$$y = \sum_h C_h \int_{\mathbf{K}_h} K(x, t)\varphi_h(t)dt. \tag{9}$$

(ε) 如果 **K** 是某一条端点为 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 的曲线，并且在表达式(8)中积分号下的所有函数都是单值的，则条件 (8) 可以具有下列形式：

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]_{t=\alpha}^{t=\beta}=f(x). \tag{10}$$

如果在(8)中积分号下的函数不是单值的，则此函数在点 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 应取的值，乃是当我们注意到函数值在相应的黎曼曲面上沿 **K** 运动而发生变化时所得到的那些数值.

(ζ) 如果$f\equiv 0$，那么当我们把某一条封闭曲线取作为 **K** 时，条件(8)显然成立. 但是，这时 **K** 应当包围着函数$K(x, t)$ 或 $\varphi(t)$的某一个奇点，因为否则，如果处于(3) 中积分号下的函数是单值的，根据柯西定理，这个积分将等于零. 如果函数 K_1 或 φ 之中即使有一个不是单值的，则必须注意：当函数 $\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]$在相应的黎曼曲面上取值时，这个函数沿着 **K** 绕一周以后应当返回到自己原来的数值.

(η) 在$f\equiv 0$ 的情况下，同在(ε)中一样，我们把即使有一个端点在有限点 α 的非封闭曲线取作为 **K**；这时，如果我们希望满足条件(10)，使得 $\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]$在曲线 **K** 的端点等于零，则点 α 应当是方程(7)的奇点. 实际上，根据 17.6 节，

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]=\sum_{q=0}^{m-1} K_{1(t)}^{(q)} \sum_{p=0}^{m-q-1}(-1)^p(g_{p+q+1}\varphi)^{(p)},$$

其中 $K_{1(t)}^{(q)}$ 表示 K_1 对于 t 的 q 阶导数. 如果这些导数中的每一个的确都依赖于 x，则恒等式

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]|_{t=\alpha}\equiv 0$$

只是在下列情况下才能成立：当 $t=\alpha$ 和 $q=0,1,\cdots,m-1$ 时，有

$$\sum_{p=0}^{m-q-1}(-1)^p(g_{p+q+1}\varphi)^{(p)}\equiv 0.$$

如果 $g_m(\alpha)\neq 0$，则应当有 $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\cdots=\varphi^{(m-1)}(\alpha)=$

$=0$,因而 $\varphi(t)\equiv 0$,这与(b)相矛盾.

19.2. 拉普拉斯变换. 我们首先考虑方程

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) y^{(\nu)} = 0, \tag{11}$$

其中

$$P_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu,\mu} x^\mu \tag{12}$$

是给定的多项式[1]. 因而,如果采用 19.1 节的表示法,则有

$$L_x(y) = \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) y^{(\nu)}, \tag{13}$$

并且需要假设

$$M_t(u) = \sum_{\mu=0}^{m} Q_\mu(t) u^{(\mu)}(t),$$

其中

$$Q_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,\mu} t^\nu. \tag{14}$$

这时

$$L_x(e^{xt}) = M_t(e^{xt}),$$

即当 $K=K_1=e^{xt}$ 时条件(5)成立. 所以

$$y = \int_{\mathbf{K}} e^{xt} \varphi(t)\, dt \tag{15}$$

是方程(11)的解,如果 $\varphi(t)$ 满足方程

$$M_t^*(v)=0, \text{其中} M_t^*(v) = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu (Q_\mu v)^{(\mu)}. \tag{16}$$

此方程称为方程(11)的拉普拉斯变换(L-变换),此外,如果

---

1) 这些多项式不必全都具有同样的次幂.

$$\int_{\mathbf{K}} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p+q=k} (-1)^p (Q_{k+1}\varphi)^{(p)} x^q e^{xt} dt = 0. \tag{17}$$

(A) $a_{n,m} \neq 0$(当然 $m \geqslant 1, n \geqslant 1$). 可以看出，方程(16)在某一个奇点 τ 附近具有解[1]

$$\varphi(t) = (t-\tau)^r \psi(t-\tau), \tag{18}$$

其中 $r \geqslant 0$，并且不是整数，函数 $\psi(t-\tau)$ 在点 τ 是正则的 (图 16)，而 $(t-\tau)^r$ 要作这样的规定，使得这个函数在沿着射线

$$t = \tau + \rho e^{i\alpha} \quad (0 < \rho < +\infty) \tag{s}$$

剪开的 t 平面上是单值的和正则的(如果 r 是整数，则不需要剪开)。如果除了 τ 以外，在射线(s)上还出现了某些奇点，那么将射线 (s) 略微变动一下则可以绕过这些奇点. 这时，可以将函数 (18) 解析地延拓，使得这个函数在剪口 (s) 两边的某一个带域内是正则的，并且满足方程 (16). 如果将绕过射线(s)并处于相应带域内的某一条曲线取作为积分路线 $\mathbf{K}$，则条件(17)成立，因而，对于处在角

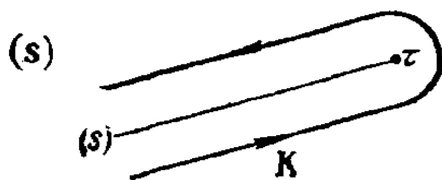


图 16

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \alpha + \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta \tag{19}$$

内并且绝对值足够大的一切 x 来说，(15)将是原方程的解. 如果转换到相应于函数 $(t-\tau)^r$ 的黎曼曲面上去，则可将图 17 所示的由射线 (s) 的一段加上圆心在 τ 的圆周以及与上述射线 (s) 相应的那一段所组成的闭路取作



图 17

1) 例如，如果 τ 是方程(16)的弱奇点，即如果 $Q_m(t)$ 没有重根时，就会发生这种情况；提出 r 不等于任何非负整数这个条件，为的是排除 $y=0$ 的可能性.

K.

如果 r 是负整数，$N=-r-1$，并且

$$\psi=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(t-\tau)^\nu, \tag{20}$$

则积分(15)等于

$$y=2\pi ie^{\tau x}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{c_\nu}{(N-\nu)!\,x^{N-\nu}}.$$

对于非整数 r 的情况，也可以参阅 20.1 节.

(B) $a_{n,m}\neq 0$，并且 $m<n$. 这时，可对情况(A)中所讲过的作如下补充. 假设多项式 $Q_m(t)$的根 $\tau_1,\cdots,\tau_m$ 各不相同；对于每一个 τ_ν，可以相应地确定方程(16)的解

$$\varphi_\nu(t)=(t-\tau_\nu)^{r_\nu}\psi_\nu(t-\tau_\nu) \tag{18 a}$$

(r_ν是非负分数). 我们把包围着点 τ_ν 但不包围其他任何一个点 τ_μ 并且通过某一个任意选取的点 τ_0 的简单封闭曲线，取作为 $\mathbf{K}_\nu$ (图 18). 解(18 a) 中的每一个可以沿着这样的闭路 **K** 解析延拓. 这时

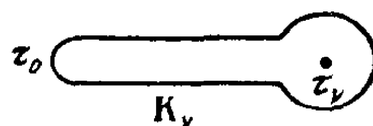


图 18

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\int_{\mathbf{K}_\nu}e^{xt}\varphi_\nu(t)\,dt \tag{21}$$

是方程(11)的解，如果

$$\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu[\varphi_{\nu*}^{(\mu)}(\tau_0)-\varphi_\nu^{(\mu)}(\tau_0)]=0\quad(\mu=0,1,\cdots,m-1). \tag{22}$$

这里 $\varphi_{\nu*}(\tau_0)$ 是函数 φ_ν 沿着闭路$\mathbf{K}_\nu$ 绕一周以后所得到的值. 因为 $m<n$，所以 m 个方程 (22) 的确具有某一个非零解 $C_1,\cdots,C_n$.

在某些情况下($r_\nu>-1$)，沿闭路的积分可以用沿 τ_0 和 τ_ν 之间或 τ_ν 本身之间的某一条简单路线的积分来代替.

(C) 现在设给定微分方程

$$y^{(n)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}x^{(n-\nu)(k-1)}P_\nu(x)y^{(\nu)}=0,$$

其中

$$P_\nu=a_{\nu,0}+\frac{a_{\nu,1}}{x}+\frac{a_{\nu,2}}{x^2}+\cdots \quad (\nu=0,1,\cdots,n-1),$$

并且对于所有的按模来说足够大的 x，这些级数是收敛的．在这种情况下，点 $x=\infty$ 是强奇点，并且阶数为 k．经过变换

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \xi=x^k$$

可将此方程化为下列形式的方程：

$$\eta^{(n)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}Q_\nu(\xi)\eta^{(\nu)}=0,$$

其中级数

$$Q_\nu=b_{\nu,0}+b_{\nu,1}\,\xi^{-\frac{1}{k}}+b_{\nu,2}\xi^{-\frac{2}{k}}+\cdots$$

对于所有足够大的 $|\xi|$ 是收敛的．对于这些方程，也可以利用拉普拉斯变换．

19.3．特殊的拉普拉斯变换．现在将整个正实半轴取作为积分路线．如果某一个函数 $y(x)$ 对于所有实数 $x\geqslant 0$ 是连续的，则函数

$$Y(t)=\int_0^\infty e^{-xt}y(x)\,dx \tag{23}$$

称为函数 $y(x)$ 的 L-变换，其条件是：此积分对于某一个(实的或复的) $t=t_0$ 是收敛的．如果积分(23)当 $t=t_0$ 时收敛，则此积分在整个复半平面 $\Re t>\Re t_0$ 上也收敛，因而这里就定义了某一个函数 $Y(t)$，这个函数的各阶导数都存在，并且可以由下列公式来表示：

$$Y^{(n)}(t)=(-1)^n\int_0^\infty e^{-xt}x^n y(x)\,dx. \qquad (23\,\mathrm{a})$$

按分部积分法，我们得到：如果函数 $y(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时具有 n 阶连续导数，并且第 n 阶导数 $y^{(n)}$ 满足上面对于 y 所加的那些条件，即如果对于 $y^{(n)}$ 来说，其 L-变换存在，则这个 L-变换具有下列形式：

$$\int_0^\infty e^{-xt}y^{(n)}(x)\,dx=t^nY(t)-\sum_{\mu=0}^{n-1}t^{n-\mu-1}y^{(\mu)}(0). \qquad (24)$$

现在假设，需要求常系数线性方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu y^{(\nu)}=f(x) \quad (\text{包括 } f\equiv 0 \text{ 的情况}) \qquad (25)$$

满足初始条件

$$y(0)=\eta_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=\eta_{n-1}$$

的解。如果已经假定，对于函数 $f(x)$ 和 $y^{(n)}(x)$ 的 L-变换均存在，那么，对方程(25)的两端应用拉普拉斯变换，并且由于(24)，则对于处在复半平面 $\Re t>\Re t_0$ 上的所有 t，得到下列方程：

$$Y(t)\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu t^\nu=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\sum_{\mu=0}^{\nu-1}t^{\nu-\mu-1}\eta_\mu+F(t),$$

其中

$$F(t)=\int_0^\infty e^{-xt}f(x)\,dx.$$

由此方程可以直接得到未知函数的 L-变换 $Y(t)$. 剩下的问题只是寻找一个 n 次连续可微函数 $y(x)$，使得 $Y(t)$ 为其 L-变换，最后，验证 $y^{(n)}$ 满足上述条件，或直接验证 $y(x)$ 是方程(25)的解。为了寻找对应于已知函数 $Y(t)$ 的函数

$y(x)$,除了一般的逆变换公式

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{xt}Y(t)dt$$

以外,还可以利用现有的一些详细的变换表[1].

当方程中的系数 a_ν 不是常数而是 x 的多项式时,也可以应用这种方法.这时,利用公式(23 a)以及由 (23 a)和 (24) 推出的方程

$$\int e^{-xt}x^m y^{(n)}(x)dx=$$

$$=(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left\{t^nY(t)-\sum_{\mu=0}^{n-1}t^{n-\mu-1}y^{(\mu)}(0)\right\},$$

便可得到对于 $Y(t)$的微分方程,其阶数等于在(25)中的 x 的最高次数.

19.4. 梅林变换. 已给方程

$$L_x(y)=0, \tag{26}$$

如果 L_x 具有下列形式:

$$L_x(y)=x^nF(xD_x)y+G(xD_x)y,$$

其中 $F(s)$和 $G(s)$是多项式,而 $D_x=\dfrac{d}{dx}$. 这时利用梅林核 $K(xt)$ 是适宜的. 如果$H(s)$是多项式并且 $K(s)$是方程

$$s^nF(xD_s)K(s)=H(sD_s)K(s)$$

的某一个解,则

$$L_x(K(xt))=M_t(K(st)),$$

---

1) [例如,见 Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа,1960;В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, 1951. Г. Бейтмен. А. Эрдейн, Таблицы интегральных преобразований, т.1,1969; т. II,1970. ——俄译本编者注.]

其中

$$M_t(u)=t^{-n}H(tD_t)u+G(tD_t)u$$

因而，根据 19.1 节，

$$y=\int_{\mathbf{K}}K(xt)\varphi(t)dt$$

是方程(26)的解，如果 $\varphi(t)$ 满足共轭方程

$$M_t^*(v)=0,$$

此外，如果

$$\int_{\mathbf{K}}\frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K,\ \varphi]dt=0.$$

19.5. 欧拉变换. 对于形如(11)的方程，当每一个 $P_\nu(x)$ 都是次数 $\leqslant\nu$ 的多项式，而 $P_n(x)$ 正好具有 n 次幂时，采用欧拉核

$$K(x,t)=(t-x)^a$$

是适宜的. 这样的方程可以表示为下列形式：

$$L_x(y)=0,$$

其中

$$L_x(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu y^{(\nu)}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu-\mu}Q_\mu^{(n-\nu-\mu)}(x); \quad (27)$$

这里 Q_μ 是次数 $\leqslant n-\mu$ 的多项式，k 是常数.

如果在(27)中实际上只包含多项式 $Q_0,\cdots,Q_p$，我们则假设

$$M_t(u)=\sum_{q=0}^{p}Q_{p-q}(t)u^{(q)}. \quad (28)$$

这时

$$L_x(K)=C_{k+n-1}^{n-p}(n-p)!M_t(K_1)$$

其中

$$K=(t-x)^{k+n-1},\quad K_1=(t-x)^{k+p-1}.$$

由此并根据 19.1 节，可以得知：

$$y=\int_{\mathbf{K}}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt \tag{29}$$

是方程(27)的解，如果 $\varphi(t)$ 满足方程

$$M_t^*(v)=0,\quad 其中 M_t^*(v)=\sum_{q=0}^{p}(-1)^q(Q_{p-q}v)^{(q)}. \tag{30}$$

此外，如果

$$\int_{\mathbf{K}}\frac{d}{dt}\sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\varkappa-1}(-1)^{\varkappa-\nu-1}u^{(\nu)}(Q_{p-\varkappa}\varphi)^{(\varkappa-\nu-1)}dt=0, \tag{31}$$

其中

$$u^{(\nu)}=\frac{d^\nu}{dt^\nu}(t-x)^{k+p-1}.$$

应当注意到 19.1 节中指出的积分号下微分的可能性，并且考虑到 $(t-x)^k$ 和 $\varphi(t)$ 可能是多值的，则必须在相应的黎曼曲面上来进行运算.

对于 $p=1$ 的情况的更详尽的研究，包含在 22.6 节中.

例. 顺便指出，勒让德方程(见第三部分，2.240)：

$$(x^2-1)y''+2xy'-\nu(\nu+1)y=0 \tag{32}$$

属于我们所讨论的类型. 这时，需要假设

$Q_0=x^2-1$，$Q_1=-2(k+1)x$，$Q_2=(k+1)(k+2)-\nu(\nu+1)$，其中 k 是任意的. 如果选取 $k=-\nu-2$，则 $Q_2=0$，即在此情况下，我们得到 $p=1$. 可以求得方程(32)下列形式的解：

$$y=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{K}}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-x)^{\nu+1}}dt, \tag{33}$$

这个解是第一类勒让德函数[1] $P_\nu(x)$. 此时，这里的 t 平面应当认为是沿着实半轴 $t\leqslant-1$ 剪开的；$x\neq1$ 是这个剪开的平面上的某一点，$a>1$，而 $\mathbf{K}$ 则是通过 a 并且包围着点 x 和1的某一条简单的封闭曲线(图 19). 如果 x 是实的，则应当选取 $a>x$；对于解中包含的幂，应取主值. 如果 ν 是自然数，则可以将圆心在点 x 的圆周取作为 $\mathbf{K}$，这时，只是应当有 $x\neq\pm1$. 在这种情况下，经过变换

$$t-x=e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1},$$

当 $|\arg x|<\frac{1}{2}\pi$ 时便得到拉普拉斯积分表示式.

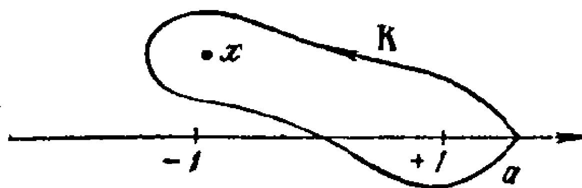


图 19

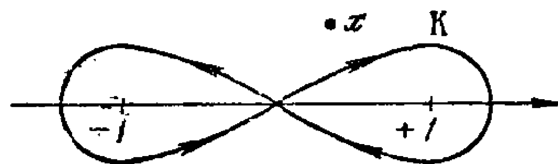


图 20

按下述方式可以得到第二类勒让德函数 $Q_\nu(x)$：将 t 平面沿着实半轴剪开，在这个剪开的平面上取一点 x. 将某一条包围着点 -1 和 $+1$ 但不包围点 x 的 8 字形的曲线取作为 $\mathbf{K}$ (图 20). 这时，

$$Q_\nu(x)=\frac{1}{4\pi\sin\nu\pi}\int_{\mathbf{K}}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(x-t)^{\nu+1}}dt\quad(\nu\text{ 为非整数}),$$

如果自变数 x 和 $x-t$ 这样选取，使得 $|\arg x|<\pi$，并且当 $t\to0$ 时，$\arg(x-t)\to\arg x$；其次，如果 $\Re\nu>-1$，则有

$$Q_\nu(x)=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^\nu}{(x-t)^{\nu+1}}dt.$$

---

1) 当然，勒让德函数 P_ν、Q_ν 和上面我们这样表示的函数是不同的.

特别是对于自然数 ν 时，情况如此.

见 Whittaker-Watson, p.306 以及以后，p 316.

19.6. 利用二重积分求解. 设对于方程(11)存在偏微分算子：

$$M_{s,t}=A(s,t)\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}+B(s,t)\frac{\partial}{\partial s}+C(s,t)\frac{\partial}{\partial t}+D(s,t)$$

以及两个函数 $K(x,s,t)$ 和 $K_1(x,s,t)$，使得

$$L_x K(x,s,t)=M_{s,t}K_1(x,s,t).$$

这时，如果 ψ 满足与方程 $M_{s,t}(u)=0$ 共轭的微分方程

$$M^*_{s,t}(w)\equiv\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(Aw)-\frac{\partial}{\partial s}(Bw)-\frac{\partial}{\partial t}(Cw)+Dw=0, \tag{34}$$

此外，如果对于所有的 x 有[1]

$$\mathscr{M}[K_1,\psi]\Big|_{(a,c)}^{(b,d)}\equiv\int_a^b(AK_{1,s}+CK_1)\psi\Big|_c^d ds+$$

$$+\int_c^d(AK_{1,t}+BK_1)\psi\Big|_a^b dt-AK_1\psi\Big|_{(a,c)}^{(b,d)}=0,$$

则

$$y(x)=\int_a^b\int_c^d K_1(x,s,t)\psi(s,t)\,ds\,dt$$

是方程(11)的解. 当方程(34)具有形如 $\psi=u(s)v(t)$ 的解时，寻找函数 $\psi(s,t)$ 的过程可以简化.

例. 设给定特殊的超几何方程(见第三部分，2.249)：

$$(x^2-1)y''+(\alpha+\beta+1)xy'+\alpha\beta y=0.$$

这里可以假设

$$K_1=K=\exp(xst),\ M_{s,t}=\left(s\frac{\partial}{\partial s}+\alpha\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\beta\right)-s^2t^2$$

---

1) 这里，$K_{1,s}=\frac{d}{ds}K_1$，等等。

函数

$$\psi=s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\exp\left(-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}t^2\right)$$

满足方程 $M^*_{s,t}(w)=0$. 所以当 $\Re\alpha>0$ 和 $\Re\beta>0$ 时

$$y=\int_0^\infty\int_0^\infty s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\exp\left(xst-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}t^2\right)dsdt$$

是解.

§ 20. 对于大的 x 值解的性状

20.1. 多项式系数[1]. 设方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)y^{(\nu)}=0 \tag{1}$$

满足 19.2 节中所指出的条件. 如果选取的闭路如图 17 所表示的那样 (19.2 节), 并且如果沿着从 τ 出发的半直线有 $(t-\tau)^r=|t-\tau|^r e^{i\alpha}$, 则在§19(19)的角内, 对于解§19(15), 存在下列渐近展开式(见 4.4 节(B)):

$$y(x)\sim 2\pi i e^{\tau x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{\Gamma(-r-\nu)}x^{-r-\nu-1}. \tag{2}$$

这意味着, 当 N 任意并适当选取 C 时, 对于所有处于上述角内的按模来说足够大的 x, 下列不等式成立:

$$\left|y(x)e^{-\tau x}x^{r+1}-\sum_{\nu=0}^{N}\frac{2\pi i c_\nu}{\Gamma(-r-\nu)}x^{-\nu}\right|<Cx^{-N-1}.$$

数 c_ν 仍然由 §19(20)来确定.

---

1) 见 Айнс, стр. 597—612; J. Horn, *Math. Ann.* **71** (1912), p. 510—532; L. Fantappiè, *Memorie Accad. d'Italia* **1**, №2(1930).

20.2. 更一般形式的系数[1]. 设给定方程

$$y^{(n)}+\sum_{\nu=0}^{n-1} x^{(n-\nu)k} P_\nu(x) y^{(\nu)}=0,$$

其中 k 是非负整数,并且级数

$$P_\nu=a_\nu+\frac{a_{\nu,1}}{x}+\frac{a_{\nu,2}}{x^2}+\cdots$$

或者对于所有足够大的实数 x 是收敛的，或者是相应函数的渐近展开式. 这个微分方程具有 $k+1$ 阶奇点（见 19.2 节(C)）. 如果特征多项式

$$\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{3}$$

具有 n 个根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,这些根的实部各不相同,则具有下列形式的 n 个标准级数形式地满足所给定的微分方程:

$$S_\nu=e^{g_\nu(x)}\, x^{\rho_\nu}\left(c_\nu+\frac{c_{\nu,1}}{x}+\frac{c_{\nu,2}}{x^2}+\cdots\right)\quad(\nu=1, \cdots, n),$$

其中

$$g_\nu=\frac{\alpha_\nu}{k+1}x^{k+1}+\alpha_{\nu,k}x^k+\cdots+\alpha_{\nu,1}x.$$

在这种情况下,存在这样的基本解组 $y_1, \cdots, y_n$, 当 $x\to\infty$时级数 S_ν 是 $y_\nu(x)$ 的渐近展开式，即

$$y_\nu=e^{g_\nu(x)}\, x^{\rho_\nu}\left(c_\nu+\frac{c_{\nu,1}}{x}+\cdots+\frac{c_{\nu,m}}{x^m}+\frac{\gamma_{\nu,m}(x)}{x^m}\right),$$

并且

$$\lim_{x\to\infty}\gamma_{\nu,m}(x)=0.$$

---

1) 见 J. Horn, *Acta Math.* 24(1901), p. 289—308; *Math. Zeitschrift* 8(1920), p. 100—114; 21(1924), p. 85—95; W Sternberg, *Math. Ann.* 81 (1920), p. 119—186; W. J. Trjitzinsky, *Acta Math.* 62(1934), p. 167—226; *Transactions Americ. Math. Soc.* 37(1935), p. 80—146.

这个结果可以推广到 x 为复数的情况，以及多项式(3)具有重根的情况.

还曾研究过 $k=0$ 和

$$P_\nu \sim a_\nu(x) + \frac{a_{\nu,1}(x)}{x} + \frac{a_{\nu,1}(x)}{x^2} + \cdots$$

的情况[1)]，其中 $a_{\nu,\mu}(x)$ 是一些具有相同周期的周期函数.

20.3. 连续的系数[2)]. 设在方程

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} = 0$$

中，系数 $f_\nu(x)$ 当 $x \geqslant x_0$ 时是连续的，并且设当 $x\to\infty$ 时 $f_\nu(x) \to a_\nu$. 其次，设 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 是特征多项式

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_0$$

的根. 如果 $r_1, \cdots, r_s$ 是这些根的不同的实部，并且如果存在 e_ν 个数 ρ_p(每一根的个数认为与其重数是一样的)，具有同样的实部 $\Re\rho_p = r_\nu$，则给定的微分方程所具有的基本解组 $y_1, \cdots, y_n$，可以这样来划分为 s 类：对于在第 ν 类中的 e_ν 个线性无关的解来说，对于任何 $\varepsilon>0$，当 $x\to\infty$ 时，

$$e^{-(r_\nu+\varepsilon)x} \sum_{k=0}^{n} |y^{(k)}| \to 0, \quad e^{-(r_\nu-\varepsilon)x} \sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}| \to \infty.$$

如果所有的 ρ_ν 都具有不同的实部，则存在这样的基本解组 $y_1, \cdots, y_n$，使得

$$\lim_{x\to\infty}(y_\nu^{(n)} : y_\nu^{(n-1)} : \cdots : y_\nu' : y_\nu) = \rho_\nu^n : \rho_\nu^{n-1} : \cdots : \rho_\nu : 1.$$

---

1) T. Carleman, *Acta Math.* **43**(1922), p. 319—336.

2) O. Perron, *Journal f. Math.* **143**(1913), p. 25—50; **142**(1913), p. 254—270; *Math. Zeitschrift*, 1(1918), p. 27—43; F. Lettenmeyer, *Sitzungsberichte München*(1929), p. 201—252; L. Cesari, *Annali Pisa* (2), 9 (1940), III/IV, p. 1—24.

20.4. 振荡定理[1). 设在方程

$$y^{(n)}+g(x)y=0$$

中，函数 $g(x)$ 当 $x\geqslant a$ 时取正值并且是连续的，并且设积分

$$\int_a^{\infty}g(x)dx$$

发散. 当 n 为偶数时，方程(4)的每一个非零解无限多次地改变符号. 当 n 为奇数时，每一个非零解或者具有无限多个零点，或者当 $x\to\infty$ 时趋向于零.

如果在方程

$$y^{(n)}+f(x)y^{(n-1)}+g(x)y=0$$

中，函数 f 和 g 当 $x\geqslant a$ 时是连续的，并且如果 $f\geqslant 0$，$g\geqslant C>0$，此外，f 是有界的，则每一个非零解或者具有无限多个零点，或者当 $x\to\infty$ 时趋向于零.

§ 21. 依赖于参数的 n 阶线性微分方程[2)

(a) $y^{(n)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\rho^{k(n-\nu)}f_\nu(x,\ \rho)y^{(\nu)}=0$. 对此方程作如下假设：$k$ 是某一个自然数，ρ 是实参数，函数 f_ν 是连续的并且当 $\rho\to\infty$ 时在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有渐近展开式

$$f_\nu(x,\ \rho)\sim\sum_{p=0}^{\infty}a_{\nu,p}(x)\rho^{-p}.$$

---

1) W.B. Fite, *Transactions Americ. Math. Soc.* **19**(1918), p. 344—350; A. Kneser, *Math. Ann.* **42**(1893), p. 421.

2) [详细的叙述和参考文献见 Наймарк 的著作，§ 4，§8；也可参阅 В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1968; Coddington 和 Levinson，第Ⅵ章. ——俄译本编者注.]

假设 $a_{\nu,p}(x)$ 具有各阶导数，最后假设方程

$$\omega^n + a_{n-1,0}(x)\omega^{n-1} + \cdots + a_{0,0}(x) = 0$$

的所有 n 个解 $\omega_1(x), \cdots, \omega_n(x)$ 是不同的，并且具有各阶导数.

(α) 此外，如果将函数 ω_ν 适当地编号，使得

$$\Re\omega_n(x) > \Re\omega_p(x) \quad (p = 0, 1, \cdots, n-1),$$

则给定的方程具有解 $y(x)$，对于这些解（在适当选择 g_p 和 φ_q 时）存在下列形式的渐近展开式：

$$y(x) \sim \left\{\exp \sum_{p=0}^{k-1} g_p(x)\rho^{k-p}\right\} \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q(x)\rho^{-q}.$$

这些解的导数 $y', \cdots, y^{(n-1)}$，具有由上述渐近展开式经过形式上的微分得到的类似的渐近展开式. 对于每一个解，其初始值 $y(a), \cdots, y^{(n-1)}(a)$ 由相应的级数渐近地表示，上述展开式在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上一致地成立.

(β) 如果

$$\Re\omega_1(x) < \Re\omega_2(x) < \cdots < \Re\omega_n(x),$$

则给定的微分方程具有 n 个这样的解 $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$，在适当选择函数 $g_{\nu,p}$ $\varphi_{\nu,q}$ 时，

$$y_\nu(x) \sim \left\{\exp \sum_{p=0}^{k-1} g_{\nu,p}(x)\rho^{k-p}\right\} \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{\nu,q}(x)\rho^{-q}, \tag{1}$$

并且这些解的导数 $y'_\nu, \cdots, y_\nu^{(n-1)}$ 仍然可以用由上式形式上求微分所得到的级数渐近地表示. 函数 $g_{\nu,p}$ 和 $\varphi_{\nu,q}$ 应当这样来选择，使得表达式(1)的右端形式地满足所讨论的微分方程.

(b) $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x, \rho)\, y^{(\nu)} = 0$. 设 ρ 是复参数，当 $a \leqslant x \leqslant b$，$|\rho| \geqslant R$ 时，级数

$$f_\nu(x,\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{\nu,k}(x)\rho^{-\nu-k}$$

收敛，f_ν 有界，而 $a_{\nu,k}(x)$ 具有各阶导数．其次，设 $a_{n,0}\neq 0$，方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_{\nu,0}(x)\omega^\nu=0$$

的所有 n 个解两两不同，并且是具有各阶导数的 n 个函数 $\omega_1(x),\cdots,\omega_n(x)$．最后，设当函数 ω_ν 适当编号时，对于处在复平面 ρ 上的扇形域

$$\alpha\leqslant\arg(\rho-\rho_0)\leqslant\beta \tag{S}$$

内的所有 ρ，有

$$\Re\rho\omega_\nu(x)\leqslant\Re\rho\omega_{\nu+1}(x)+\varepsilon\quad(\varepsilon\geqslant 0,\nu=1,\cdots,n-1).$$

这时，当给定的 $m\geqslant 1$ 时，对于 (S) 中的每一个按模来说足够大的 ρ，存在基本解组

$$y_1(x,\ \rho),\ \cdots,\ y_n(x,\ \rho),$$

这些解具有下述性质：每一个 $y_\nu(x,\rho)$ 在 (S) 中具有对 ρ 的各阶导数，并且对于 $p=0,1,\cdots,n-1$，

$$y_\nu^{(p)}(x,\ \rho)=u_\nu^{(p)}(x,\rho)+e^{\rho\Omega_\nu(x)}\cdot\frac{E_\rho}{\rho^{m-p}} \tag{2}$$

(导数指的是对于 x 的)；这里

$$\Omega_\nu(x)=\int_a^x\omega_\nu(t)\,dt;$$

$u_\nu(x,\ \rho)$ 具有下列形式：

$$u_\nu(x,\ \rho)=e^{\rho\Omega_\nu(x)}\sum_{k=0}^{m-1}u_{\nu,k}(x)\rho^{-k}, \tag{3}$$

其中 $u_{\nu,k}(x)$ 具有各阶导数，$u_{\nu,0}\neq 0$；$E_p=E_p\ (x,\ \rho,\ m)$ 是某

一个当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时对于(S)中所有的按模来说足够大的 ρ 为有界的函数.

如果将表达式(2)和(3)代入所讨论的方程中，并且这样来确定 $u_{\nu,k}$,使得

$$e^{\rho\Omega_\nu(x)}\rho^{-\mu} \qquad (\mu=0,1,\cdots,m)$$

的系数恒等于零,便得到函数 $u_{\nu,k}(x)$.

(c) $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)y^{(\nu)}+\rho^n g(x)y=0$. 设函数 $f_\nu(x)$ 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时是连续的; $f_n \neq 0$, $g \neq 0$; f_n 和 g 具有 n 阶连续导数,而 f_{n-1} 具有 $n-1$ 阶连续导数; l 为整数,(S) 是复平面 ρ 上的扇形域:

$$\frac{l}{n}\pi \leqslant \arg(\rho-\rho_0) \leqslant \frac{l+1}{n}\pi. \qquad (S)$$

这时,对于所有按模来说足够大的并且处于 (S) 中的 ρ, 存在基本解组

$$y_1(x,\rho),\cdots,y_n(x,\rho),$$

这些解具有下列性质：每一个 $y_\nu(x,\rho)$具有对 ρ 的各阶导数，而

$$\frac{d^p}{dx^p}y_\nu(x,\rho)=\frac{d^p}{dx^p}e^{\rho\Omega_\nu(x)}u_\nu(x)+E_p e^{\rho\Omega_\nu(x)}\rho^{p-1}$$

$$(p=0,1,\cdots,n-1),$$

其中 $\omega_1(x),\cdots,\omega_n(x)$是方程

$$f_n\omega^n+g=0$$

的 $n-1$ 次连续可微的解,而

$$\Omega_\nu(x)=\int_a^x \omega_\nu(t)\,dt;$$

函数 $u_\nu(x)$不等于零，并且是 n 次连续可微的，而函数 $E_p=E_p(x,\rho)$是有界的.

§ 22. 某些特殊类型的 n 阶线性微分方程

22.1. 常系数齐次微分方程. 如果方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \qquad (1)$$

的特征多项式

$$P(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \qquad (2)$$

具有根 $s_1,\cdots,s_r$, 其重数为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$, 即如果

$$P(s)=(s-s_1)^{\lambda_1}\cdots(s-s_r)^{\lambda_r},$$

则微分方程(1)所有解的集合由下列公式给出:

$$e^{s_1x}P_{\lambda_1-1}(x)+\cdots+e^{s_rx}P_{\lambda_r-1}(x),$$

其中 $P_h(x)$是次数$\leqslant h$ 的(具有复系数的) 任意多项式. 上述形式的表达式如果只取实数值,则为此方程的实解;将上述表达式分为实部和虚部,也能够得到实解.

方程(1)的解可按下述方式得到: 设数 c_ν 作为下列幂级数的系数来确定:

$$(1+a_{n-1}s+\cdots+a_0s^n)^{-1}=1+c_1s+c_2s^2+\cdots;$$

这时,

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\frac{x^{n+\nu-1}}{(n+\nu-1)!} \qquad (c_0=1)$$

是方程(1)具有初始值

$$y(0)=\cdots=y^{(n-2)}(0)=0, \qquad y^{(n-1)}(0)=1$$

的解,并且 y 的各阶导数也是解.

关于利用拉普拉斯变换求解方程(1),见 19.3 节.

关于方程

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_0(x)y=0$$

可以借助于某一个形如 $y(x)=u(x)\eta(\xi),\xi=v(x)$的变换化为常系数方程的条件,见 J. Fayet, *C.R. Paris* **204** (1937), p. 650; S. Kakeÿa, *Proc.*

Phys.-math Soc. Japan(3), **20**(1938), p. 365—373. [也可以参阅 Матвеев, гл. VII, § 4. ——俄译本编者注。]

22.2. 常系数非齐次微分方程[1). 微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x)$$

借助于符号表示法

$$P(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0,\quad D=\frac{d}{dx}$$

可以写为下列形式：

$$P(D)y=f(x). \tag{3}$$

如果已知齐次方程的通解，则只须找到非齐次方程任何一个解就够了(见 16.4 节)。这个解是

$$y=\sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda_\varkappa}A_{\varkappa,\lambda}\frac{f(x)}{(D-s_\varkappa)^\lambda}, \tag{4}$$

其中 $s_\varkappa$ 是多项式 $P(s)$的根，数 $\lambda_\varkappa$ 是这些根的重数，将$\frac{1}{P(s)}$分解为一些基本分式，即：

$$\frac{1}{P(s)}=\sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda_\varkappa}\frac{A_{\varkappa,\lambda}}{(s-s_\varkappa)^\lambda},$$

便可得到 $A_{\varkappa\lambda}$，而$\frac{f(x)}{(D-s)^\lambda}$表示微分方程

$$(D-s)^\lambda Y=f(x) \tag{5}$$

---

1) [关于常微分方程的符号(算子)解法见 §19 中指出的文献，以及 А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров. 1967; Sansone; Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, 1948; М. С. Гарднер и Дж. Л. Бернс. Переходные процессы в линейных системах, 1951; А. Н. Лурье. Операционное исчисление, 1950. 这些问题的原始论述见下列著作：Я. Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.——俄译本编者注.]

的解；对于任意的 x_0，函数

$$Y(x)=e^{sx}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}e^{-st}f(t)\,dt$$

就是此方程的解。

上述方法形式上可以归结如下：这样来考虑方程(3)，如果其中的 y 被看作为乘数，而 $P(D)$ 是某一个变量 D 的多项式；用 $P(D)$ 除 (3)，并且将 $\frac{1}{P(D)}$ 分解为基本分式，便得到 (4)；对于这时所得到的形如 $Y=(D-s)^{-\lambda}f(x)$ 的各项应用同样的形式上的运算法则，就会导出形如(5)的方程。

特别是，如果多项式 $P(s)$ 所有的根 $s_1,\cdots,s_n$ 各不相同，则方程(3)具有解

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{s_\nu x}}{P'(s_\nu)}\int f(x)e^{-s_\nu x}dx.$$

为了求解所论微分方程，下述注记也可能是有用的：

(a) 如果 y_1 和 y_2 是方程

$$P(D)y_1=f_1(x),\quad P(D)y_2=f_2(x)$$

的解，则 y_1+y_2 满足方程

$$P(D)y=f_1(x)+f_2(x).$$

(b) 如果 $f(x)$ 是 k 次多项式，并且如果

$$P(u)=u^{\lambda}P_1(u),\quad P_1(0)\neq 0,$$

则在给定的方程的解当中存在着次数 $\leqslant k+\lambda$ 的多项式。将带有未定系数的这种形式的多项式代入方程来代替 y，就可最容易地得到这个解。

(c) 如果 $f(x)=e^{\alpha x}f_1(x)$（α 是实数或复数），并且如果 z 满足方程

$$P(D+\alpha)z=f_1(x),$$

则 $y=ze^{\alpha x}$ 是方程(3)的解。

(d) 如果$f(x)=f_1(x)e^{ax}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}bx$($a$, b 是实数)，并且如果 y 是情况(c)当 $\alpha=a+bi$ 时的解，则 $\Re y$，以及相应地 $\Im y$，都是方程(3)的解。

(e) 如果c_ν由展开式

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0)^{-1}=c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots$$

来确定，则在一定的收敛性的条件下，级数

$$y=c_0f(x)+c_1f'(x)+\cdots$$

是方程(3)的解[1]。

22.3. 欧拉方程.

(a)
$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu y^{(\nu)}=f(x).$$

当 $x>0$ 时，此方程的解 $y=y(x)$同时是常系数方程

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu D(D-1)\cdots(D-\nu+1)Y=f(e^t),\quad D=\frac{d}{dt}$$

的解$Y(t)$，其中 $t=\ln x$。

(b)
$$\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(ax+b)^\nu y^{(\nu)}=f(x).$$

如果假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=ax+b$, 便得到类型(a)。

22.4. 拉普拉斯方程. 此方程具有下列形式:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu x+b_\nu)y^{(\nu)}=c,$$

并且属于 19.2 节的类型. 对于那里所引用的函数 $\varphi(t)$，这里可以得到表达式

---

1) U. Broggi, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **63**(1930), p.1047—1050.

$$\varphi(t)=\frac{1}{P(t)}\exp\int\frac{Q}{P}dt,$$

其中

$$P(t)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu t^\nu,\quad Q(t)=\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu t^\nu.$$

由此得知

$$y=\int_{\mathbf{K}}\frac{1}{P(t)}\exp\left(xt+\int\frac{Q(t)}{P(t)}dt\right)dt$$

是解，如果

$$\int_{\mathbf{K}}\frac{d}{dt}e^{xt}P(t)\varphi(t)dt=c.$$

如果 α 和 β 是曲线 **K** 的端点，则最后的等式等价于等式

$$e^{xt}P(t)\varphi(t)\Big|_{\alpha}^{\beta}=c,$$

并且这个函数的值可能不得不取在相应的黎曼曲面上。在唯一地有意义的 $n\geqslant 2$ 的情况，也可以应用19.2节中的方法(B)．

22.5．具有多项式系数的方程[1]．也可参阅 18.6 节．

(a) 设在方程

$$P_{n-1}(x)y^{(n)}+\cdots+P_1(x)y''+(a_1x+b_1)y'+$$
$$+(a_0x+b_0)y=0 \tag{6}$$

中，P_ν 是次数$\leqslant\nu$ 的多项式，$|a_0|+|b_0|\neq 0$．当且仅当 $a_0=0$，$b_0=-ma_1$，$a_1\neq 0$ 时，此方程以某一个 m 次多项式作为解．这个多项式具有下列形式：

$$y=\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{a_1}\right)^k[x^mIx^{-m-1}(P_{n-1}D^n+\cdots$$
$$+P_1D^2+b_1D)]^kx^m,$$

---

1) A. Mambriani, *Bollettino Unione Mat. Italiana* 17(1938), p.26—32.

其中 $D=\frac{d}{dx}$，当 $\nu\neq-1$ 时，$Ix^{\nu}=\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$. 所有其他的多项式的解，同这个解只差一些常数因子；特别是，不存在具有其他次幂的多项式的解.

例如，对于拉普拉斯方程 (22.4 节)，当 $b_0\neq 0$ 时，由此得知，这个方程不能有两个线性无关的多项式的解.

(b) 如果在方程

$$[a_n x^n+P_{n-1}(x)]y^{(n)}+\cdots+[a_1 x+P_0(x)]y'+a_0 y=0$$

中，P_ν 仍然是次数 $\leqslant\nu$ 的多项式，并且如果 $a_0\neq 0$，那么当且仅当对于某一个整数 $m\geqslant 0$，

$$g(m)\equiv\sum_{\nu=0}^{n}C_m^\nu \nu! a_\nu=0$$

时，此方程以某一个多项式作为解. 如果 m 是满足这个条件的数中之最小者，则存在 m 次多项式形式的解，并且任何一个次数更低的多项式都不满足这个方程.

22.6. 波赫哈默尔方程[1). 此方程具有下列形式：

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu}P^{(n-\nu)}y^{(\nu)}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu-1}Q^{(n-\nu-1)}y^{(\nu)}=0,$$

其中 $P(x)$, $Q(x)$ 分别是次数 $\leqslant n$ 和 $\leqslant n-1$ 的多项式. 此微分方程属于 19.5 节的类型. 根据那里所叙述的方法可知，如果

$$\int_{\mathbf{K}}\frac{d}{dt}[(t-x)^k P(t)\varphi(t)]dt=0, \tag{7}$$

则

$$y=\int_{\mathbf{K}}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt \tag{8}$$

1) 见 Ince, p. 454—460.

是解，其中

$$\varphi(t)=\frac{1}{P(t)}\exp\int\frac{Q(t)}{P(t)}dt. \tag{9}$$

为了满足条件(7)，必须或者是将某一条封闭曲线取作为 **K**，或者是将使得表达式

$$\mathfrak{M}=(t-x)^{k}P(t)\varphi(t) \tag{10}$$

在其端点等于零的非封闭曲线取作为 **K**。一般说来，如果多项式 P 是 n 次的，并且其所有的根两两不同，则取封闭曲线比较方便；如果某一条封闭曲线 **K** 围绕着这些根中的每一个，在此情况下，我们可以得到 n 个线性无关的解．如果 P 不满足上述条件，则不得不利用第二种类型的曲线．在一些个别的特殊情况下，需要按下述方式来处理：

(A)设 $\tau_1,\cdots,\tau_m(m\leqslant n)$是多项式 $P(t)$ 的不同的根，因而

$$\frac{Q(t)}{P(t)}=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{c_\nu}{t-\tau_\nu}+R(t), \tag{11}$$

其中 $R(t)$为某一个多项式与形如$\frac{c}{(t-\tau_\nu)^\lambda}(\lambda\geqslant 2)$的一些项之和．这时，

$$\varphi(t)=\frac{S(t)}{P(t)}\prod_{\nu=1}^{m}(t-\tau_\nu)^{c_\nu}, \tag{12}$$

其中 $S(t)$是在整个 t 平面上的单值解析函数，并且到处都是正则的，点 τ_ν 可能除外．仍然需要选择闭路 **K** 使得条件(7)成立．

(a)如果 $x\neq\tau_\varkappa$，则取圆 $\mathbf{K}_x$ 围绕着点 x，而取圆 $\mathbf{K}_\varkappa$ 围绕着点 $\tau_\varkappa$，并且用一线段 **s** 将两个圆联接起来；除 $\tau_\varkappa$ 以外，圆 $\mathbf{K}_x$ 和 $\mathbf{K}_\varkappa$，不应当包含任何点 τ_λ．在曲线 $\mathbf{K}_x$，$\mathbf{K}_\varkappa$ 和 **s** 本身上，也不应当有任何一个点 τ_λ。

整个闭路等于

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_x^+ + \mathbf{s}^+ + \mathbf{K}_\varkappa^+ + \mathbf{s}^- + \mathbf{K}_x^- + \mathbf{s}^+ + \mathbf{K}_\varkappa^- + \mathbf{s}^-$$

(此闭路如图 21 所示，线段以及圆实际上是彼此重合的，而画得有些偏移)．沿着这条闭路来考虑的函数，应当认为是在其黎曼曲面上给定的．这时，条件(7)成立，而解具有下列形式：

$$y_{\varkappa,x}=(1-e^{2\pi i c_\varkappa})\int_{\mathbf{K}_x}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)dt-$$

$$-(1-e^{2\pi i k})\int_{\mathbf{K}_\varkappa}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)dt+$$

$$+(1-e^{2\pi i c_\varkappa})(1-e^{2\pi i k})\int_{\mathbf{s}}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)dt; \quad (13)$$

这时，$\mathbf{K}_x$ 和 $\mathbf{K}_\varkappa$ 在正方向上通过，$\mathbf{s}$ 在由 x 到 $\tau_\varkappa$ 的方向上通过，被积函数定义为可从点 A（图 21）相应地沿着 $\mathbf{K}_x$ 和 $\mathbf{s}+\mathbf{K}_\varkappa$ 解析延拓的函数．

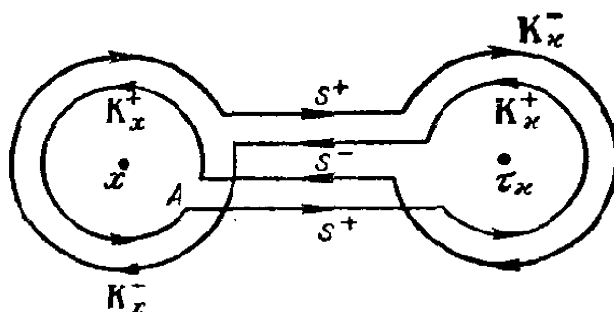


图 21

(b)如果在(a)中取点 $\tau_\lambda\neq\tau_\varkappa$ 代替点 x，则表达式 (13) 仍然是解．这时，对于既不处在闭路 $\mathbf{K}$ 上也不处在所考虑的两个圆内的所有的 x 来说，表达式(13)是解．用这种方法可以得到的线性无关的解不多于 m 个．

(B)如果 $c_\varkappa$ 是整数，则 $y_{\varkappa,x}$ 和 $y_{\varkappa,\lambda}$ 均为零．在这种情况

下，如果用$c+\varepsilon$代替$c=c_x$，则可转化为相近的方程，对于这个方程，根据(Aa)，可以构造解$y_{x,x,\varepsilon}$。这时，

$$\bar{y}_{x,x}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y_{x,x,\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\left[2\pi i\int_{\mathbf{K}_x}+2\pi i(1-e^{2\pi ik})\int_{\mathbf{S}}\right](t-x)^{k+n-1}\varphi(t)dt+$$

$$+(1-e^{2\pi ik})\int_{\mathbf{K}_x}(t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\ln(t-\tau_\nu)dt$$

是原方程的解. 正如在(Ab)中一样，这里也可以用τ_λ代替x.

(C) 如果$\tau=\tau_x$是多项式$P(t)$的重根，则(11)可以写为下列形式：

$$\frac{Q(t)}{P(t)}=\sum_{\nu=1}^{h}\frac{a_\nu}{(t-\tau)^\nu}+\cdots\quad(h\geqslant 2).\tag{11 a}$$

如果假设

$$t-\tau=\rho e^{i\psi},\quad \frac{a_\nu}{1-\nu}=\sigma_\nu e^{i\theta_\nu}\quad(\rho\geqslant 2),$$

则在公式(10)中

$$\mathfrak{M}=\rho^{a_1}e^{ia_1\psi}(t-x)^kT(t)\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{h}\sigma_\nu\rho^{1-\nu}e^{[(1-\nu)\psi+\theta_\nu]i}\right\},$$

其中$T(t)$在点τ的某一个确定的邻域内是正则的并且不等于零. 如果将ψ固定，则当$\rho\to 0$时，是$|\mathfrak{M}|\to 0$还是$\to\infty$，取决于

$$\cos[(1-h)\psi+\chi_h]<0\text{ 还是 }>0.\tag{14}$$

当$0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$时，存在着$2(h-1)$个扇形域，在这些扇形域中，表达式(14)交替地取不同符号；在号数为奇数的扇形域

内，(14) 为负. 现在如果 K 是某一条处在区域 I + II + III 中的简单曲线(如图 22 所示)，其端点同点 τ 这样连接，使得相应的切线分别处于扇形域 I 和 III 中，则条件 (7) 成立，并且 (8) 是解. 如果认为 K 与 τ 这样连接，使得其端点处在另一些号数为奇数的扇形域中，则得到另一些解，但是在这些解中，线性无关的解不多于 $h-1$ 个.

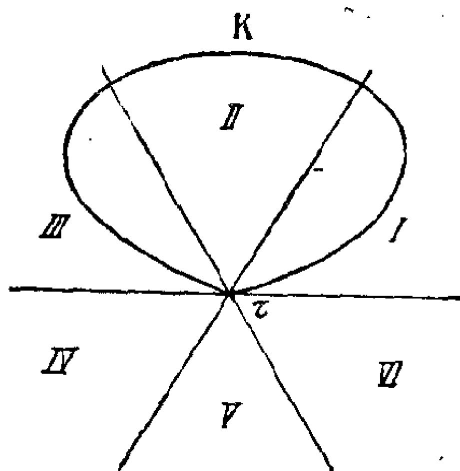


图 22

(D) 如果 $P(t)$ 的次数不大于 $Q(t)$ 的次数，则

$$\frac{Q(t)}{P(t)}=\sum_{\nu=1}^{g} b_\nu t^{\nu-1}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{c_\nu}{t-\tau_\nu}+U(t), \qquad (11\text{ b})$$

其中 $g\geqslant 1$, $b_g\neq 0$, 而 U 是形如 $\frac{c}{(t-\tau_\nu)^\lambda}(\lambda\geqslant 2)$ 的各项之和. 如果假设

$$t=\rho e^{i\psi},\quad \frac{b_\nu}{\nu}=\sigma_\nu e^{i\theta_\nu},$$

则在公式(10)中可以得到

$$\mathfrak{M}=(t-x)^k e^{V(t)}\prod_{\mu=1}^{m}(t-\tau_\mu)^{c_\mu}\exp\sum_{\nu=1}^{g}\sigma_\nu\rho^\nu e^{(\nu\psi+\theta_\nu)i},$$

其中 $V(t)$ 是有理函数，其分母的次数大于分子的次数. 如果将 ψ 固定，则当 $\rho\to\infty$ 时，$|\mathfrak{M}|\to 0$ 还是 $\to\infty$，取决于

$$\cos(g\psi+\chi_g)<0 \quad \text{还是} \quad >0. \qquad (14\text{ a})$$

t 平面可以划分为 $2g$ 个顶点在点 $t=0$ 的扇形域，在这些扇形域中，不等式(14 a)交替成立. 由此可知，同在情况(C)中一样，存在这样的曲线 K (图 23)，当 $\rho\to\infty$ 时，$\mathfrak{M}\to 0$，所以

(8)是解。

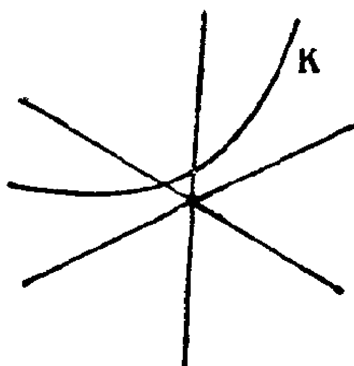


图 23

一些特殊情况. Ⅰ. **蒂索方程**，即在此方程中

$$P(x)=\prod_{\nu=1}^{n-1}(x-a_\nu),$$

$$Q(x)=P(x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{b_\nu P(x)}{x-a_\nu}.$$

关于这个方程，见 Pochhammer. *Math Annalen* 37 (1890), p. 512—543.

Ⅱ. **黎曼方程**（第三部分，2.403）

$$y''+y'\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1-\alpha_\nu-\beta_\nu}{x-c_\nu}+$$

$$+\frac{y}{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\alpha_\nu\beta_\nu(c_\nu-c_{\nu-1})(c_\nu-c_{\nu+1})}{x-c_\nu}=0, \tag{15}$$

其中

$$\sum(\alpha_\nu+\beta_\nu)=1,\ c_{\nu+3}=c_\nu.$$

如果假设

$$y=u(x)\prod_{\nu=1}^{3}(x-c_\nu)^{\alpha_1},\ k=-1-\sum_\nu\alpha_\nu,$$

$$P=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3),$$

$$Q=\sum_{\nu}(\beta_\nu+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1})(x-c_{\nu-1})(x-c_{\nu+1}),$$

则(15)转化为方程

$$Pu''-(kP'+Q)u'+[C_{k+1}^2P''+(k+1)Q']u=0.$$

因此，这个方程变成波赫哈默尔方程，并且有解

$$y(x)=P(x)\int_{\mathrm{K}}(t-x)^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\prod_{\nu=1}^{3}(t-c_\nu)^{\beta_\nu+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1}-1}$$

$(\alpha_{\nu+3}=\alpha_\nu, \beta_{\nu+3}=\beta_\nu)$，其中曲线 K 应当根据(Ab)来选择.

第六章　二阶微分方程[1]

§ 23. 二阶非线性微分方程

23.1. 特殊类型的非线性方程的解法. 这里所说的是在§15 中对于 n 阶方程的情况曾指出过的各种解法. 因此，这些方法适用于解全微分方程、广义齐次方程以及形如 $F(y'', y', y)=0$ 或 $F(y'', y', x)=0$ 的方程. 特别是，如果给定方程

$$y''=f(y),$$

其中函数 f 是连续的，由此方程我们得到

$$\frac{dy'^2}{dx}=2f(y)y',$$

因而，如果方程的解及其导数在点 ξ 分别等于 η_0 和 η_1，则有

$$y'^2=\eta_1^2+2\int_{\eta_0}^{y} f(y)dy.$$

由此对于 y' 得到 4.1 节形式的方程.

我们还要指出下述方法，这种方法有时能达到目的. 如果给定方程

$$F(y'', y', y, x)=0,$$

则假设 $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, 引入复坐标. 设这时所得到的新方程为 $\Phi(\eta'', \eta', \eta, \xi)=0$，并且设由此方程可以得到方程

1) [论述二阶微分方程，特别是二阶线性微分方程的文献很多，例如见：Еругин; Bellman; Ince; Sansone; Coddington 和 Levinson. ——俄译本编者注.]

$\varphi(\eta', \eta, \xi, C)=0$，其中 C 为任意复常数．在这个方程中，我们将变量再转换为 x 和 y；并且分出实部和虚部，于是得到两个方程：

$$f_1(y', y, x, C_1)=0, \quad f_2(y', y, x, C_2)=0.$$

由这两个方程消去 y'，在一定的条件下并不需要进一步积分便得到方程 $g(x, y, C_1, C_2)=0$，由此方程可以求出方程 $F=0$ 的解．

例． $2xy''+y'^3+y'=0$ 可以化为第三部分的方程 6.133：

$$(\xi+\eta)\eta''+\eta'^2-\eta'=0;$$

由此得到

$$(\xi+\eta)\eta'=2\eta+C,$$

最后得到

$$(y+C_1)^2=2C_2x-C_2^2.$$

23.2．某些补充说明．

(a) 如果方程

$$y''=f(x, y, y') \tag{1}$$

的右端在某一个区域 $G(x, y)$ 内对于所有的 y' 值有定义，那么甚至对于最简单的方程（例如，$y''=2y'^3$），也会发生这种情况：积分曲线不能达到区域 G 的边界，而是终止于其某一个内点．方程(1)的每一条积分曲线可以延伸到区域 G 的边界，如果下述条件成立：对于 G 内的每一点 (x, y) 和任何 z，函数 $f(x, y, z)$ 连续，并且

$$|f(x, y, z)|\leqslant\varphi(|z|),$$

其中 $\varphi(u)$ 当 $u\geqslant 0$ 时是某一个取正值的连续函数，对于这个函数

$$\int_0^\infty \frac{u}{\varphi(u)}du=+\infty$$[1]．

1) M. Nagumo, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3), 19 (1937), p.861—865

(b) 设 $y_1(x)$和 $y_2(x)$分别是方程

$$y''=f(x, y, y') \text{ 和 } y''=g(x, y, y')$$

的解，并且

$$y_1(a)\geqslant y_2(a), \quad y_1(b)\geqslant y_2(b),$$

设函数 f, g 对于 $a\leqslant x\leqslant b$ 以及对于任何 y 和 y' 有定义. 这时，如果下列三个条件之一成立，则在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上，有 $y_1(x)\geqslant y_2(x)$；

(α) $f<g$，并且 f 或 g 是 y 的非减函数；

(β) $f\leqslant g$, 并且 f 或 g 是 y 的严格的增函数；

(γ) $f\leqslant g$, 并且 f 或 g 是 y 的非减函数和 y' 的单调函数[1].

当 $f\equiv g$ 时，由此可得边值问题的唯一性定理.

23.3. 极限值定理.

(a) 我们研究方程

$$\lambda y''+f(x, y, y', \lambda)=0 \tag{2}$$

的解当 $\lambda\to 0$ 时的情况[2].

设 $Y(x)$当 $0\leqslant x\leqslant h$ 时是方程

$$F(x, Y, Y')=0 \tag{3}$$

的某一个二次连续可微的解. 其次，设对于某些取正值的连续函数 $a(x)$和 $b(x)$，以及 $\lambda_0>\lambda>0$，函数

$$f(x, y, z, \lambda) \text{ 和 } F(x, y, z)$$

---

1) Ida Groppi, *Bolletino Unione Mat. Italiana* 17 (1938), p. 179—182; M. Picone, *Annali di Mat.*(4), 20 (1941), p. 97

2) [最高阶导数带有小参数的方程的理论，见下列著作：Еругин; Л. Э Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, 1955, гл. IV. § 2; Андронов, Витт,和Хайкин: В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М. Ф. Федорюк. Математический анализ. Итоги науки, 1967. 关于二阶自治系统问题的全面研究见：Е. Ф. Мищенко, *Матем. сборник* **44** (86):4(1958). ——俄译本编者注.]

在区域

$$0\leqslant x\leqslant h,\ |y-Y(x)|\leqslant a(x),\ |z-Y'(x)|\leqslant b(x) \qquad (4)$$

内是连续的；最后，设对于某些正的常数 ε, K, L, 有

$$|f(x, y, z, \lambda)-F(x, y, z)|\leqslant\varepsilon,$$

$$|F(x, y_2, z)-F(x, y_1, z)|\leqslant K|y_2-y_1|,$$

$$\frac{F(x, y, z_2)-F(x, y, z_1)}{z_2-z_1}\geqslant L.$$

这时，如果 $y(x)=y(x,\lambda)$ 是方程(2)的某一个解，使得 $y(0)=Y(0)$，而 $y'(0)$任意，则对于所有足够小的

$$\lambda>0, \varepsilon>0 \quad 和 \quad p=|y'(0)-Y'(0)|,$$

$y(x)$在整个区间 $0\leqslant x\leqslant h$ 上存在并且下列不等式成立：

$$|y(x,\lambda)-Y(x)|<\left\{\frac{\varepsilon}{K}+\lambda\left(\frac{p}{L}+\frac{M}{K}\right)\right\}e^{-\frac{Kx}{L}},$$

其中

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant h}|Y''(x)|.$$

如果 $f(x, y, z, \lambda)$连续地依赖于$\lambda\geqslant 0$，并且如果$F(x, y, z)=f(x, y, z, 0)$，则当 $\lambda\to 0$ 时在整个区间 $0\leqslant x\leqslant h$ 上一致地有 $y(x,\lambda)\to Y(x)$，并且与初始值 $y'(0)$无关，只要 $y'(0)$充分接近 $Y'(0)$.

(b) $y''+g(x)y=f(x, y, y')$

这里设当 $x\to\infty$时$g\to\pm 1$, $f\to 0$. 这时，此方程的解在某些附加条件之下，同方程 $y''\pm y=0$ 的解相当；这些附加条件是：$f_y\to 0$, $f_{y'}\to 0$，并且向极限值的收敛性应当足够好[1].

23.4. 振荡定理[2]. 设在方程

---

1) K. Yosida. *Japanese Journal of Math.* **9** (1932), p 145—152, 227—230.

2) E. Milne, *Bulletin Americ. Math. Soc.* 28(1922), p. 102—104.

$$y''+\varphi(x)f(y)=0$$
中，函数 $\varphi(x)>0$ 当 $x\geqslant a$ 时连续、有界，并且单调增大，$f(y)$ 连续、单调增大，并且是奇函数，此外，当 $|y|\leqslant b$ 时满足李普希茨条件.

如果给定 $\eta(0<|\eta|<b)$，则对于所有 $x\geqslant a$ 由初始条件 $y(a)=\eta,\ y'(a)=0$ 所确定的解存在，而且这个解具有无穷多个零点，并且振幅单调减小，虽然不一定趋向于零.

§ 24. 任意的二阶线性微分方程

24.1. 一般注记. 一般的二阶线性微分方程具有下列形式：

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x). \qquad (1)$$

关于如何从方程中消去 $f_1 y'$ 项，见 16.3 节.

方程(1)的左端是齐次线性微分型(将 y 写成 u)

$$L(u)=f_2u''+f_1u',+f_0u.$$

如果函数 f_ν 是 ν 次连续可微的，则共轭微分型具有下列形式(见 17.5 节)：

$$L^*(v)=f_2v''+(2f_2'-f_1)v'+(f_2''-f_1'+f_0)v,$$

而相应的双线性微分型的形式为：

$$\mathscr{L}[u,v]=f_2(u'v-uv')+(f_1-f_2')uv.$$

当且仅当 $f_1=f_2'$，即如果 $L(u)$ 的形式为

$$L(y)=(f_2y')'+f_0y$$

时，这个微分型是自共轭的，即与 $L^*(u)$ 相同；这里，f_2 只要存在一阶连续导数就够了.

关于拉格朗日恒等式、格林公式和狄里克莱公式，以及关于基本解，见 17.6 节和 17.4 节.

如果

$$f_2''-f_1'+f_0=0,$$

则方程 (1) 是全微分方程；在这种情况下，此方程可以化为一阶方程：

$$f_2y'+(f_1-f_2')y=\int f(x)\,dx+C.$$

如果函数f_ν是连续的，并且$f_2\neq0$，则方程 (1) 和自共轭方程

$$(Ey')'+\frac{f_0}{f_2}Ey=\frac{f}{f_2}E,\quad 其中\quad E=\exp\int\frac{f_1}{f_2}dx,$$

具有同样的解，即在上述假设之下，总可以认为方程的左端是自共轭的。

6.2 节解（根据 § 14 的方法可以化为一阶微分方程组的）方程的逐次逼近法，这里可取下述形式：设给定方程

$$y''=f(x)y'+g(x)y+h(x),$$

其中f, g, h在区间$a\leqslant x\leqslant b$上连续。选择线性函数$y_0(x)$，使得此函数在点$x=a$满足给定的初始条件，然后，对于所有的$k\geqslant1$，由下列条件逐次确定y_k：

$$y_k''=fy_{k-1}'+gy_{k-1}+h,\ y_k(a)=y_k'(a)=0,$$

换句话说，即假设

$$y_k(x)=\int_a^x\int_a^x(fy_{k-1}'+gy_{k-1}+h)\,dx\,dx\quad(k=1,2,\cdots).$$

这时，所求的解是：

$$y=y_0+y_1+y_2+\cdots$$

24.2. 某些解法. 如果$f_2\neq0$，则方程 (1) 可以用f_2来除；这时得到下列形式的方程：

$$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)\tag{2}$$

设在所考虑的区间内函数f, g, h是连续的。这时，下述结论是正确的：

(a) 如果 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是对应齐次方程

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{3}$$

的基本解组，则

$$y = \varphi_2\int\frac{\varphi_1 h}{W}dx - \varphi_1\int\frac{\varphi_2 h}{W}dx + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2,$$

是方程(2)的通解，其中

$$W(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$$

(16.4 的特殊情况).

(b) 如果 $\varphi(x)$ 是方程(3)的解，并且 $\varphi(x)\neq 0$，则经过变换 $y=\varphi(x)u(x)$ 可将方程(2)化为方程

$$u'' + \left(\frac{2\varphi'}{\varphi} + f\right)u' = \frac{h}{\varphi},$$

这个方程可以化为一阶方程. 由此推出，方程(2)的通解具有下列形式:

$$y = C_1\varphi + C_2\varphi\int\frac{dx}{E\varphi^2} + \varphi\int\frac{1}{E\varphi^2}\left(\int E\varphi h dx\right)dx,$$

其中

$$E(x) = \exp\int f dx;$$

当 $h\equiv 0$ 时，这个结论仍然有效. 因而，如果已知齐次方程(3)的一个非平凡解，则方程(2) 和 (3)原则上可以认为是已被解出了. 关于如何求出这样的解，见 § 25.

(c) 方法(a)根据的是所谓“常数变易法”；这就是说，可以将方程(2)的解写为下列形式:

$$y = A(x)\varphi_1 + B(x)\varphi_2, \tag{4}$$

而 A, B 由条件

$$A'\varphi_1 + B'\varphi_2 = 0, \quad A'\varphi_1' + B'\varphi_2' = h \tag{5}$$

来确定. 这个方法可以推广，即用

$$y=A(x)\varphi_1+B(x)\varphi_2+z(x) \tag{6}$$

或者用

$$y=[A(x)\varphi_1+B(x)\varphi_2]z(x)$$

来代替(4)，为了确定 A, B 和 z，用另一种形式的相应方程来代替(5)。例如，如果 $g\neq 0$，利用(6)和方程

$$A'\varphi_1+B'\varphi_2=-z',\quad A'\varphi_1'+B'\varphi_2'=0,\quad gz=h,$$

则可得到方程(2)下列形式的通解：

$$y=\frac{h}{g}+\varphi_2\int\frac{\varphi_1'}{W}\left(\frac{h}{g}\right)'dx-$$

$$-\varphi_1\int\frac{\varphi_2'}{W}\left(\frac{h}{g}\right)'dx+C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$

其中 $W=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$. 也可以参阅 25.8 节(c)。

24.3. 估值定理. 设 $f_\nu(x)$ 和 $g_\nu(x)$ 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时是连续的($\nu=1,2$)，并且设

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x),\quad 0\leqslant g_1(x)\leqslant g_2(x).$$

如果 $y_\nu(x)$ 是方程

$$y_\nu''=f_\nu(x)y+g_\nu(x)$$

的某一个解，并且

$$y_1(a)\leqslant y_2(a),\ y_1'(a)\leqslant y_2'(a),$$

那么在使得 $y_2(x)\geqslant 0$ 的每一个区间 $a\leqslant x\leqslant a_1$ 上，则有

$$y_1(x)\leqslant y_2(x)\quad 和\quad y_1'(x)\leqslant y_2'(x).$$

因为根据 16.3 节可知，在任何二阶线性微分方程中，包含着 y' 的项可以消去，所以上述结果同时对于一般形式的方程，也给出了某种估值。如果用两个一阶方程的方程组代替二阶线性方程，借助于 8.4 节所述，可以得到更进一步的估值定理；关于这一点，见 25.2 节。

§ 25. 二阶齐次线性微分方程

25.1. 二阶线性微分方程的简化. 从 25.1 节到 25.6 节讲的是关于方程

$$f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=0, \tag{1}$$

其中 f, g, h 在某一个确定的区间内是连续的，并且 $f\neq 0$. 根据 24.2 节(b)可知，如果已知给定方程的一个不等于零的解，则可求出此方程所有的解. 为了求出这样的解，除了第五章叙述的一般方法以外，下列结论可能是有用的.

(a) 方程(1)是 15.2 节(b)意义下的广义齐次方程，经过变换 $u(x)=\dfrac{y'}{y}$，此方程可以化为黎卡提方程

$$f(x)(u'+u^2)+g(x)u+h(x)=0. \tag{2}$$

(b) 如果 $h=g'-f''$，则方程(1)是全微分方程（见 17.7 节）；在这种情况下，从方程(1)可以得到

$$fy'+(g-f')y=C. \tag{3}$$

(c) 关于系数 f, g, h 是常数，或者具有形式 $A_\nu(ax+b)^\nu$ $(\nu=2,1,0)$ 或形式 $a_\nu x+b_\nu$ 的情况，见 22.1—22.4 节.

(d) 如果假设 $u(x)=y\exp\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{g}{f}dx$，可以将 (1) 化为简化型或标准型方程：

$$u''+Iu=0,\ 其中\ I=\frac{h}{f}-\frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)'. \tag{4}$$

这时，假设函数$\dfrac{g}{f}$是可微的. 函数 $I(x)$ 称为微分方程的不变式.

(e) 当且仅当方程(1)和

$$f_1(x)u'' + g_1(x)u' + h_1(x)u = 0 \quad (f_1 \neq 0), \tag{1 a}$$

具有相同的不变式时，这两个方程的解 $y(x)$ 和 $u(x)$ 彼此之间以关系式 $y = uP(x)$ 相联系，其中 $P(x) \neq 0$ 是某一个二次连续可微函数．如果 y_1, y_2 和 u_1, u_2 是方程(1)和方程 (1 a) 的以上述关系式联系着的两个基本解组，则有

$$s(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{u_1(x)}{u_2(x)},$$

只要分母$\neq 0$，并且 $s'(x) \neq 0$．函数 $s(x)$ 还依赖于三个任意常数，这个函数满足微分方程

$$\{s, x\} = 2I, \tag{5}$$

其中表达式

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 \tag{6}$$

称为方程(1)的施瓦兹微分不变式，或称为函数 $s(x)$ 的施瓦兹导数．如果函数 $s(x)$ 当 $s'(x) > 0$ 时满足方程(5)，则

$$\frac{1}{\sqrt{s'}}(C_1 + C_2 s)$$

是方程 $y'' + Iy = 0$ 的解．

(f) 方程(1)的解 $y(x)$ 和方程

$$f_1(\xi)\eta'' + g_1(\xi)\eta' + h_1(\xi)\eta = 0 \tag{1 b}$$

$(f_1 \neq 0)$ 的解 $\eta(\xi)$，彼此之间以下列变换相联系：

$$y(x) = P(x)\eta(\xi), \quad \xi = \xi(x),$$

其中 $\xi(x)$ 是三次连续可微函数，$\xi'(x) \neq 0$，当且仅当 $\xi(x)$ 满足方程

$$\frac{1}{2}\{\xi, x\} + \xi'^2\left[\frac{h_1}{f_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_1}{f_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{f_1}\right)'\right] =$$

$$\frac{h}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)' \tag{7}$$

$(f=f(x),\cdots,f_1=f_1(\xi),\cdots)$；在这种情况下，

$$y\sqrt{|\xi'|}\exp\frac{1}{2}\int\frac{g}{f}dx=\eta\exp\frac{1}{2}\int\frac{g_1}{f_1}d\xi. \qquad (8)$$

可以设法，以适当的方式选择 P 和 η，把方程 (1) 化为方程 (1 b)，而此方程比原方程简单一些.

25.2. 关于二阶线性方程简化的进一步说明.

(a) 关于方程

$$y''=\Phi(x)y,$$

其中 $\Phi(x)$是周期函数，见第三部分 2.30 的希尔方程.

(b) 关于三阶方程其解为方程 (1) 的任何两个解的乘积的情况，见 § 26 和第三部分 3.26. 关于四阶方程其解为方程 (1) 的某一个解与方程 (1) 的同一个解或另一个解的平方之乘积的情况，见第三部分 4.14.

(c) 方程 (1) 可以通过许多方式化为方程组

$$y'(x)=P(x)y+Q(x)z,\quad z'=R(x)y+S(x)z. \qquad (9)$$

不难验证，为此只需选择 P, Q, R, S, 使得

$$P+S+\frac{Q'}{Q}+\frac{g}{f}=0,\quad RQ+P'+P^2+P\frac{g}{f}+\frac{h}{f}=0.$$

例如：

$$Q=1,\quad P=0,\qquad R=-\frac{h}{f},\ S=-\frac{g}{f}; \qquad (10)$$

$$Q=\frac{1}{E},P=S=0,\qquad R=-\frac{h}{f}E,\ \text{其中}E=\exp\int\frac{g}{f}dx; \qquad (11)$$

$$Q=1,\quad P=S=-\frac{g}{2f},\qquad R=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)'+\frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2-\frac{h}{f}; \qquad (12)$$

$$Q=\frac{1}{f},\ P=S=\frac{f'}{2f}-\frac{g}{2f},\ R=\frac{1}{2}(g'-f'')+\frac{1}{4f}(g-f')^2-h. \tag{13}$$

如果微分方程是自共轭的，即微分方程具有下列形式：

$$(fy')'+gy=0, \tag{14}$$

并且 $fg>0$，那么，例如也可以假设

$$Q=\sqrt{\frac{g}{f}},\quad P=S=-\frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}\right),$$

$$R=\sqrt{\frac{f}{g}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{5}{16}\left(\frac{g'}{g}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\frac{f'g'}{fg}-\frac{g}{f}\right\}. \tag{15}$$

这时应当假设在这些公式之中出现的导数存在。

(d) 函数

$$y=C\rho(x)\sin\vartheta(x),\quad z=C\rho(x)\cos\vartheta(x) \tag{16}$$

是方程组(9)的解，其中 C 是任意常数，$\vartheta(x)$ 是方程

$$\vartheta'=Q\cos^2\vartheta+(P-S)\sin\vartheta\cos\vartheta-R\sin^2\vartheta \tag{17}$$

的解，其初始值为 $\vartheta(a)$，$0\leqslant\vartheta(a)<\pi$，并且

$$\rho=\exp\int_a^x[P\sin^2\vartheta+(Q+R)\sin\vartheta\cos\vartheta+S\cos^2\vartheta]dx$$

这种解的极坐标表达式，当研究解的零点时是有用的．也就是说，函数 $y(x)$ 的零点对应于数值 $\vartheta=k\pi$（k 为整数），而对于 ϑ 则有一阶微分方程(17)。

对于方程

$$y''+g(x)y=0\quad(g>0)$$

也可以利用变换

$$\rho(x)\sin\vartheta(x)=y\sqrt{g(x)},\quad \rho(x)\cos\vartheta(x)=y';$$

这时，对于 ϑ 得到方程

$$\vartheta'=\sqrt{g}+\frac{1}{4}\frac{g'}{g}\sin 2\vartheta.$$

见 E. Kamke, *Americ Math Monthly* (1939); J K L Mac Donald, *Bulletin Americ Math Soc* 45 (1939), p 164—171; E Makai, *Compos. math.* 6(1936), p.368—374; *Annali Pisa* (2), 10(1941), p.123—126。

(e) 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(14)具有初始值

$$y_1(a)=1,y_1'(a)=0;y_2(a)=0,y_2'(a)=1$$

的两个解，并且如果连续函数 $r(x)$ 和 $\varphi(x)$ 由等式

$$y_1=r\cos\varphi,\quad y_2=r\sin\varphi,\quad \varphi(a)=0$$

来确定，则有：方程(14)的每一个解可由公式

$$y=Cr\sin(\varphi+\alpha)$$

得到，并且一次便都可得到；这里 C 是任意常数，α 取给定区间 $\alpha_0\leqslant\alpha<\alpha_0+\pi$ 中一切可能的值，$r(x)$ 是方程

$$(fr')'+gr-\frac{[f(a)]^2}{fr^3}=0 \tag{18}$$

的解，这个解在整个区间上存在，并且满足条件 $r(a)=1$，$r'(a)=0$，而最后还有

$$\varphi(x)=\int_a^x\frac{f(a)\,dx}{f(x)r^2}.$$

如果 $f=1$，而当 $|x|\to\infty$ 时，$g\to-\infty$，则当 $|x|\to\infty$ 时，$r(x)\to\infty$，当 $x\to\pm\infty$ 时，$r'(x)\to\pm\infty$。上述变换对于研究当 x 取大值时解 $y(x)$ 的性状是有用的。

见 W E Milne, *Transactions Americ Math Soc.* 30 (1928), p 797—802; H.Milloux, *Prace mat.-fiz* 41 (1934), p 39—54.

如果假设

$$\omega(x)=\frac{1}{r^2},$$

则有

$$y=\frac{C}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\int\frac{f(a)}{f(x)}\omega(x)\,dx+\alpha\right),$$

其中 $\omega(x)$ 是方程

$$\left(\frac{\omega''}{2\omega}-\frac{3}{4}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\right)f+\frac{\omega'}{2\omega}f'+\frac{\omega^2}{f}=g$$

的解，这个解在整个区间上存在并且满足初始条件 $\omega(a)=1$, $\omega'(a)=0$。

(f) 经过变换

$$y(x)=u(x)\eta(\xi),\qquad \xi=c+\int\frac{dx}{fu^2},$$

其中 $u(x)\neq 0$ 是已知的二次连续可微函数，可将(14)化为方程

$$\eta''+\Phi(\xi)\eta=0,\qquad 其中\quad \Phi(\xi)=f(fu')'u^3+fgu^4.$$

特别是，如果 $u(x)$ 与(e)中引入的函数 $r(x)$ 相同，则可得到方程

$$\eta''+\eta=0.$$

见 G. Ascoli, *Atti Accad Lincei* (6), 22 (1935), p 234—243. E. Swift, *Americ Journ Math* 50 (1928), p. 591—612.

25.3. 把解展开为连分数[1]. 如果在方程 (1) 中 $h(x)\neq 0$，则此方程可以改写为下列形式：

$$y=Q_0(x)y'+P_1(x)y''.$$

1) [关于连分数的理论，例如见 А. Я. Хинчин. Цепные дроби. 1961. ——俄译本编者注。]

如果 Q_0 和 P_1 具有各阶导数，那么经过逐次微分则可得到

$$y'=Q_1y''+P_2y''',$$

其中

$$Q_1=\frac{Q_0+P_1'}{1-Q_0'},\quad P_2=\frac{P_1}{1-Q_0'},$$

而一般地有

$$y^{(\nu)}=Q_\nu y^{(\nu+1)}+P_{\nu+1}y^{(\nu+2)},$$

其中

$$Q_\nu=\frac{Q_{\nu-1}+P_\nu'}{1-Q_{\nu-1}'},\quad P_{\nu+1}=\frac{P_\nu}{1-Q_{\nu-1}'},$$

只要相应的分母$\neq 0$.

从最初的方程有

$$\frac{y}{y'}=Q_0+P_1\frac{y''}{y'};$$

利用后一方程，则可得到

$$\frac{y}{y'}=Q_0+\frac{P_1}{Q_1+P_2\frac{y'''}{y''}},$$

如此等等；最后得到连分数：

$$\frac{y}{y'}=Q_0+\frac{P_1|}{|Q_1}+\frac{P_2|}{|Q_2}+\frac{P_3|}{|Q_3}+\cdots.$$

剩下的问题只是在相应的具体情况下研究所得连分数的收敛性. 如果按这种方法求出了$\frac{y}{y'}$，亦即$\frac{y'}{y}$，那么积分这个表达式便可得到方程的解.

特别是对于超几何函数(见第三部分，2.260)可以得到下列连分数的展开式：

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1|}{|1}+\frac{a_1x|}{|1}+\frac{a_2x|}{|1}+\cdots,$$

其中

$$a_{2\nu}=\frac{(\beta+\nu)(\alpha-\gamma-\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)},\ a_{2\nu+1}=\frac{(\alpha+\nu)(\beta-\gamma-\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}.$$

这个连分数在带有从 $+1$ 到 $+\infty$ 的切口的整个复 x 平面上收敛，函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 的零点除外。

25.4. 关于解的零点的一般注记.

(a) 因为积分曲线由函数及其导数的初始值唯一地确定，所以除了 $y\equiv 0$ 以外，方程(1)的任何一条积分曲线都不同 x 轴相切，并且在任何有限的闭区间上不能同 x 轴有无穷多个公共点。

(b) 零点交替定理. 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 (1) 的基本解组，则在一个解的每两个相邻的零点(如果这些零点存在)之间，有一个且仅有一个另一个解的零点。

(c) 对于每一个非零解 $y(x)$，下述结论是正确的. 如果 $h\neq 0$ 和 $f\neq 0$，则函数 y 和 y' 的零点依次地交替出现. 如果 $h\neq 0$ 和 $h^2+hg'-gh'\neq 0$，则对于函数 y' 和 y'' 的零点有同样的情况。如果 $g\neq 0$ 和 $h^2+hg'-gh'\neq 0$，则对于函数 y 和 y'' 的零点也有同样的情况。

25.5. 在有限区间上解的零点. 考虑自共轭形式的微分方程：

$$(fy')'+gy=0; \tag{14}$$

并且假设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，f 取正值，并且是连续可微的，而 g 是连续的。

(a) 斯图姆比较定理. 如果 $y_\nu(x)$ 是方程

$$(f_\nu y')'+g_\nu y=0\quad(\nu=1,2) \tag{19}$$

的某一个非零解，并且如果

$$f_1\geqslant f_2>0,\quad g_1\leqslant g_2,$$

则或者是在函数 y_1 的每两个相邻零点 x_1, x_2 之间至少有一个函数 y_2 的零点，或者是在区间 $[x_1, x_2]$ 上 $y_2=Cy_1$。这时，

如果在处于$[x_1, x_2]$中的任何区间内，恒等式

$$f_1 \equiv f_2, \quad g_1 \equiv g_2$$

不同时成立，则函数 y_2 在区间(x_1, x_2)内必定至少有一个零点。为了证明这一点，也可以利用所谓皮康(Picone)公式：

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y_1}{y_2}(f_1 y_1' y_2 - f_2 y_1 y_2')\right\} =$$

$$= (g_2 - g_1) y_1^2 + (f_1 - f_2) y_1'^2 + f_2\left(y_1' - y_1 \frac{y_2'}{y_2}\right)^2.$$

这里 y_1 和 y_2 是方程(19)当 $\nu = 1, 2$ 时的解，并且在所考虑的区间内应当有 $y_2 \neq 0$。

(b) 如果将方程(14)同具有常数 k (或相应地以 K 代替 k)的方程

$$k y'' + k\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 y = 0$$

作比较，则由此可以得到使得解是振动的下述条件。

如果 $g \leqslant 0$，或者如果

$$f \geqslant k > 0, \quad g < k\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2,$$

则在区间$[a, b]$上方程(14)的每一个非平凡解的零点不多于一个。

如果

$$0 < f \leqslant K, \quad g > K\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2, \qquad m \text{ 为整数并且} \geqslant 1,$$

则在区间$[a, b]$上方程(14)的每一个非平凡解的零点不少于 m 个。

我们还指出下述结果。如果 $f > 0$，$g \leqslant 0$，并且在区间$[a, b]$的任何子区间上函数 g 不恒等于零，则在区间$[a, b]$上对于每一个非平凡解 y 来说，yy' 的零点不多于一个。

(c) 如果把二阶方程化为两个一阶微分方程的方程组(见 25.2 节(c))，然后再将方程组化为方程(17)，则比较定理

很容易被证明，并且这时其形式更为一般．这时方程 (17) 具有下列形式：

$$\vartheta'(x)=A_\nu(x)\cos^2\vartheta+B_\nu(x)\sin 2\vartheta+C_\nu(x)\sin^2\vartheta. \quad (20)$$

如果研究两个这种形式的方程($\nu=1,2$)，它们具有系数 A_ν, B_ν, C_ν, 同时在整个区间$[a, b]$上

$$A_2\geqslant A_1,\ C_2\geqslant C_1,\ (A_2-A_1)(C_2-C_1)\geqslant(B_2-B_1)^2, \quad (21)$$

并且如果 $\vartheta_\nu(x, \alpha)$是方程(20)满足初始条件 $\vartheta_\nu(a, \alpha)=\alpha$的解，则有

$$\vartheta_2(x, \alpha_2)\geqslant\vartheta_1(x, \alpha_1) \text{ 当 } \alpha_2\geqslant\alpha_1 \text{ 时}.$$

如果 $B_2\equiv B_1$(这时(21)的最后一个不等式将是前两个不等式的结果)，则当且仅当：

或者 $\alpha_2>\alpha_1$ 时，

或者 $\alpha_2=\alpha_1$, 此外，至少在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一个点上有 $A_2>A_1$, $|C_1|+|C_2|>0$, 或 $C_2>C_1$, $|A_1|+|A_2|>0$ 时，有

$$\vartheta_2(b, \alpha_2)>\vartheta_1(b, \alpha_1).$$

作为特殊情况，对于方程组

$$y'=P_\nu(x)y+Q_\nu(x)z,\quad z'=R_\nu(x)y+S_\nu(x)z \quad (\nu=1,2), \quad (22)$$

由此可以得出下述结论．

设 $P_\nu, \cdots, S_\nu$ 在$[a, b]$上是连续的，并且设

$$Q_2\geqslant Q_1>0, R_2\leqslant R_1,\quad P_2-S_2=P_1-S_1;$$

其次设 $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$是方程组(22)的某一个非平凡解，并且

或者 $y_1(a)=0$,

或者 $y_1(a)\neq0$, $y_2(a)\neq0$, $\dfrac{z_1(a)}{y_1(a)}\geqslant\dfrac{z_2(a)}{y_2(a)}$.

第一比较定理．如果在区间 $a<x\leqslant b$ 上，$y_2(x)$ 的零点至少同 $y_1(x)$的零点一样多；如果 x_n 和 $\bar{x}_n$ 是解 y_1 和 y_2 的第 n 个零点，则有 $\bar{x}_n\leqslant x_n$; 此外，如果至少在区间$a\leqslant x\leqslant x_n$

的一个点上满足条件

或者
$$\left.\begin{array}{l}Q_2>Q_1 \quad \text{和} \quad |R_1|+|R_2|>0 \\ R_2<R_1,\end{array}\right\} \tag{23}$$

则有 $\bar{x}_n<x_n$。

第二比较定理. 如果在区间 $a<x<b$ 上，y_1 和 y_2 具有同样多个零点，并且如果 $y_1(b)\neq 0, y_2(b)\neq 0$，此外，至少在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一个点上满足条件(23)，则有

$$\frac{z_1(b)}{y_1(b)}>\frac{z_2(b)}{y_2(b)}.$$

当 $P_\nu=S_\nu=0$, $Q_\nu=\dfrac{1}{f_\nu}, R_\nu=-g_\nu$时，由此可得定理(a)。因为方程(14)和方程(1)可以通过各种方式化为形如(9)的方程组(见 25.2 节(c))，所以从对于方程组的上述两个比较定理，不难得出对于方程(14)和方程(1)的另一些比较定理。

(d) 如果 $y_\nu(x)$是方程

$$(f_\nu y')'+g_\nu y=0 \ (\nu=1,2) \tag{19}$$

的某一个非零解，并且

$$f_1\geqslant f_2>0, \quad g_1\leqslant g_2,$$

此外，或者 $y_1(a)=0$，或者

$$y_1(a)\neq 0, \quad y_2(a)\neq 0, \quad \frac{f_1(a)y_1'(a)}{y_1(a)}\geqslant\frac{f_2((a)y_2'(a)}{y_2(a)},$$

则对于解 y_1 和 y_2 处于区间 $a<x\leqslant b$ 上的第 n 个零点 x_n 和 $\bar{x}_n$, 不等式 $\bar{x}_n\leqslant x_n$ 成立。

(e) 如果把方程(14)同方程

$$Ky''-ky=0$$

作比较，由此推出：如果$f\geqslant K>0, -g\geqslant k>0$，并且 $y(x)$ 是方程(14)具有初始值 $y(a)=\alpha, y'(a)=\beta(|\alpha|+|\beta|>0)$的某一个解，如果 $\alpha=0$，或者如果 $\alpha\neq 0$，而$f(a)\dfrac{\beta}{\alpha}\geqslant-\sqrt{kK}$,

则这个解在区间 $a<x\leqslant b$ 内一个零点也没有.

25.6. 当 $x\to\infty$ 时解的性状. 这里叙述的定理通常只是对于下列形式的方程建立的:

$$y''+f(x)y=0 \qquad (\text{当 } x\geqslant a \text{ 时}, f \text{ 是连续的}). \qquad (24)$$

这并未使普遍性受到重大限制,因为,根据 25.1 节(d),任何形如 (1) 的方程都可以化为这种形式,只要$\frac{g}{f}$是可微函数.

(a) $f\leqslant 0$. 从 25.5 节(b)得知,每一个非零解的零点不多于一个,因而,对于所有足够大的 x,这个解$\neq 0$. 如果把方程 $y''=0$ 取作为与之进行比较的方程,根据 25.5 节,则可进一步得到一些这种类型的定理.

如果对于所有的 x, $f(x)\leqslant 0$,但是$\not\equiv 0$,则 $y\equiv 0$ 是唯一的对于所有的 x 为有界的解.

(b) 当 $|x|\to\infty$ 时, $f(x)\to-\infty$. 每一个非零解 $y(x)$只有有限个零点,并且

$$\left|\frac{y'(x)}{y(x)}\right|\to\infty \quad \text{当 } x\to\infty \text{ 时}.$$

存在两个线性无关的解 $u_1(x)$, $u_2(x)$, 当 $x\to\infty$ 时, u_1, $u_1'\to 0$, $u_2\to\infty$, $u_2'\to-\infty$, 以及两个线性无关的解 v_1, v_1, 当 $x\to\infty$时, v_1, $v_1'\to 0$, v_2, $v_2'\to\infty$.

(c) $f\geqslant\alpha^2>0$. 这时,每一个非平凡解 $y(x)$,同它的导数一样,具有无穷多个零点,即每一个解作无穷多次振动;这时,相邻的零点之间的距离始终是有界的.

如果当 $x\to\infty$时, $f(x)\to\alpha^2>0$,并且$f(x)$ 单调增大,或者当 $a\leqslant x<\infty$时 $\ln f(x)$具有有界变差[假设在这个区间上 $f(x)>0$——俄译本编者注],则零点之间的间隔趋向于$\frac{\pi}{\alpha}$.如果 η_n 和 η_n' 是函数 y 和 y' 的振幅,即在第 n 个零点和第 $n+1$个零点之间的区间上$|y|$和$|y'|$的最大值,则存在$\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n$, $\eta'=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n'$ 并且 $\eta'=\alpha\,\eta$. 因而,对于大的 x值,方程(24)的解

的变化情况同方程 $y''+\alpha^2 y=0$ 的解是类似的.

设$f'(x)$存在，并且>0，此外，或者$f(x)\to\infty$，而$f'(x)$单调减小，或者

$$\frac{f\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)}{f(x)}\to 1,$$

而$f'(x)$单调增大（在两种情况下，单调性都理解为广义的）。这时，对于方程(24)的任何非平凡解 $y(x)$，将有

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=0,\quad \overline{\lim_{x\to\infty}}\left|y(x)\sqrt{f(x)}\right|>0.$$

(d)设在方程

$$y''+g_\nu y'+h_\nu y=0\quad(\nu=1,2)$$

中，$g_\nu(x)$和$h_\nu(x)$对于所有 $x\geqslant a$ 是连续的，并且设

$$g_1\leqslant g_2\leqslant 0,\quad h_1\leqslant h_2,\quad h_2>0.$$

如果对于这两个方程中的第一个（即当 $\nu=1$ 时），每一个非平凡解具有无穷多个零点，则对于第二个方程($\nu=2$)，情况也是如此.

(e) $y''+gy'+hy=0$; 这时，设 $g(x)$和 $h(x)$对于所有的 $x\geqslant a$ 是连续的，此外，当 $x\to\infty$时，$g\to\alpha$, $h\to\beta$.

设 ρ_1 和ρ_2 是“特征方程” $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$ 的解.

如果 $\Re\rho_1\neq\Re\rho_2$, 则对于每一个非平凡解，极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y'(x)}{y(x)}\tag{25}$$

存在，并且等于 ρ_1 或 ρ_2.如果 $\Re\rho_1=\Re\rho_2$，则正如方程 $y''+y=0$ 这个例子所表明的，这个极限也可能不存在（如果 $\rho_1=\rho_2$, 则见第三部分，2.106）.如果 $\rho_1=\rho_2$, 则利用变换$y=u(x)\exp\rho_1 x$（如果需要的话），可以认为 $\rho_1=\rho_2=0$，即 $g\to 0$ 和 $h\to 0$.这时，如果 $g\leqslant 0$ 和 $h\leqslant 0$，则极限(25)仍然存在，并

且等于零.

(f) 如果在方程

$$(fy')'+gy=0 \tag{14}$$

中，f 和 g 连续可微，$f>0$，$g>0$，而 fg 是单调的，则此方程每一个解的振幅当 x 增大时是单调地减小还是单调地增大，取决于 fg 是增大还是减小.

(g) $y''+[f(x)+\lambda]y=0$. 如果 $f(x)$ 当 $x\geqslant a$ 时是连续可微的，并且当 $x\to\infty$ 时

$$f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\quad f'(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

则对于所有的 $\lambda\geqslant\lambda_0>0$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ |\varphi_\lambda(x)|$$

(φ_λ 表示对应于给定数值 λ 的任意解) 处于某些与 λ 无关的界限之间.

如果当 $x\geqslant a$ 时 $f(x)$ 是连续的，并且当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=O(x^{-k})$，其中 $k>1$，则当 $\lambda>0$ 时，每一个解 $\varphi(x)\not\equiv 0$ 可以表示为下列形式：

$$\varphi=\rho(x)\sin[\lambda x+\sigma(x)],\quad \varphi'=\lambda\rho(x)\cos[\lambda x+\sigma(x)],$$

其中 $\rho(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是连续可微函数，并且当适当选择数 $\rho_0\neq 0$ 和 σ_0 时，将有

$$\rho(x)=\rho_0+O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right),\quad \sigma=\sigma_0+O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

25.7. 具有奇点的二阶线性微分方程. 现在设在方程

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$$

中，系数 $f_\nu(x)$ 是任意的半纯函数. 对于研究二阶方程时遇到的这种特殊情况，从 §18 可以得到以下结果.

(a) 如果微分方程具有下列形式：

$$P^2 y'' + PQy' + Ry = 0,$$

其中

$$P = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m),$$

并且所有的 a_ν 各不相同，Q, R 分别是次数 $\leqslant m-1$ 和 $\leqslant 2(m-1)$ 的多项式，则此方程是富克斯型方程．对于这个方程来说，所有的点(包括 $x=\infty$)只能或者是正则点，或者是弱奇点．

(b) $(x-\xi)^2 f(x) y'' + (x-\xi) g(x) y' + h(x) y = 0,$

在点 $x=\xi$ 的某一个邻域内，f, g, h 是正则的，即可展为幂级数，并且 $f(\xi) \neq 0$．这时，点 ξ 是正则点或弱奇点．在点 ξ 的邻域内解的形式取决于下列判定方程的解：

$$r(r-1)f(\xi) + rg(\xi) + h(\xi) = 0.$$

设判定方程的解 r_1, r_2 这样来编号，即如果 $r_1 - r_2$ 是整数，则此整数 $\geqslant 0$．这时对应的微分方程的解是 $C_1 y_1 + C_2 y_2$，其中 y_1 具有下列形式：

$$y_1 = (x-\xi)^{r_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-\xi)^\nu, \quad c_0 = 1, \qquad (\alpha)$$

对于 y_2，如果 $d = r_1 - r_2$ 不是整数，则有

$$y_2 = (x-\xi)^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^* (x-\xi)^\nu, \quad c_0^* = 1, \qquad (\beta_1)$$

如果 $d=0$，则有

$$y_2 = y_1 \ln(x-\xi) + (x-\xi)^{r_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu (x-\xi)^\nu, \qquad (\beta_2)$$

最后，如果 d 是正整数，则有

$$y_2 = c y_1 \ln(x-\xi) + (x-\xi)^{r_2} \left(-\frac{1}{d} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu (x-\xi)^\nu \right), \quad (\beta_3)$$

(这时，可能 $c=0$)．如果将表达式 (α) 和 (β_1) 代入微分方程，则可求出这些表达式中的系数．如果将

$$y(x)=y_1(x)\cdot u(x)$$

代入微分方程，利用弗罗比尼乌斯法，则可得到函数 (β_2) 和 (β_3)。

例如，贝塞耳方程（第三部分2.162），勒让德方程（第三部分 2.240），超几何方程（第三部分 2.260），均属于这里所讨论的类型。

$$\text{(c)} \qquad x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)y'' + x g\left(\frac{1}{x}\right)y' + h\left(\frac{1}{x}\right)y=0,$$

在点 $x=0$ 的某一个邻域内，$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是正则的，并且 $f(0)\neq 0$。这时，点 $x=\infty$ 是正则点或者是弱奇点．经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=\frac{1}{x}$，可将这种情况化为情况(b)。

$$\text{(d)} \qquad x^a f\left(\frac{1}{x}\right)y'' + x^b g\left(\frac{1}{x}\right)y' + x^c h\left(\frac{1}{x}\right)y=0,$$

在点 $x=0$ 的某一个邻域内，$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是正则的，$f(0)\neq 0$, $h(0)\neq 0$；$g(x)\equiv 0$ 或 $g(0)\neq 0$；a, b, c 均为整数。

如果 $g(0)\neq 0$，则下述含有 b 的一些不等式必须成立。如果 $a\geqslant b+1$ 和 $a\geqslant c+2$，则得到类型(c)。所以设 $a\leqslant b$，或者 $a\leqslant c+1$．这时 $x=\infty$ 是强奇点。为了使具有下列形式的解存在：

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k},$$

必须有：$g(0)\neq 0$，$a\leqslant b$ 和 $c\leqslant\min(a-2,b-1)$。为了使可以表示为标准级数形式

$$y=e^{P(x)}x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k}$$

的解存在（P 为 p 次多项式），必须有：

$$g(0)=0,\ c-2(p-1)\leqslant a\leqslant c+1$$

或者

$$g(0)\neq 0,\ a\leqslant b,\ \min\left(c-b,\ \frac{c-a}{2}\right)\leqslant p-1\leqslant b-a.$$

(e) 也可以在实变量的情况下来研究类似的方程．如果 A, B 是常数，而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $a<x\leqslant b$ 时是连续的，并且积分

$$\int_a^b |f|\,dx,\ \int_a^b (x-a)\,|g|\,dx$$

存在，则方程

$$(x-a)^2y''+[A(x-a)+f(x)(x-a)^2]y'+$$
$$+[B+(x-a)^2g(x)]y=0$$

可用逐次逼近法求解．

25.8．近似解．渐近解(实变量时)．

(a) 设给定微分方程

$$y''+y'\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{x^\nu}+y\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{x^\nu}=0. \tag{26}$$

在 $a_0=-1$，$b_0=b_1=0$ 的特殊情况下，级数

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{x^\nu} \tag{27}$$

的系数 c_ν 可以逐次算出，只须将(27)代入方程(26)，并且比较 x 的同次幂的系数．这样得到的级数(27)，一般说来，是发散的，但是对于当 $x\to\infty$ 时趋向于 c_0 的解 $y(x)$，此级数在下述意义下给出渐近表达式

$$y\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{x^\nu},$$

即对于任何整数 $m>0$，当适当选择 A 时，对于所有足够大的 x，

$$\left| y(x) - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{c_\nu}{x^\nu} \right| < \frac{A}{x^{m+1}}$$

成立．这在对于大的 x 值计算 $y(x)$ 时是有用的．

一般的情况，只要 $a_0 \neq 0$ 和 $a_0^2 \neq 4b_0$，借助于变换

$$y(x) = e^{\tau x} x^r \eta(\xi), \quad \xi = \rho x$$

则可化为已分析过的情况．这时，应适当选择 τ，使得新的系数 b_0 等于零，选择 r，使得新的系数 b_1 等于零，选择 ρ，使得新的系数 a_0 等于 -1．

(b)[1] 设在方程

$$y'' + f(x) y' + g(x) y = 0 \tag{28}$$

中，函数 g 在区间 $a < x \leqslant b$ 内是连续的，函数 f 是连续可微的．设在点 $x = a$ 的邻域内方程(28)"非常接近"于方程

$$u'' + \varphi(x) u' + \psi(x) u = 0, \tag{29}$$

其中 ψ 是连续的，φ 是连续可微的．[例如贝塞耳方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

和方程

$$x^2 u'' + x u' - n^2 u = 0$$

在点 $x = 0$ 附近．] 这时，方程(28)可以写为下列形式：

$$y'' + \varphi y' + \psi y = (\varphi - f) y' + (\psi - g) y.$$

设已知方程(29)的两个线性无关的解 u_1 和 u_2．借助于方程(29)的基本解(见 17.4 节)

$$\gamma(x, \xi) = \frac{u_1(\xi) u_2(x) - u_1(x) u_2(\xi)}{u_1(\xi) u_2'(\xi) - u_1'(\xi) u_2(\xi)} \quad (x \leqslant \xi)$$

可以得到

1) Y. Ikeda, *Math. Zeitschrift* 22 (1925), p.16—25. [也可以参阅 Sansone——俄译本编者注．]

$$y(x)=\int_a^x\{[\varphi(\xi)-f(\xi)]y'(\xi)+$$
$$+[\psi(\xi)-g(\xi)]y(\xi)\}\gamma(x,\xi)d\xi$$

或者

$$y(x)=[f(a)-\varphi(a)]y(a)\gamma(x,a)+$$
$$+\int_a^x\Big(\frac{d}{dx}\{[f(\xi)-\varphi(\xi)]\gamma(x,\xi)\}+$$
$$+[\psi(\xi)-g(\xi)]\gamma(x,\xi)\Big)y(\xi)d\xi.$$

只要$[f(a)-\varphi(a)]y(a)$存在，则右端的第一项是方程(29)的某一个确定的解$u(x)$。因而，对于$y(x)$，得到下列形式的沃尔泰拉型积分方程：

$$y(x)=u(x)+\int_a^x K(x,\xi)\ y(\xi)\ d\xi,$$

在适当的假设下，对此积分方程可以应用逐次逼近法（第二部分2.10节）。如果进行有限次迭代以后停止下来，则可以得到解的近似表达式。

(c) 设重新给定微分方程(28)，即

$L(y)=0$，其中 $L(y)\equiv y''+f(x)y'+g(x)y$, (28 a)

并且现在假设$f(x)$和$g(x)$对于所有$x\geqslant a$是连续的。求下列形式的解[1]：

$$y(x)=\lambda_1(x)z_1(x)+\lambda_2(x)z_2(x), \tag{30}$$

其中z_1和z_2是线性方程组

$$z_1'=\alpha(x)z_1+\beta(x)z_2,\quad z_2'=\gamma(x)z_1+\delta(x)z_2$$

的解。如果λ_1和λ_2满足条件

1) G. Fubini, *Atti Accad. Lincei*(6), **26**(1937), p.253—259. 也可参阅24.2节(c).

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_1'+\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma)'+(\alpha+f)(\lambda_1'+\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma)+\\&\qquad+\gamma(\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+g\lambda_1=0,\\&(\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)'+(\delta+f)(\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+\\&\qquad+\beta(\lambda_1'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+g\lambda_2=0,\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

则函数(30)是方程(28 a)的解。最后，如果积分

$$\int_x^\infty S(t)\,dt,\text{ 其中 } S(x)=\max\,(|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|,\ |\delta|),$$

收敛，则这样的解(30)，其中

$$z_1(x)\to\zeta_1,\quad z_2(x)\to\zeta_2,\text{ 当 } x\to\infty\text{时},$$

可以借助于级数

$$z_1=\sum_{n=0}^\infty u_n(x),\qquad z_2=\sum_{n=0}^\infty v_n(x)\tag{32}$$

来表示，这些级数的各项由下列递推公式给出：

$$u_0=\zeta_1,\quad u_n=\int_\infty^x[\alpha(t)u_{n-1}(t)+\beta(t)v_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$v_0=\zeta_2,\quad v_n=\int_\infty^x[\gamma(t)u_{n-1}(t)+\delta(t)v_{n-1}(t)]\,dt.$$

对于使得

$$2\int_x^\infty S(t)\,dt<\varepsilon<1$$

的所有 x 值，级数(32)绝对收敛且均匀收敛，并且以级数

$$k\sum_{n=0}^\infty\varepsilon^n,\qquad\text{其中}\quad k=\max(|\zeta_1|,\ |\zeta_2|),$$

为优级数。除了(31)以外，如果假设

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma=0,\quad \lambda_1\beta+\lambda_2\delta=0,$$

只要对于所有足够大的 x 值，朗斯基行列式 $W=\lambda_1\lambda_2'-\lambda_1'\lambda_2\neq$

0，则有

$$\alpha=\frac{\lambda_2 L(\lambda_1)}{W},\quad \beta=\frac{\lambda_2 L(\lambda_2)}{W},\quad \gamma=-\frac{\lambda_1 L(\lambda_1)}{W},$$

$$\delta=-\frac{\lambda_1 L(\lambda_2)}{W}.$$

如果$\int_x^\infty |Q(t)|e^{2t}dt$ 收敛，则对于方程

$$y''=[Q(x)+1]y,$$

可以假设 $\lambda_{1,2}=e^{\pm x}$。

25.9. 渐近解(复变量时)[1]. 设在方程

$$y''(z)+\left\{ a_{1,0}+\frac{a_{1,1}}{z}+\frac{\psi_1(z)}{z^2}\right\}y'(z)+$$

$$+\left\{ a_{2,0}+\frac{a_{2,1}}{z}+\frac{\psi_2(z)}{z^2}\right\}y(z)=0 \qquad (33)$$

中，$a_{1,0}^2\neq 4a_{2,0}$，并且设 ψ_1, ψ_2 在扇形域

$$|z|\geqslant r_0>0 \quad \varphi_0\leqslant \arg z\leqslant \varphi_1<\varphi_0+2\pi \qquad (S)$$

内是正则的和有界的．经过变换

$$y(z)=y^*(z)\exp\left(-a_{1,0}\frac{z}{2}\right),$$

可将(33)化为同样形式的方程，不过其中已是 $a_{1,0}=0$．所以，在(33)中可以假设 $a_{1,0}=0, a_{2,0}\neq 0$。

如果 σ 满足方程 $\sigma^2=-a_{2,0}$，则从点 $z=0$ 引出的两条射线 $\Re(z\sigma)=0$ 称为临界射线．如果至少有一条临界射线处于扇形域(S)以外，则存在方程(33)的基本解组 y_1, y_2，在扇形域(S)内可以表示为下列形式：

---

1) 见 G. Hoheisel, *Journ. f. Math.* 153 (1924), p 228—244.

$$y_\nu = e^{\sigma_\nu z} z^{\rho_\nu}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n,\nu}(z)\right) \quad (\nu=1,2),$$

其中 $\sigma_1=\sigma$, $\sigma_2=-\sigma$, 同时 $\chi_{n,1}$, $\chi_{n,2}$ 在(S)内是正则的，并且在适当选择常数 $C>0$ 时满足不等式

$$|\chi_{n,\nu}(z)|<\frac{1}{n!}\left(\frac{C}{|z|}\right)^n.$$

如果借助于变换

$$y=e^{\sigma z}z^{\rho}\eta, \qquad \text{其中}\ 2\rho=-a_{1,1}-\frac{a_{2,1}}{\sigma},$$

把方程(33)化为下列形式：

$$\eta''+\left(2\sigma+\frac{b}{z}\right)\eta'=-\frac{1}{z^2}(\psi_1\eta'+\psi_2\eta),$$

其中 $\sigma b=-a_{2,1}$, 并且对于所得到的方程应用逐次逼近法，则可得到上述结果.

25.10. WBK 法. 方程

$$y''-[\rho^2 f(x)+g(x)]y=0, \tag{34}$$

经过变换

$$y=\exp\left(\rho\int u(x)dx\right),$$

化为黎卡提方程

$$\rho u'+\rho^2u^2-\rho^2 f-g=0.$$

如果形式地求此方程的下列级数形式的解：

$$u=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu(x)\rho^{-\nu}, \tag{35}$$

并且将这个级数代入(34)，比较 ρ 的同次幂的系数，则得到

$$u_0=\pm\sqrt{f},\quad u_1=-\frac{u_0'}{2u_0},\quad u_2=\frac{g-u_1'-u_1^2}{2u_0},$$

$$u_{\nu+1}=-\frac{1}{2u_0}\left(u'_\nu+\sum_{p=1}^{\nu}u_p u_{\nu+1-p}\right)\quad(\nu\geqslant 2).$$

因为必须用 u_0 来除，所以应当假设 $f(x)$ 在所考虑的区间内不等于零. 如果假设级数 (35)，以及由此级数经过两次逐项微分以后得到的级数，对于所有足够大的 ρ，在整个区域内对 x 均匀收敛，那么，在原则上采用非常简单的方法就可以得到方程(34)的解. 这种方法在物理文献当中通常称为 WBK 法[1].

1) 根据其提出者的名字：Wentzel，Brillouin，Kramers，见 R. E. Langer, *Bulletin Americ. Math. Soc.* 40 (1934)，p. 545—582. [也可参阅 Н. Фреман и П. У. Фреман, ВБК-Приближение,«Мир», 1967.——俄译本编者注.]

第七章　三阶和四阶线性微分方程

§ 26. 三阶线性微分方程

三阶线性微分方程

$$y''' + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \tag{1}$$

具有下述特点：如果函数$f_2(x)$是可积的，那么用

$$f = \exp\frac{1}{3}\int f_2(x)dx$$

乘(1)，我们将此方程化为下列形式：

$$[f(fy')']' + gy' + hy = 0.$$

由于三阶方程的阶数是奇数的，所以不存在三阶的自共轭微分方程．三阶反自共轭微分型具有下列形式：

$$L_1(y) = (fy)''' + fy''' + (gy)' + gy'$$

或者

$$L_2(y) = (fy')'' + (fy'')' + (gy)' + gy',$$

而如果 y''' 的系数是正的，则还具有下列形式：

$$L_3(y) = [f(fy')']' + 2gy' + g'y.$$

对应于这些微分型的微分方程 $L(y)=0$，有时仍然简称为自共轭的，因为在这种情况下 $L^* = -L$，因而，方程 $L^*(y)=0$ 和方程 $L(y)=0$ 具有相同的解．

如果 y_1, y_2 是二阶自共轭微分方程

$$2f(fy')' + gy = 0 \quad (f \neq 0)$$

的某一个基本解组，则 y_1^2, y_1y_2, y_2^2 构成反自共轭方程 $L_3(y)=0$ 的基本解组．因为这时 $y_1^2+y_2^2$ 也是此方程的解，所以每一个三阶反自共轭微分方程都具有在所考虑的区间的

任何一个点上都不等于零的解，只要其最高阶导数的系数在此区间上处处都不等于零.

如果 y_1, y_2 是方程 $L_3(y)=0$(其中 $f\neq 0$) 的两个线性无关的解，那么在解 y_1 的任何两个相邻的零点之间，解 y_2 的零点不多于两个，而函数 y_2 和 $y_1y_2'-y_1'y_2$ 一起有奇数个零点.

§ 27. 四阶线性微分方程

四阶自共轭微分方程具有下列形式：

$$[f(x)y'']''+[g(x)y']'+h(x)y=0. \tag{1}$$

如果 f 不等于零，并且是三次连续可微的，而 g 是连续可微的，则经过变换

$$y(x)=f^{-1/8}\eta(\xi),\quad \xi=\int f^{-1/4}dx$$

可将方程(1)化为下列形式的方程[1)]：

$$\eta^{(4)}+[G(\xi)\eta']'+H(\xi)\eta=0.$$

此方程经过变换

$$y(x)=u(x)\eta(\xi),\quad \xi(x)=\int\frac{dx}{fu^2},$$

又可以化为下列形式的方程：

$$\eta^{(4)}=\Phi(\xi)\eta.$$

上述变换中的 $u(x)$ 是方程

$$30\frac{u''}{u}-20\left(\frac{u'}{u}\right)^2+10\frac{f'}{f}\,\frac{u'}{u}+\left(\frac{f'}{f}\right)^2-3\frac{f''}{f}+9\frac{g}{f}=0,$$

处处都不等于零的解. 如果假设 $v(x)=\dfrac{u'}{u}$，则对于 u 的方程可以化为黎卡提方程

$$30v'+10v^2+10\frac{f'}{f}v+\left(\frac{f'}{f}\right)^2-3\frac{f''}{f}+9\frac{g}{f}=0.$$

1) 在下面的文章中求出了系数：W. Sternberg, *Math. Zeitschrift* **3** (1919), p. 192.

第八章　微分方程的近似积分[1]

§ 28. 一阶微分方程的近似积分

28.1. 折线法. 如果给定积分曲线的初始点(x_0, y_0)，则从微分方程可以求出此积分曲线在点(x_0, y_0)处的切线方向$(\mathrm{tg}\alpha=y'_0=f(x_0, y_0))$。在此方向上画一线段，譬如说，到达点$(x_1, y_1)$，并且在这一点上重复同样的作法.于是，我们得到积分曲线的第一次近似(图 24 是对于方程$y'=-\frac{y}{x}$，$x_0=2$，$y_0=6$，在等步长的情况下作出的；小圆圈表示的点处于真正的积分曲线上)。

应当避免下述错误的结论：当采用图解法时可能出现这种情况，即作为近似解而得到的折线，其形状不是曲折的，而是很象一条连续

---

1) [论述常微分方程和常微分方程组近似解法的文献很多。为了一般地了解问题，我们仅指出下列著作：Sansone;

А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 1954;

В. Э. Милн, Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955;

Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953;

И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, 1962;

С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, 1965;

Р. В. Хемминг, Численные методы, 1968;

Ш. Е. Микеладзе, Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, 1951;

Л. В. Канторович и В. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1952.——俄译本编者注.]

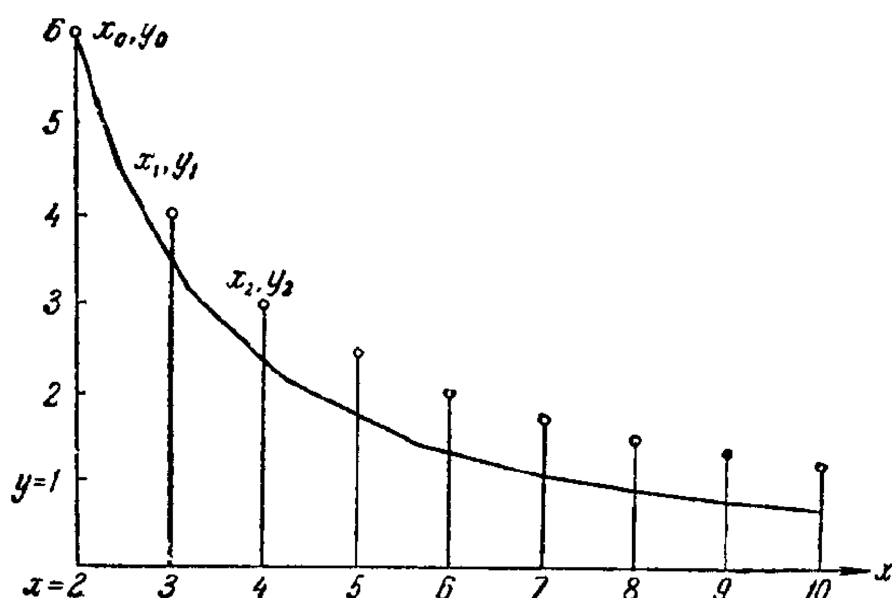


图 24

可微曲线。于是就会认为，这样的折线是对于所求积分曲线的很好的近似。2.1 节中的例子（图 2）表明，这个结论可能是错误的。

28.2. 补充半步法. 对于初始点(x_0, y_0)，从微分方程求出积分曲线切线的角系数 y_0'。在这个方向上作某一线段，譬如说，到达点(ξ_1, η_1)（第一个半步，图 25；这里微分方程和初始点同图 24 一样）。对于这一点，由微分方程确定角系数 η_1'。然后，由点(x_0, y_0)出发，在由角系数 η_1' 所确定的方向上作线段，但是这时经过的距离是第一个半步时的二倍，譬如说到达点(x_1, y_1)（第一个整步）。随后，将点(x_1, y_1)取作出发点，重复同样的作法；经过画到点(ξ_2, η_2)的第二个半步以后，得到点(x_2, y_2)，如此等等。点(x_n, y_n)是所求近似解上的点。此外，因为在每个点(x_n, y_n)上未知积分曲线的切线也是已知的——引向点(ξ_{n+1}, η_{n+1})的直线就是切线，——所以有可能建立几乎是精确的积分曲线（在图 25 上，小圆圈表示的点处于真正的积分曲线上）。

引用半步是一个一般原则，采用这种原则常常可以有效

地提高精确度。

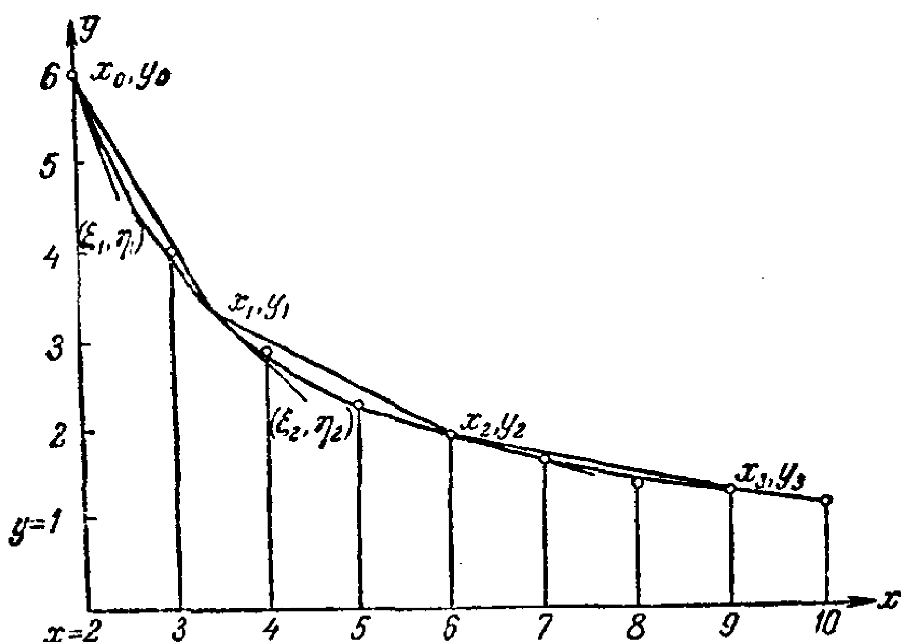


图 25

28.3．龙格-霍伊恩-库塔法． 设给定方程

$$y'=f(x, y).\tag{1}$$

经常采用的龙格-霍伊恩-库塔法的原理是：对于区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$, 确定一些点 (ξ_ν, η_ν) 和一些常数 $R_\nu(\nu=0,1,\cdots,m)$，使得通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$，在点 x_0+h 处，其纵坐标 $y_1=\varphi(x_0+h)$，可以由下列表达式尽可能精确地给出：

$$k=y_0+h[R_0f(\xi_0, \eta_0)+\cdots+R_mf(\xi_m, \eta_m)];$$

"尽可能精确地"这句话的意义在这里应如此理解：将等式 $\varphi'(x_0+h)=f(x_0+h, \varphi(x_0+h))$ 左端和右端的函数 φ 和 f 按 h 的幂展成级数时，应当有尽可能多的项是相同的。

这时，应当有 $\xi_0=x_0, \eta_0=y_0$，以及

$$\xi_1=x_0+\alpha_0h,\quad \eta_1=y_0+\beta_0k_1,\qquad k_1=hf(\xi_0, \eta_0),$$

$$\xi_2=x_0+\alpha_1h,\quad \eta_2=y_0+\beta_1k_1+\gamma_1k_2,\quad k_2=hf(\xi_1, \eta_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$R_\nu, \alpha_\nu, \beta_\nu$ 的选择应当与 f 无关。

按下述方式进行求解。对于通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$，在彼此等距离的点 $x_0, x_1, x_2, \cdots (x_{\nu+1}-x_\nu=h>0)$ 上，取值 $y_0, y_1, y_2\cdots$，使得 $y_\nu \approx \varphi_\nu(x)$，并且可以根据预期的精确度，选用下列公式中的某一些，来逐步确定 $y_1, y_2, \cdots$

一阶公式：

$$y_{\nu+1}-y_\nu=hf(x_\nu, y_\nu)。$$

二阶公式：

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2=hf(x_\nu+h, y_\nu+k_1),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

或者

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2=hf\left(x_\nu+\frac{1}{2}h, y_\nu+\frac{1}{2}k_1\right),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=0\cdot k_1+k_2.$$

三阶公式：

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu) \quad k_2=hf\left(x_\nu+\frac{1}{2}h, y_\nu+\frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3=hf(x_\nu+h, y_\nu-k_1+2k_2),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_2+\frac{1}{6}k_3$$

或者

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2=hf\left(x_\nu+\frac{1}{3}h, y_\nu+\frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_\nu+\frac{2}{3}h, y_\nu+\frac{2}{3}k_2\right),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{4}k_1+0\cdot k_2+\frac{3}{4}k_3。$$

四阶公式：

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu),\quad k_2=hf\left(x_\nu+\frac{1}{2}h,\ y_\nu+\frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_\nu+\frac{1}{2}h,\ y_\nu+\frac{1}{2}k_2\right),\quad k_4=hf(x_\nu+h,\ y_\nu+k_3),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{3}k_2+\frac{1}{3}k_3+\frac{1}{6}k_4$$

或者

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu),\quad k_2=hf\left(x_\nu+\frac{1}{3}h,\ y_\nu+\frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_\nu+\frac{2}{3}h,\ y_\nu-\frac{1}{3}k_1+k_2\right),$$

$$k_4=hf(x_\nu+h,\ y_\nu+k_1-k_2+k_3),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2+\frac{3}{8}k_3+\frac{1}{8}k_4.$$

还有其他一些同样类型的公式.

一般说来，随着远离初始点 x_0，误差越来越快地增加. 为了得到误差的近似估计，可以一次取步长 h 进行计算，再一次取步长$\frac{h}{2}$进行计算. 这时，由 m 阶公式得到的近似解的误差，近似地为上述两次计算结果之差的$\frac{1}{2^m-1}$.

28.4. 插值法和逐次逼近法相结合. 如果要求方程 (1) 对应于初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的积分曲线 $y=\varphi(x)$，则在彼此等距离的点 $x_0, x_1, x_2, \cdots (x_{n+1}-x_n=h>0)$ 上，取任意一些数值 $y_0^0=y_0, y_1^0, y_2^0, \cdots$（例如，对于所有 n 取 $y_n^0=y_0$，或者取那些已经处于所求积分曲线附近的点 (x_n, y_n^0)——效果更好)，然后，计算 $f_n^0=f(x_n, y_n^0)$，并且建立在点 $x=x_n$ 处取值 f_n^0 的插值多项式（按拉格朗日公式，牛顿公式，或者用有限

差分法)[1]. 积分这个多项式，在点 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 上得到一组更准确的值 $y_0^1=y_0, y_1^1, y_2^1, \cdots$ 对于这一组值，重新采用同样的方法，并且继续下去，直到依次地得到的近似解彼此之差开始小于允许误差时为止. 如果把代表由这种方法最后得到的近似解的序列的各项，用 y_n 来简单地表示，则有

$$y_n \approx \varphi(x_n).$$

例如，如果利用贝塞耳插值公式，则得到：

$$y_{n+1}^{\nu+1}-y_n^{\nu+1}=h\left[\frac{f_{n+1}^\nu+f_n^\nu}{2}-\frac{1}{12}\frac{\Delta^2 f_n^\nu+\Delta^2 f_{n-1}^\nu}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{11}{720}\frac{\Delta^4 f_{n-1}^\nu+\Delta^4 f_{n-2}^\nu}{2}-\frac{191}{60480}\frac{\Delta^6 f_{n-2}^\nu+\Delta^6 f_{n-3}^\nu}{2}+\cdots\right]$$

$(n=0,1,2,\cdots;\nu=0,1,2,\cdots)$，并且由此得到下列求解格式：

			*					*	
x_0	y_0	f_0			$\cdots$	y_0	f_0		$\cdots$
			Δf_0^0		$\cdots$			Δf_0^1	$\cdots$
x_1	y_1^0	f_1^0		$\Delta^2 f_0^0$	$\cdots$	y_1^1	f_1^1		$\cdots$
			Δf_1^0		$\cdots$			Δf_1^1	$\cdots$
x_2	y_2^0	f_2^0		$\Delta^2 f_1^0$	$\cdots$	y_2^1	f_2^1		$\cdots$
			Δf_2^0		$\cdots$			Δf_2^1	$\cdots$
x_3	y_3^0	f_3^0		$\Delta^2 f_2^0$	$\cdots$	y_3^1	f_3^1		$\cdots$
			Δf_3^0		$\cdots$			Δf_3^1	$\cdots$
x_4	y_4^0	f_4^0		$\Delta^2 f_3^0$	$\cdots$	y_4^1	f_4^1		$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

为了得到应处于以 * 表示的位置上的数值，必须将处于相应各列中的数值进行外插，或者将这些列的数值由下向上延续.

---

1) [例如，见：И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. I, 1966, гл. II; В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций, 1954; И. Ф. Стефенсен, Теория интерполяции, 1936. ——俄译本编者注.]

这种方法的优点在于，求解过程中的容许误差或微小误差可以自动地修正.

28.5. 阿达姆斯法. 这种方法的基本思想如下：如果对于方程(1)，要在彼此等距离的点 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ ($x_{\nu+1}-x_\nu=h>0$) 上，求满足初始条件 $y_0=\varphi(x_0)$ 的解 $y=\varphi(x)$ 的近似值，那么作为准备阶段，应当对于某几个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (例如，$n=3$)，算出函数 $\varphi(x_\nu)$ 在这些点上的足够精确的近似值 y_ν(需要算得尽可能地精确，关于这个准备阶段如何进行，见 28.6 节(a)). 在完成这一步以后，对于这些 ν 算出数值 $f_\nu=f(x_\nu, y_\nu)$，并且像 28.4 节那样，建立插值多项式 $P(x)$，$P(x)$ 在最后的 m(例如，$m=4$) 个点 x_ν 上取值 f_ν. 将此插值多项式积分(例如，积分限从 x_n 到 x_{n+1})，则得到数量 $\varphi(x_{n+1})$ 的近似值 y_{n+1}. 这就是外插法的第一阶段. 借助于 y_{n+1} 算出 $f(x_{n+1}, y_{n+1})$，现在又可以利用对应于最后 m 个点的插值多项式来计算 y_{n+2}(外插法的第二阶段)，如此等等.

这里仍然可以利用贝塞耳公式作为插值公式，贝塞耳公式经过积分以后具有下列形式：

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} P(x)\,dx = h\sum_{\nu=0}^{m}\left[a_\nu\left(\frac{\xi_2-x_k}{h}\right)-a_\nu\left(\frac{\xi_1-x_k}{h}\right)\right]\nabla^\nu f_k; \quad (2)$$

$P(x)$在点 $x_\nu(\nu=k, k-1, \cdots, k-m+1)$上取值$f_\nu$；这时

$$\nabla^0 f_k=f_k,\quad \nabla^1 f_k=\nabla f_k=f_k-f_{k-1},\quad \nabla^\nu f_k=\nabla(\nabla^{\nu-1} f_k)$$

和

$$a_0(u)=u,\ a_1(u)=\frac{u^2}{2},$$

$$a_2(u)=\frac{u^2}{12}(2u+3),\quad a_3(u)=\frac{u^2}{24}(u+2)^2,$$

$$a_4(u)=\frac{u^2}{720}(6u^3+45u^2+110u+90),$$

$$a_5(u)=\frac{u^2}{1440}(2u^4+24u^3+105u^2+200u+144),$$

$$a_6(u)=\frac{u^2}{60480}(12u^5+210u^4+1428u^3+4725u^2+$$
$$+7672u+5040).$$

这种外插法可以按两种方式进行.

(a) 直接外插法. 这时,利用由(2)推出的公式

$$y_{n+1}-y_n=h\Big[f_n+\frac{1}{2}\nabla f_n+\frac{5}{12}\nabla^2 f_n+\frac{3}{8}\nabla^3 f_n+$$
$$+\frac{251}{720}\nabla^4 f_n+\frac{95}{288}\nabla^5 f_n+\frac{19087}{60480}\nabla^6 f_n+\cdots\Big], \tag{3}$$

或者公式(效果更好)

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\Big[2f_n+\frac{1}{3}(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n+\nabla^4 f_n+\nabla^5 f_n+$$
$$+\nabla^6 f_n)-\frac{1}{90}(\nabla^4 f_n+2\nabla^5 f_n+3\nabla^6 f_n)+\frac{1}{756}\nabla^6 f_n+\cdots\Big], \tag{4}$$

并且利用下列求解格式:

$$\begin{array}{llllllll}
x_{n-3} & y_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \cdots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \cdots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \cdots \\
 & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \cdots \\
x_n & y_n & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & & \\
 & & & \nabla f_{n+1} & & & \\
x_{n+1} & y_{n+1} & f_{n+1} & & & &
\end{array}$$

在阶梯线以上,第二列中所有的数值在准备阶段的计算中已经得知;以后各列不难由第二列算出. 借助于(3)或(4)求出 y_{n+1},以后便可计算阶梯线以下的量. 然后,取 $n+1$ 代替 n,再由(3)或(4)求出 y_{n+2},如此等等.

(b)借助于逐次近似的逐步外插法. 也称为内插法. 在

进行准备阶段的计算以后，由(3)求出第一次进似值 y_{n+1}^0，注意在 (3) 中只取第一项或只取前两项．利用这个第一次近似值，求出下列格式中处于阶梯线下的数值：

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \cdots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \cdots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \cdots \\
 & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1}^0 & \cdots \\
x_n & y_n & f_n & & \nabla^2 f_{n+1}^0 & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n+1}^0 & & \nabla^3 f_{n+1}^1 & \cdots \\
x_{n+1} & y_{n+1}^0 & f_{n+1}^0 & & \nabla^2 f_{n+1}^1 & \cdots\cdots & \\
 & & & \nabla f_{n+1}^1 & \cdots\cdots & & \\
 & y_{n+1}^1 & f_{n+1}^1 & \cdots\cdots & & & \\
 & & & & & \nabla^3 f_{n+1} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & & \nabla^2 f_{n+1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n+1} & & \nabla^3 f_{n+2}^0 & \cdots \\
 & y_{n+1} & f_{n+1} & & \nabla^2 f_{n+2}^0 & & \\
 & & & \nabla f_{n+2}^0 & & & \\
x_{n+2} & y_{n+2}^0 & f_{n+2}^0 & & & &
\end{array}
$$

利用这些数值，按照公式(2)，假设其中 $\xi_1=x_n$，$\xi_2=x_{n+1}$，$k=n+1$，即按照公式

$$
y_{n+1}^1-y_n=h\Big[f_{n+1}^0-\frac{1}{2}\nabla f_{n+1}^0-\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}^0-\frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1}^0-
-\frac{19}{720}\nabla^4 f_{n+1}^0-\frac{3}{160}\nabla^5 f_{n+1}^0-\frac{863}{60480}\nabla^6 f_{n+1}^0+\cdots\Big] \quad (5)
$$

求出第二次近似值 y_{n+1}'，并且用 y_{n+1}^1 代替 y_{n+1}^0，重复进行同样的计算；直到得到足够精确的近似值时为止．

一般说来，当采用这种方法时，近似值很快收斂于数值 y_{n+1}（在大多数情况下只要这样逼近两、三次就足够了），y_{n+1} 又被取作为进一步计算的根据．这种方法的优点是，(5) 式中的系数显然比(3)式中的系数小，所以这种方法通常比方法(a)更为准确．

28.6. 对阿达姆斯法的补充. 为了按照阿达姆斯法进行实际计算,采用逐步外插法比较方便. 这时,可能有此方法的各种变形. 现将其中的某一些列举如下.

(a)当进行准备阶段的计算时,必须对于很少的几个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$(尽量精确地)求出解 $y=\varphi(x)$的近似值. 这常常是可以做到的,如果以幂级数的形式求 $\varphi(x)$,并且将此级数代入方程中,来确定其前几项. 当然,也可以利用其他的一般方法(例如,2.2 节或 28.4 节中那种形式的逐次逼近法,28.3 节那种形式的龙格-霍伊恩-库塔法,等等).

(b)对于只限于考虑三阶差分就足够了的情况(当 h 充分小时),存在 28.5 节方法(b)的下述变形. 当 $k=n+1$ 时,从(2)推出

$$y_{n+1} \approx y_{n-3}+\frac{4}{3}h(2f_n-f_{n-1}+2f_{n-2})=$$

$$=y_{n-3}+4h\left(f_{n-1}+\frac{2}{3}\nabla^2 f_n\right); \tag{6}$$

另一方面,存在辛卜生公式

$$y_{n+1} \approx y_{n-1}+\frac{1}{3}h(f_{n+1}+4f_n+f_{n-1})=$$

$$=y_{n-1}+h\left(2f_n+\frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right). \tag{7}$$

一般说来,第二个公式比第一个公式精确,但是,如果只知道数值 $y_{n-3}, \cdots, y_n$, 用第一个公式便可求出 y_{n+1} 的近似值. 如果足够准确地求出了这些数值,则可以根据公式(6)算出第一次近似值 y_{n+1}^0, 然后利用公式(7),其中假设 $f_{n+1}=f(x_{n+1}, y_{n+1}^0)$,来改善这个近似值.

前四个数值 y_{-1}, y_0, y_1, y_2 的计算(准备阶段的计算)可按下述方式进行:我们从

$$y_{-1}^0=y_0-hf_0,\quad y_1^0=y_0+hf_0,\quad y_2^0=y_0+2hf_0$$

出发，算出f_{-1}^0, f_1^0, f_2^0，后面的近似值可按公式 (6) 进行计算，而下一次的近似值则可根据由 (2) 推出的下列公式来计算：

$$y_2^1=y_0+\frac{1}{3}h(f_2^0+4f_1^0+f_0),$$

$$y_1^1=y_0+\frac{1}{24}h(-f_2^0+13f_1^0+13f_0-f_{-1}^0),$$

$$y_{-1}^1=y_1^1-\frac{1}{3}h(f_1^0+4f_0+f_{-1}^0);$$

然后，借助于原微分方程求出f_2^1, f_1^1, f_{-1}^1，其次，取f_ν^1 代替 f_ν^0，按同样一些公式算出 y_ν^2. 重复进行这样的过程，直到达到预期的精确度时为止。

(c)阿达姆斯法的下述变形也很方便.如果略去较高阶的差分，则当 $\xi_1=x_{n-1}, \xi_2=x_{n+1}, k=n+2$时，由(2)得出：

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\left[2f_n+\frac{1}{3}(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n)\right]+ +\frac{h}{3}\left[\nabla^4 f_{n+1}-\frac{1}{30}\nabla^4 f_{n+2}\right]. \tag{8}$$

如果28.5(b)的求解格式中直到阶梯线以上的部分已被填满，那么，在公式(8)中可以首先抛开第二行，而按照公式

$$y_{n+1}^0-y_{n-1}=h\left[2f_n+\frac{1}{3}(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n)\right] \tag{9}$$

计算 y_{n+1}^0. 从而可以算出$f_{n+1}^0=f(x_{n+1}, y_{n+1}^0)$，并且在表中阶梯线以下填写一斜行数值. 在(9)中以 $n+1$ 代替 n，求出 y_{n+2}^0, f_{n+2}^0，再填写相应的一斜行数值. 以后，可以在公式(8)中对于 y_{n+1}^0 引入修正量

$$\delta_{n+1}=\frac{h}{3}\left[\nabla^4 f_{n+1}^0-\frac{1}{30}\nabla^4 f_{n+2}\right].$$

为了进行下一步，在 (9) 中需要用$n+2$代替 n，算出

y_{n+3}^0，并且填写下面的一斜行数值．然后，可以求出 δ_{n+2}，如此等等．

§29．高阶微分方程的近似积分

§28 中叙述的方法能够应用于一阶微分方程组，这就意味着也能应用于高阶微分方程(见§14)．对于二阶微分方程，由于其重要性，我们来比较详细地分析几种解法．

29.1．一阶微分方程组的近似积分法．

(a)折线法．例如，如果给定方程组

$$y'=f(x, y, z),$$
$$z'=g(x, y, z),$$

则建立积分曲线在平面 xy 和 xz 上的投影，即曲线 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$．

例如，在图 26 上画出了方程组

$$y'=-z, \quad z'=y$$

通过点 $x=0, y=0, z=-1$ 的积分曲线，此积分曲线是按照 28.1 节的折线法画出的(步长大小为 0.1)．小圆圈表示真正积分曲线上的点．

应用 28.2 节的方法情况完全类似．

(b)龙格-库塔法．当将 28.3 节的公式运用到方程组

$$y'(x)=f(x, y, z), \quad z'=g(x, y, z) \tag{1}$$

时，例如，二阶公式给出：

$$k_1=hf(x_\nu, y_\nu, z_\nu), \quad l_1=hg(x_\nu, y_\nu, z_\nu),$$
$$k_2=hf(x_\nu+h, y_\nu+k_1, z_\nu+l_1),$$
$$l_2=hg(x_\nu+h, y_\nu+k_1, z_\nu+l_1),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{2}(k_1+k_2), \quad z_{\nu+1}-z_\nu=\frac{1}{2}(l_1+l_2),$$

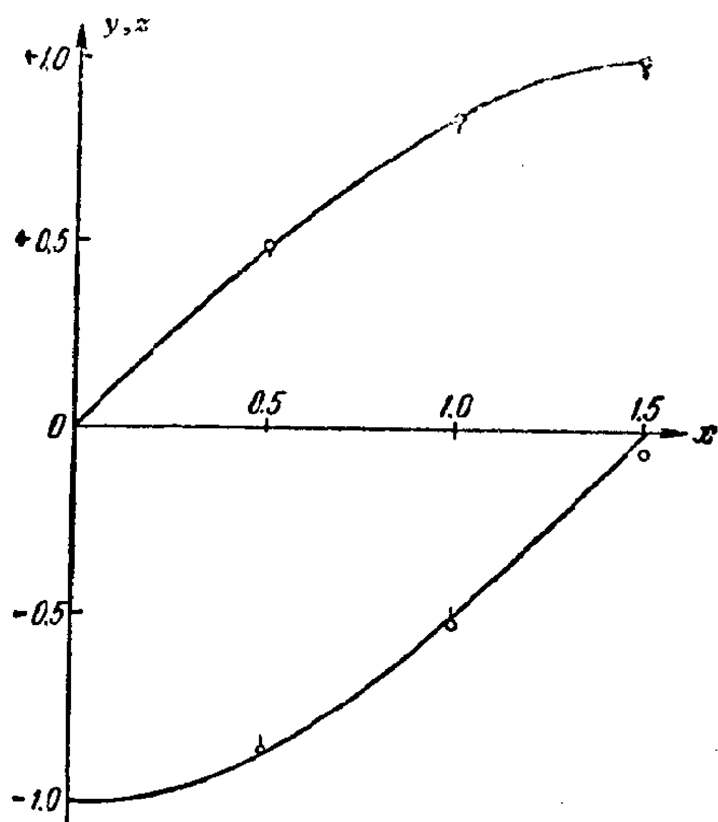


图 26

第一个四阶公式给出：

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu, z_\nu),$$

$$k_2 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \quad y_\nu + \frac{k_1}{2}, \quad z_\nu + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \quad y_\nu + \frac{k_2}{2}, \quad z_\nu + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_\nu + h, y_\nu + k_3, z_\nu + l_3),$$

$$l_1 = hg\ (x_\nu, y_\nu, z_\nu),$$

$$l_2 = hg\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \quad y_\nu + \frac{k_1}{2}, \quad z_\nu + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$l_3 = hg\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \quad y_\nu + \frac{k_2}{2}, \quad z_\nu + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$l_4 = hg(x_\nu + h, y_\nu + k_3, z_\nu + l_3),$$

$$y_{\nu+1}-y_\nu=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$z_{\nu+1}-z_\nu=\frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4).$$

(c) 阿达姆斯法. 这里仍然需要首先对于某些个点 x_0, x_1, $\cdots$, x_n, 得到未知解之值的足够精确的近似值 y_ν, z_ν. 如果对于方程组(1)选用 28.5 节的方法(a), 则可以利用 § 28 的公式(3)(或 § 28(4)), 以及由 § 28 (3), 将 y, f 用 z, g 来代替而得到的另一个公式; 于是得到:

$$f_n=f(x_n,y_n,z_n),\quad g_n=g(x_n,y_n,z_n).$$

除了 28.5 节(a)对于 f 的差分表以外, 还应当列出对于 g 的另一个同样的表格.

29.2. 对于二阶微分方程的折线法. 28.1 节和 28.2 节的方法可以直接应用于二阶方程, 而不是明显地转化为一阶方程组.

这可以按下述方式来进行. 在图 27 上画出了方程(见第三部分 6.43)

$$6y''+yy'=0$$

满足初始条件 $y(2)=6$, $y'(2)=-3$ 的积分曲线.

从给定的 y 和 y' 的初始值以及微分方程, 得到 $y''(2)==3$. 知道了 $y'(2)$ 和 $y''(2)$, 便可求出曲线 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 在点 $x=2$ 的切线. 直到 $x=2.25$ 为止, 可以将这些切线取作为第一次近似, 所以当 $x=2.25$ 时, 从微分方程可以求出 y'' 的值(第一个半步). 把这个近似值取作为数量 y'' 在 $x==2.0$ 到 $x=2.5$ 的区间上的平均值, 并且取作为在此区间上近似于曲线 $y'(x)$ 的线段之方向的更准确的值. 将此近似值在上述区间上积分, 则给出 $y(2.5)$ 的近似值. 这样, 我们得到 y 和 y' 在点 $x=2.5$ 的近似值. 第一步到此结束. 对于下

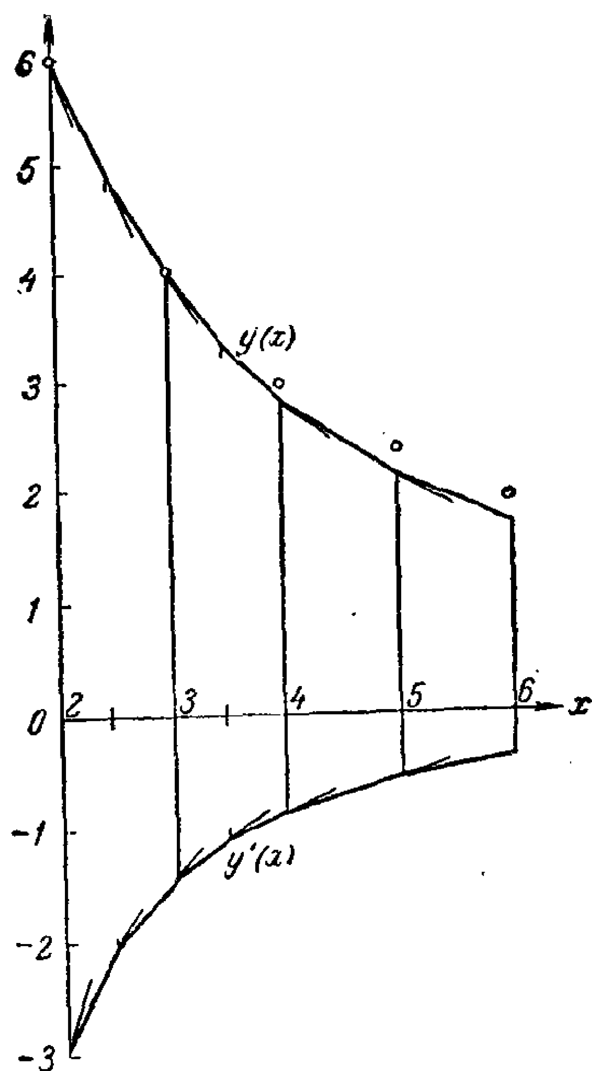


图 27

一个长度为 0.5 的区间也应用同样的方法．以后的两步仍然取步长为 0.5 的区间，接着再进行两步，步长均为 1．小圆圈表示真正积分曲线上的点．

29.3．对于二阶微分方程的龙格-库塔法．

对于方程

$$y''=f(x,\ y,\ y'),\tag{2}$$

下列公式成立：

$$k_1=hf(x_\nu,\ y_\nu,\ y'_\nu),$$

$$k_2=hf\left(x_\nu+\frac{h}{2},\ \ y_\nu+\frac{h}{2}y'_\nu+\frac{h}{8}k_1,\ y'_\nu+\frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3=hf\left(x_\nu+\frac{h}{2},\quad y_\nu+\frac{h}{2}y'_\nu+\frac{h}{8}k_1,\ y'_\nu+\frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4=hf\left(x_\nu+h,\ y_\nu+hy'_\nu+\frac{h}{2}k_3,\ y'_\nu+k_3\right),$$

$$y_{\nu+1}=y_\nu+hA_\nu,\ \text{其中}\ A_\nu=y'_\nu+\frac{1}{6}(k_1+k_2+k_3),$$

$$y'_{\nu+1}=A_\nu+\frac{1}{6}(k_2+k_3+k_4).$$

特别是，对于方程

$$y''=f(x,\ y),\tag{3}$$

这些公式则简化为：

$$k_1=hf(x_\nu,\ y_\nu),$$

$$k_2=hf\left(x_\nu+\frac{h}{2},\quad y_\nu+\frac{h}{2}y'_\nu+\frac{h}{8}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_\nu+h,\quad y_\nu+hy'_\nu+\frac{h}{2}k_2\right),$$

$$y_{\nu+1}=y_\nu+hB_\nu,\ \text{其中}\ B_\nu=y'_\nu+\frac{1}{6}(k_1+2k_2),$$

$$y'_{\nu+1}=B_\nu+\frac{1}{6}(2k_2+k_3).$$

29.4. 对于方程 $y''=f(x,y,y')$ 的阿达姆斯-施特尔默尔法.

(a) 如果在方程(2)中假设 $y'=z$, 则得到两个一阶方程的方程组(1)的特殊情况， 例如可以利用下列公式（见 29.1 节(c)）进行计算：

$$z_{n+1}-z_n=h\left[f_n+\frac{1}{2}\nabla f_n+\frac{5}{12}\nabla^2 f_n+\cdots\right]^{1)}$$

和

---

1) 右端同 §28(3) 一样，只是这里 f 具另一些数值.

$$\nabla^2 y_{n+1} = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} =$$

$$= h^2\left[f_n + \frac{1}{12}\nabla^2 f_n + \frac{1}{12}\nabla^3 f_n + \frac{19}{240}\nabla^4 f_n + \frac{3}{40}\nabla^5 f_n + \right.$$

$$\left. + \frac{863}{12096}\nabla^6 f_n + \cdots\right]. \tag{4}$$

(b) 在利用 28.5 节(b)的逐步外插法时，为了使近似值 y_{n+1} 准确化，建议采用下列公式：

$$\nabla^2 y_{n+1} = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2\left(f_n + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right),$$

$$y'_{n+1} - y'_{n-1} = h\left(2f_n + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right).$$

29.5. 对于方程 $y''=f(x, y)$ 的阿达姆斯-施特尔默尔法.

(a) 在这种情况下，可以只用一个公式(4)进行求解. 这里我们采用下列格式：

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & & \nabla^2 y_{n-2} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \cdots \\
 & & \nabla y_{n-2} & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \cdots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & & \nabla^2 y_{n-1} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \cdots \\
 & & \nabla y_{n-1} & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \cdots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & \nabla^2 y_n & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \cdots \\
 & & \Delta y_n & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \\
x_n & y_n & & \nabla^2 y_{n+1} & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & & \\
 & & \nabla y_{n+1} & & & \nabla f_{n+1} & & & \\
x_{n+1} & y_{n+1} & & & f_{n+1} & & & &
\end{array}$$

在求出处于阶梯线上面的所有数量以后，公式(4)给出数值 $\nabla^2 y_{n+1}$. 因而就可以利用求出的 ∇y_{n+1} 和 y_{n+1} 来计算数量 $f_{n+1}, \Delta f_{n+1}, \cdots$ 下一步是利用公式(4)求出 $\nabla^2 y_{n+2}$, 在公式(4)中用 $n+1$ 代替 n, 如此等等.

(b) 为了解所论类型的方程，如果略去四阶以及更高阶的差分，则可利用下列公式：

$$
\left.
\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n &= y_{n-2}-y_{n-3}+\frac{h^2}{4}(5f_n+2f_{n-1}+5f_{n-2})= \\
&= y_{n-2}-y_{n-3}+h^2\left(3f_{n-1}+\frac{5}{4}\nabla^2 f_n\right), \\
y_{n+1}-y_n &= y_n-y_{n-1}+\frac{h^2}{12}(f_{n+1}+10f_n+f_{n-1})= \\
&= y_n-y_{n-1}+h^2\left(f_n+\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right),
\end{aligned}
\right\}
\quad (5)
$$

如果只是略去六阶以及更高阶的差分，则可利用公式

$$
\left.
\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n &= y_{n-4}-y_{n-5}+\frac{h^2}{48}(67f_n-8f_{n-1}+ \\
&\quad +122f_{n-2}-8f_{n-3}+67f_{n-4}), \\
y_{n+1}-y_n &= y_{n-2}-y_{n-3}+\frac{h^2}{240}(17f_{n+1}+ \\
&\quad +232f_n+222f_{n-1}+232f_{n-2}+17f_{n-3}),
\end{aligned}
\right\}
\quad (6)
$$

在这两组公式的每一组当中，第二个公式通常是比较准确的．按照这些公式来进行计算，其过程同28.6节(b)一样．

(c) 同在28.6节(c)中一样，可以按下列公式进行计算：

$$
\left.
\begin{aligned}
\nabla^2 y_{n+1} &= h^2\left[f_n+\frac{1}{12}(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n)\right]+\delta_{n+1}, \\
\delta_{n+1} &= \frac{h^2}{12}\left[\nabla^4 f_{n+1}-\frac{1}{20}\nabla^4 f_{n+2}\right].
\end{aligned}
\right\}
\quad (7)
$$

如果求解格式(a)阶梯线以上均已填满，则由公式(7)，首先略去 δ_{n+1}，得到近似值 y^0_{n+1}，然后，算出相应的数值 y^0_{n+2}．利用这些近似值，就可以求出修正量 δ_{n+1}．

29.6．对于方程 $y''=f(x,y,y')$ 的布里斯法．

设对于微分方程

$$
y''=f(x,y,y')
$$

的未知解 $y(x)$，在点 x_0 给出解本身的及其导数的初始值 y_0，y'_0．当取固定步长 $h>0$ 时，可以逐步算出未知函数 $y_\nu=y(x_\nu)$

及其导数 $y'_\nu=y'(x_\nu)$，$y''_\nu=y''(x_\nu)$ 之值，并且首先对于 $\nu=1,\cdots,5$，算出这些值．根据给定的初始值，从微分方程求出

$$y''_0=f(x_0, y_0, y'_0).$$

按照泰勒公式近似地得到

$$y_1\approx y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0,\ y'_1\approx y'_0+hy''_0,$$

然后，仍然利用原微分方程求出 y''_1．这样继续下去，便得到下表中前面一些行：

x_0	y_0	hy'_0	$\frac{h^2}{2}y''_0$
x_1	$y_1=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0$	$hy'_1=hy'_0+2\frac{h^2}{2}y''_0$	$\frac{h^2}{2}y''_1$
x_2	$y_2=y_1+hy'_1+\frac{h^2}{2}y''_1$	$hy'_2=hy'_1+2\frac{h^2}{2}y''_1$	$\frac{h^2}{2}y''_2$
x_3	$y_3=y_2+hy'_2+\frac{h^2}{2}y''_2$	$hy'_3=hy'_2+2\frac{h^2}{2}y''_2$	$\frac{h^2}{2}y''_3$
x_4	$y_4=y_3+hy'_3+\frac{h^2}{2}y''_3$	$hy'_4=hy'_3+2\frac{h^2}{2}y''_3$	$\frac{h^2}{2}y''_4$
x_5	$y_5=y_4+hy'_4+\frac{h^2}{2}y''_4$	$hy'_5=hy'_4+2\frac{h^2}{2}y''_4$	$\frac{h^2}{2}y''_5$
修正量	$\delta=\bar{y}_5-y_5$	$\varepsilon=h\bar{y}'_5-hy'_5$	
x_5	$\bar{y}_5$	$h\bar{y}'_5$	$\frac{h^2}{2}\bar{y}''_5$
x_6	$y_6=\bar{y}_5+h\bar{y}'_5+\frac{h^2}{2}\bar{y}''_5$	$hy'_6=h\bar{y}'_5+2\frac{h^2}{2}\bar{y}''_5$	$\frac{h^2}{2}y''_6$

在表达式

$$y_5\approx y_4+hy'_4+\frac{h^2}{2}y''_4$$

中，函数和一阶导数的值，可以借助于此表中间两行，由它们在点 x_0 的值来代替．于是得到

$$y_5 \approx y_0 + 5\,hy_0' + \frac{h^2}{2}(9\,y_0'' + 7\,y_1'' + 5\,y_2'' + 3\,y_3'' + y_4''), \quad (8)$$

如果将二阶导数的值按泰勒公式来表示

$$\frac{h^2}{2} y_\nu'' = \frac{h^2}{2!} y_0'' + 3\,\nu \frac{h^3}{3!} y_0''' + 6\,\nu^2 \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + 10\,\nu^3 \frac{h^5}{5!} y_0^{(5)} + $$

$$+ 15\,\nu^4 \frac{h^6}{6!}\, y_0^{(6)} + \cdots, \quad (9)$$

并且将这些级数代入(8)，则有

$$y_5 \approx y_0 + 5\,hy_0' + 25\,\frac{h^2}{2!} y_0'' + 90\,\frac{h^3}{3!} y_0''' + 420 \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + $$

$$+ 1920 \frac{h^5}{5!} y_0^{(5)} + 8790 \frac{h^6}{6!} y_0^{(6)}.$$

而对于真正的值，泰勒公式直接给出

$$\eta_5 = y_0 + 5\,hy_0' + 25 \frac{h^2}{2!} y_0'' + 125 \frac{h^3}{3!}\, y_0''' + 625 \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + $$

$$+ 3125 \frac{h^6}{5!} y_0^{(5)} + 15625 \frac{h^6}{6!} y_0^{(6)} + \cdots,$$

因而，为了得到真正的值，必须对近似值增添修正量

$$\delta^* = \eta_5 - y_5 = 35 \frac{h^3}{3!} y_0''' + 205\,\frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + 1205 \frac{h^5}{5!} y_0^{(5)} + $$

$$+ 6835 \frac{h^6}{6!} y_0^{(6)} + \cdots,$$

在这个修正量中包含着 y 的高阶导数，而计算这些高阶导数正是需要避免的。所以用量

$$\delta = \bar{y}_5 - y_5 = \frac{5}{24}\,\frac{h^2}{2}(9\,y_4'' + 20\,y_1'' - 29\,y_0'')$$

来代替 δ^*, δ 是这样来选取的，如果把 δ 按泰勒公式展开，利用(9)，得到

$$\delta = 35\frac{h^3}{3!}y_0''' + 205\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)} + \frac{3725}{3}\frac{h^5}{5!}y_0^{(5)} + $$

$$+ \frac{14525}{2}\frac{h^6}{6}y_0^{(6)} + \cdots,$$

其中前两项与 δ^* 相应的两项正好相同，以后两项同 δ^* 的相应两项差别不大，大约是 3%和 6%。

相应地得到在数量 hy_5' 上增加的修正量：

$$\varepsilon = h\bar{y}_5' - hy_5' = \frac{1}{12}\frac{h^2}{2}(11\,y_5'' + 5\,y_1'' - 16\,y_0'').$$

下一步计算是在数值 y_5, hy_5' 上增加修正量 δ, ε; 设 $\bar{y}_5$, $h\bar{y}_5'$ 是相应的修正过的数值. 用 x_5 代替 x_0，借助于这些数值，可以继续进行计算，对于 $x = x_6, \cdots, x_{10}$, 求出数量 y, y', y'' 的几组新的数值；在点 x_{10} 得到的数值，如上面对于 x_5 处的数值所做过的那样进行修正，如此等等。

第二部分　边值问题和特征值问题

第一章　n 阶线性微分方程的边值问题和特征值问题[1)]

关于低阶方程，首先是二阶方程的边值问题和特征值问题，已知的个别的特殊结果，要比可由下述一般理论得到的结果多得多。从这些特殊问题中获得的大量事实，可以得到研究更一般问题时的某些出发点。也可以引用这些比较特殊的问题，特别是最简单的问题——具有任何边界条件的方程 $y''+\lambda y=0$，作为实例，来说明一般理论。目前在工程问题和物理问题中所遇到的一些边值问题和特征值问题，大多数是自共轭的，并且可以归结为二阶方程或四阶方程；其中，弹性杆件的纵向振动和扭转振动问题中得到的是二阶方程，而杆件的横向振动问题中得到的是四阶方程。

§ 1. 边值问题的一般理论

1.1. 表示法和初步注记. 设函数 $f(x)$ 和 $f_\nu(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的，并且 $f_n(x)\neq 0$. 借助于这些函数构成齐次微分型

1) [目前已有论述边值问题和特征值问题理论的大量著作。为了更详细地了解这一理论，可以阅读下列书籍，其中包含证明和进一步的参考书目：Ince；Наймарк：Courant 和 Hilbert；Sansone；Tricomi；F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, 1964（俄译本：Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, 1968)；Coddington 和 Levinson.——俄译本编者注.]

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} \tag{1}$$

和线性微分方程

$$L(y)=f(x); \tag{2}$$

对应的齐次方程具有下列形式：

$$L(y)=0. \tag{3}$$

选取常数 $\alpha_\mu^{(\varkappa)}, \beta_\mu^{(\varkappa)}$，使得矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} \cdots & \alpha_1^{(n-1)} & \beta_1^{(0)} \cdots & \beta_1^{(n-1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_m^{(0)} \cdots & \alpha_m^{(n-1)} & \beta_m^{(0)} \cdots & \beta_m^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

的秩为 m，对于某一个 $n-1$ 次连续可微函数 $y(x)$ 建立表达式

$$U_\mu(y)=\sum_{\varkappa=0}^{n-1}[\alpha_\mu^{(\varkappa)} y^{(\varkappa)}(a)+\beta_\mu^{(\varkappa)} y^{(\varkappa)}(b)]$$

$$(\mu=1, \cdots, m). \tag{5}$$

由于对矩阵(4)的秩所作的假设，这些表达式作为 $y^{(\varkappa)}(a)$ 和 $y^{(\varkappa)}(b)$ 的函数彼此线性无关。借助于表达式 U_μ 和给定的数 γ_μ，可以组成**边界条件**

$$U_\mu(y)=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, m). \tag{6}$$

如果所有的 $\gamma_\mu=0$，则这些边界条件称为**齐次的**。

微分方程(2)和边界条件 (6) 一起，构成**边值问题**。解边值问题，就是寻找微分方程 (2) 的解 $y=\varphi(x)$，使得当 $\mu=1, \cdots, m$ 时，$U_\mu(\varphi)=\gamma_\mu$。

如果微分方程和边界条件都是齐次的，则边值问题称为**齐次的**；在其他任何情况下，边值问题都称为**非齐次的**；如果 $\gamma_\mu=0$，但是 $f(x)\neq 0$，边值问题有时称为**半齐次的**。

在这种一般的表述之下，边值问题的概念也包含通常的

柯西问题(在点 a 给定函数及其前 $n-1$ 阶导数之值)。

显然,函数 $\varphi(x)\equiv 0$ 是任何齐次边值问题的解;这个解称为**平凡解**. 齐次边值问题的解,只要 $\neq 0$,则称为**非平凡解**.

如果 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 是某一个齐次边值问题的解,则它们的任何线性组合 $C_1\varphi_1+\cdots+C_k\varphi_k$ (具有任意系数 C_ν),也是这个齐次边值问题的解.

因为齐次方程(3)具有 n 个线性无关的解,由这些解借助于线性组合可以得到此方程的任何解,那么对于每一个齐次边值问题,只要它具有非平凡解,则存在一组 k 个线性无关的解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, 使得此边值问题的任何解都可以表示为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的线性组合;在这种情况下,齐次边值问题称为 k 重可解的;数 k 称为**可解性的重数**,或**边值问题的指数**. 例如,边值问题

$$y''=0, \quad y(0)+y'(0)=y(1), \quad y'(0)=y'(1)$$

具有指数 2,因为 1 和 x 都是此问题的解. 如果齐次边值问题没有非平凡解,则假设 $k=0$.

设 φ_1, φ_2 是非齐次边值问题的两个不同的解,则 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ 显然是对应的齐次边值问题的非平凡解.

如果 ψ_0 是非齐次边值问题的某一个解,则任何解都可以表示为 $\psi=\psi_0+\varphi$ 的形式,其中 φ 是对应的齐次边值问题的解.

1.2. 边值问题的可解性条件. 存在没有任何一个解的边值问题[1]. 如果已知方程(2)的解 φ_0 和方程(3)的基本解组 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 则边值问题(2),(6)是可解的,并且具有下列形式的解:

$$\varphi=\varphi_0+c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n,$$

---

1) 例如: $y''=0$, $y(a)-y(b)=1$, $y'(a)+y'(b)=0$.

当且仅当系数 c_ν 可以这样选择，即使得 φ 能够满足边界条件(6).因此可知：为了使边值问题是可解的，其充分和必要条件是，矩阵

$$\begin{pmatrix} U_1(\varphi_1) & \cdots & U_1(\varphi_n) & U_1(\varphi_0)-\gamma_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_m(\varphi_1) & \cdots & U_m(\varphi_n) & U_m(\varphi_0)-\gamma_m \end{pmatrix}$$

和矩阵

$$\begin{pmatrix} U_1(\varphi_1) & \cdots & U_1(\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_m(\varphi_1) & \cdots & U_m(\varphi_n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

具有同样的秩.

如果矩阵(7)的秩等于 r，则对应的齐次边值问题是 $n-r$ 重可解的；因而，如果 $m<n$，在任何情况下，此边值问题都具有非平凡解，如果 $m=n$，则当且仅当

$$\begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & \cdots & U_1(\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(\varphi_1) & \cdots & U_n(\varphi_n) \end{vmatrix}=0$$

时，此边值问题具有非平凡解.由此可得下述重要事实：当 $m=n$ 时，或者给定的非齐次边值问题仅仅具有一个解，或者对应的齐次边值问题至少具有一个非平凡解.

1.3. 共轭边值问题. 现在假设，函数 $f_\nu(x)$，$\nu=1,2,\cdots,n$，具有直到 ν 阶的连续导数[1)]；这时，可以构造与 L 共轭的微分型

1) 这个假设可以减弱，如果 L 可以表示为下列形式：

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{h}[f_\nu(x)y^{(r_\nu)}]^{(s_\nu)}, \tag{*}$$

其中 $r_{\nu+1}+s_{\nu+1}>r_\nu+s_\nu$ 和 $r_h+s_h=n$。这时，对于 f_ν，例如只要求存在直到 $\max(r_\nu, s_\nu)$ 阶的连续导数就够了；因而，特别是如果

$$L^*(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}(f_\nu y)^{(\nu)}. \tag{8}$$

对于 n 次连续可微函数 $u(x), v(x)$，下列**拉格朗日恒等式**成立(见第一部分 17.6 节)：

$$vL(u)-uL^*(v)=\frac{d}{dx}\mathscr{L}[u,v], \tag{9}$$

其中

$$\mathscr{L}[u,v]=\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{p+q=r}(-1)^p u^{(q)}(f_{r+1}v)^{(p)}. \tag{10}$$

由此得到**格林公式**

$$\int_a^b[vL(u)-uL^*(v)]dx=\mathscr{L}[u,v]|_a^b; \tag{11}$$

这个表达式的右端是由

$$\left.\begin{aligned}&u(a),u'(a),\cdots,u^{(n-1)}(a),u(b),u'(b),\cdots,u^{(n-1)}(b),\\&v(a),v'(a),\cdots,v^{(n-1)}(a),v(b),v'(b),\cdots,v^{(n-1)}(b),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

构成的双线性微分型，并且此双线性微分型的行列式$\neq 0$.

设给定边值问题

$$L(u)=f(x);\quad U_\mu(u)=\gamma_\mu\quad(\mu=1,\cdots,m). \tag{13}$$

因为矩阵(4)之秩为 m，所以可向此矩阵补充 $2n-m$ 行，从而得到行列式不为零的方阵. 因此，由这个方阵构成的方程组

$$U_\mu=\sum_{\varkappa=0}^{n-1}[\alpha_\mu^{(\varkappa)}u^{(\varkappa)}(a)+\beta_\mu^{(\varkappa)}u^{(\varkappa)}(b)]\quad(\mu=1,\cdots,2n)$$

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{h}[f_\nu(x)y^{(\nu)}]^{(\nu)}\quad(n=2h),$$

则只要存在直到 ν 阶连续导数就够了，虽然按照正文这里本来要求存在直到 2ν 阶连续导数。公式(9)—(11)，以及后面在 1.3 节和 1.4 节中包含的所有结论，对于微分型(*)，以及根据第一部分 17.5 节和 17.6 节所建立起来的共轭微分型和双线性微分型 L^*，$\mathscr{L}$，仍然有效，而不必做任何变动。

可以解出 $u^{(\varkappa)}(a), u^{(\varkappa)}(b)$.

如果将这样通过 U_μ 表示的数值 $u^{(\varkappa)}(a)$ 和 $u^{(\varkappa)}(b)$代入公式(11)的右端,则得到关系式

$$\int_a^b [vL(u)-uL^*(v)]dx = U_1V_{2n}+U_2V_{2n-1}+\cdots+U_{2n}V_1,$$

其中 V_μ 是关于(12)的第二行中的那些量的线性微分型. 边值问题

$$L^*(v)=0;\ V_\mu(v)=0\quad(\mu=1,\cdots 2n-m)\qquad(13^*)$$

称为与边值问题(13)是**共轭的**. 可证,共轭边值问题同采取什么方式将矩阵(4)补充为方阵这一点是无关的.

例. 设给定边值问题

$$u''+g(x)u=0;\ u(a)+2u(b)=0,\ 2u'(a)+u'(b)=0,$$

这里

$$L(u)=L^*(u)=u''+gu,\ \mathscr{L}[u,v]=u'v-uv',$$
$$U_1=u(a)+2u(b),\ U_2=2u'(a)+u'(b),$$

例如可以假设

$$U_3=u(b),\ U_4=u'(a),$$

于是

$$\mathscr{L}[u,v]_a^b=u'(b)v(b)-u(b)v'(b)-u'(a)v(a)+u(a)v'(a)=$$
$$=v'(a)U_1+v(b)U_2-[2v'(a)+v'(b)]U_3-[v(a)+2v(b)]U_4.$$

因而

$$V_1=-v(a)-2v(b), V_2=-2v'(a)-v'(b), V_3=v(b),\ V_4=v'(a).$$

共轭边界条件具有下列形式:

$$v(a)+2v(b)=0,\quad 2v'(a)+v'(b)=0,$$

即同原边界条件是一样的.

如果原边值问题(13)中的边界条件是齐次的,则共轭边界条件具有下述性质:对于相应地满足(13)以及(13^*)的边界条件的任何一组数(12),双线性微分型 $\mathscr{L}$ 等于零,因而对于相应地满足原边界条件和共轭边界条件的任何两个函数

$u(x)$, $v(x)$, 等式

$$\int_a^b [vL(u)-uL^*(v)]dx=0$$

成立.这个重要性质是共轭边界条件所特有的。

当且仅当对于边值问题(13*)的每一个解 $\psi(x)$, 等式

$$\int_a^b \psi(x)f(x)dx=\gamma_1 V_{2n}(\psi)+\cdots+\gamma_m V_{2n-m+1}(\psi)$$

成立时，边值问题(13)是可解的. 如果齐次边值问题

$$L(u)=0;\quad U_\mu(u)=0\quad(\mu=1,\cdots,m)\tag{13_0}$$

可解性的重数为 k,而对于(13*)的相应的重数为 k^*, 则有

$$k^*=k+m-n.$$

因而，如果 $m=n$,则使得边值问题(13_0)和(13*)中的每一个是可解的,其充分和必要条件为另一个也是可解的;并且这两个边值问题具有同样的可解性的重数.

以后我们将总是假设 $m=n$.

1.4.自共轭边值问题. 齐次边值问题

$$L(u)=0;\quad U_\mu(u)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)\tag{14}$$

称为是自共轭的，如果此边值问题和与其共轭的边值问题

$$L^*(u)=0;\quad V_\mu(u)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)\tag{14*}$$

(其中 v 用 u 来代替)在下述意义下是相同的：第一，$L(u)=$ $=L^*(u)$, 即 $L(u)$是自共轭微分型(见第一部分 17.5 节)，第二,(14)和(14*)的边界条件是等价的，即满足(14)的边界条件的每一组数

$$u(a),u'(a),\cdots,u^{(n-1)}(a),u(b),u'(b),\cdots,u^{(n-1)}(b),\tag{15}$$

也满足(14*)的边界条件,反之亦然.

为了判别给定的边值问题是否是自共轭的，大多数情况

下可以利用下述准则：边值问题(14)是自共轭的，当且仅当 $L(u)=L^*(u)$，此外，对于任何两组数——(15)和

$$v(a), v'(a), \cdots, v^{(n-1)}(a), v(b), v'(b), \cdots, v^{(n-1)}(b), \tag{15a}$$

二者全都满足(14)的边界条件，——等式

$$\mathscr{L}[u, v]|_a^b=0$$

成立，其中 $\mathscr{L}[u, v]$ 是处于格林公式(11)中的双线性微分型。

设 $L(u)$ 具有常系数，并且 $L(u)=L^*(u)$。具有周期边界条件的边值问题

$$L(u)=0;\quad u^{(\nu)}(a)=u^{(\nu)}(b)\quad (\nu=0,1,\cdots,n-1)$$

是自共轭的。相反，具有初始条件的问题(柯西问题)

$$L(u)=0;\quad u(a)=0,\quad u'(a)=0,\ \cdots,\ u^{(n-1)}(a)=0$$

不是自共轭的边值问题。

还必须指出，可以从1.3节后一部分得出下述重要事实．半齐次边值问题

$$L(u)=f(x);\quad U_\mu(u)=0\quad (\mu=1, \cdots, n)$$

如果是这样的，即与其对应的齐次边值问题是自共轭的，则当且仅当对于齐次边值问题的每一个解 $\psi(x)$，等式

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=0$$

成立时，它才是可解的。

1.5．格林函数． 设给定齐次边值问题

$$L(y)=0;\quad U_\mu(y)=0\quad (\mu=1, \cdots, n), \tag{16}$$

并且对于函数 f_ν 除了连续性以外，仍然什么也不要求．定义在正方形 $a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$ 内的函数 $\Gamma(x, \xi)$ 称为此边值问题的格林函数或影响函数，如果这个函数是给定的微分方程的基本

解(见第一部分 17.4 节)，并且对于每一个固定的ξ, $a<\xi<b$, 作为 x 的函数，满足(16)的边界条件.

如果齐次边值问题(16)只有平凡解 $y\equiv 0$，则对此问题存在唯一的格林函数. 如果已知方程 $L(y)=0$ 的基本解组 $y_1(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$, 则可按下述方式来建立格林函数. 对于每一个 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 求出线性微分方程组

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu^{(\varkappa)}(\xi)=0 \quad (\varkappa=0,\cdots,n-2), \\ \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu^{(n-1)}(\xi)=\frac{1}{f_n(\xi)} \end{cases}$$

的解 $c_1(\xi)$, $\cdots$, $c_n(\xi)$，然后求出方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu U_\mu(y_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu U_{\mu,a}(y_\nu) \quad (\mu=1,\cdots,n)$$

的解 $b_1(\xi)$, $\cdots$, $b_n(\xi)$, 其中 $U_{\mu,a}$, $U_{\mu,b}$ 分别表示表达式

$$U_\mu(y)=U_{\mu,a}(y)+U_{\mu,b}(y)$$

中与 a 和与 b 有关的部分. 最后，假设 $a_\nu=b_\nu-c_\nu$. 这时

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\xi)y_\nu(x) & \text{当 } a\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b \text{ 时}, \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(\xi)y_\nu(x) & \text{当 } a\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b \text{ 时}. \end{cases}$$

按照第一部分 17.4 节中的表示法，也可以写为

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{Z(x,\xi)}{\Delta}, \tag{17}$$

其中

$$Z=\begin{vmatrix} g(x,\xi) & y_1(x)\cdots y_n(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1)\cdots U_1(y_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ U_n(g) & U_n(y_1)\cdots U_n(y_n) \end{vmatrix},$$

而 Δ 表示行列式

$$\Delta=\operatorname{Det}|U_p(y_q)| \quad (p, q=1, \cdots, n).$$

一般说来，当 $\xi=a$ 和 $\xi=b$ 时，表达式(17)并不成立．但是在这种情况下有

$$\Gamma(x, a)=\lim_{\xi\to a}\Gamma(x, \xi) \quad 和 \quad \Gamma(x, b)=\lim_{\xi\to a}\Gamma(x, \xi).$$

例子见第三部分 2.1，2.6，2.14，4.1。

如果齐次边值问题(16)只有平凡解 $y\equiv 0$，则根据 1.3 节的后一部分，对于共轭边值问题也有同样的情况．因此，对于共轭边值问题也存在格林函数 $\overline{\Gamma}(x, \xi)$，并且

$$\overline{\Gamma}(x, \xi)=\Gamma(\xi, x).$$

如果齐次边值问题(16)是自共轭的，因而 $\Gamma(x, \xi)=\Gamma(\xi, x)$，即 $\Gamma(x, \xi)$ 是对称函数． 如果所讨论的微分方程是反自共轭的(见第一部分 17.5 节)，则有 $\Gamma(x, \xi)=-\Gamma(\xi, x)$.

1.6．借助于格林函数解非齐次边值问题． 设给定半齐次边值问题：

$$L(y)=f(x); \; U_\mu(y)=0 \quad (f\not\equiv 0; \; \mu=1, \cdots, n), \tag{18}$$

并且设对应的齐次边值问题只有平凡解． 如果 $\Gamma(x, \xi)$ 是在 1.5 节中定义的格林函数，则

$$y(x)=\int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{19}$$

是半齐次边值问题(18)的解．因此，利用公式(19)，对于任何函数 $f(x)$，可以立刻写出相应边值问题的解.

解更一般的边值问题

$$L(y)=f(x); \; U_\mu(y)=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, n), \tag{20}$$

可以化为解某一个特定的简单边值问题． 这就是说， 如果 $\psi_k(x)$ 是边值问题

$$L(y)=0;\ U_k(y)=1,\ U_\mu(y)=0\ (\mu \neq k;\ \mu=1, \cdots, n) \tag{21}$$

的解，则

$$y=\int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi+\sum_{k=1}^n \gamma_k \psi_k(x)$$

是边值问题(20)的解.

最后，为了解边值问题(21)，只须找出方程 $L(y)=0$ 的基本解组 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 并且选择常数 c_ν, 使得 $\psi_k(x)=c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n$ 是边值问题(21)的解.

1.7. 广义的格林函数[1]. 在1.5节中，格林函数是在齐次边值问题(16)没有非平凡解的情况下建立的. 但是，如果将格林函数的定义作一些改变，则可以使得当(16)具有非平凡解时，半齐次边值问题(18)的解仍然能写成(19)的形式.

例如，设齐次边值问题(16)是 k 重可解的；这时，存在广义的格林函数 $\tilde{\Gamma}(x, \xi)$, 当 $a<\xi<b$ 时，$\tilde{\Gamma}(x, \xi)$ 作为 x 的函数满足(16)的边界条件，并且具有基本解的性质(α),(γ),(δ)(见第一部分17.4节)，而条件(β)应作如下改变：

(β^*) 对于固定的 ξ, 在区域 $a \leqslant x \leqslant \xi$ 和 $\xi \leqslant x \leqslant b$ 每一个当中，$\tilde{\Gamma}(x, \xi)$ 是微分方程

$$L(y)=-\sum_{\rho=1}^k \varphi_\rho(x) v_\rho(\xi) \tag{22}$$

的解；这里 $v_1(x), \cdots, v_k(x)$ 是同(16)共轭的边值问题的一

---

1) 详见 D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1912; Courant 和 Hilbert, 卷 I; W. W. Elliott, *Americ. Journ. Math.* **50**(1928), p. 243—258; **51**(1929), p. 397—416. [也可参阅 С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1954. (有中译本: С. Л. 索伯列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1958.). ——俄译本编者注.]

组线性无关的解，而 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)$ 是满足下列双正交性条件的任意一组连续函数（见 2.2 节）：

$$\int_a^b \varphi_p(x) v_q(x) dx = e_{p,q} \quad (p, q=1, \cdots, k)$$ [1]。

这时，

$$y(x) = \int_a^b \tilde{\Gamma}(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{23}$$

是半齐次边值问题 (18) 的解，只要此边值问题一般是可解的。

如果 $\tilde{\Gamma}_0(x, \xi)$ 是广义的格林函数之一， 则任何广义的格林函数可以表示为下列形式：

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi) = \tilde{\Gamma}_0(x, \xi) + \sum_{\rho=1}^{k} u_\rho(x) \psi_\rho(\xi),$$

其中 $u_1, \cdots, u_k$ 是齐次边值问题 (16) 的某一组线性无关的解，而 $\psi_1(x), \cdots, \psi_k(x)$ 是一些任意的连续函数。

如果给定 φ_ρ 和 ψ_ρ，并且如果

$$\operatorname{Det}\left| \int_a^b u_p(x) \psi_q(x) dx \right| \neq 0 \quad (p, q=1, \cdots, k),$$

则存在一个且仅存在一个广义的格林函数 $\tilde{\Gamma}$，对于这个函数

$$\int_a^b \tilde{\Gamma}(x, \xi) \psi_\rho(x) dx = 0 \quad (\rho=1, \cdots, k).$$

1）如果齐次边值问题(16)是自共轭的，则可选择 k 个线性无关的解 $u_1, \cdots, u_k$，使得

$$\int_a^b u_p(x) u_q(x) dx = e_{p,q};$$

这时可以假定 $\varphi_p = v_p = u_p$。

在这种情况下，共轭边值问题的广义的格林函数等于$\Gamma(x,\xi)=\tilde{\Gamma}(\xi,x)$。

为了建立广义的格林函数，可以采用类似于1.5节叙述的方法. 假设

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi)=\Phi(x,\xi)+\begin{cases}\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu(\xi)u_\nu(x) & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},\\ \sum\limits_{\nu=1}^{n}b_\nu(\xi)u_\nu(x) & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时},\end{cases}$$

其中$\Phi(x,\xi)$是方程(22)的这样的解，这个解及其前$n-1$阶导数在点$x=a$都等于零；$u_1,\cdots,u_k$是齐次边值问题(16)的线性无关的解；而$u_{k+1},\cdots,u_n$是方程$L(y)=0$的解，这些解同$u_1,\cdots,u_k$一起构成此方程的基本解组。这时，a_ν, b_ν可以采用同1.5节相类似的步骤来确定，并且应当考虑到$u_1,\cdots,u_k$已经满足边界条件。例子见第三部分2.1,4.1.

为了实际求解半齐次边值问题(18)，使用下面的格林函数公式最为方便。如果齐次边值问题(16)是k重可解的，则当$a<\xi<b$时，

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi)=\frac{Z(x,\xi)}{\Delta},$$

其中

$$Z(x,\xi)=\begin{vmatrix}g(x,\xi) & u_{k+1}(x) & \cdots & u_n(x)\\ U_{k+1}(g) & U_{k+1}(u_{k+1}) & \cdots & U_{k+1}(u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_n(g) & U_n(u_{k+1}) & \cdots & U_n(u_n)\end{vmatrix};$$

$$\Delta=\operatorname{Det}|U_\mu(u_\nu)|\quad(\mu,\nu=k+1,\cdots,n);$$

$g(x,\xi)$是方程$L(y)=0$的基本解，而$u_{k+1},u_{k+2},\cdots,u_n$是此方程不满足(16)的边界条件的线性无关的解。这时，边界

条件应如此编号，使得$\Delta \neq 0$。

§2. 方程 $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} + \lambda g(x) y = f(x)$ 的边值问题和特征值问题

2.1. 特征值和特征函数；特征行列式 $\Delta(\lambda)$. 设 $L(y)$ 和 $U_\mu(y)$ 的意义同在 1.1 节的一样，设函数 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续的，并且$\neq 0$。我们研究含有某一个参数 λ 的一般边值问题

$$L(y) + \lambda g(x) y = f(x);\ U_\mu(y) = \gamma_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

和齐次边值问题

$$L(y) + \lambda g(x) y = 0;\ U_\mu(y) = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, n). \tag{2}$$

在齐次边值问题(2)中，常常要求确定参数 λ 的一些值，对于这些值，齐次边值问题(2)具有非平凡解(**特征值问题**)。这些参数值称为**特征值**，特征值的集合称为**特征值问题的谱**，而对应的齐次边值问题 (2) 的非平凡解称为此边值问题的**特征函数**。

如果对于某一个参数值，齐次边值问题(2)是 k 重可解的(见 1.1 节)，则认为此特征值是 k **重的**。

如果

$$\varphi_1(x, \lambda), \cdots, \varphi_n(x, \lambda)$$

是(2)的微分方程的基本解组，并且

$$\varphi_p^{(q)}(a, \lambda) = e_{p, q+1} \quad (p = 1, \cdots, n;\ q = 0, \cdots, n-1),$$

则

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Det}|U_\mu(\varphi_\nu)| \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

称为**特征值行列式**. 从 1.2 节可知，特征值不是别的，正是表达式 $\Delta(\lambda)$ 的零点. 特征值 λ_0 的重数小于或等于作为函数

$\Delta(\lambda)$之根的λ_0的重数[1]. $\Delta(\lambda)$是λ的整函数(一般说来,是超越函数). 可能会有这种情况: $\Delta(\lambda)\equiv 0$,即每一个λ都是特征值[见第三部分2.9(e)]. 如果$\Delta(\lambda)\not\equiv 0$,则全体特征值不会超过可数个,因为不恒等于零的整函数的零点不会多于可数个. 同时我们看到,特征值连续地依赖于微分方程和边界条件,这连续依赖的意义一般应理解为零点也可能是多重的.

例. 对于特征值问题

$$y''+\lambda y=0;\ y(a)=y(b),\ y'(a)=y'(b)$$

应当假设

$$\varphi_1=\begin{cases}\cos kx, \\ 1, \\ \operatorname{ch} kx,\end{cases}\quad \varphi_2=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\sin kx & 当\ \lambda=k^2>0, \\ x & 当\ \lambda=0, \\ \dfrac{1}{k}\operatorname{sh} kx & 当\ \lambda=-k^2<0.\end{cases}$$

这时

$$\Delta(\lambda)=\begin{cases}2-2\cos k(b-a), \\ 0, \\ 2-2\operatorname{ch} k(b-a),\end{cases}$$

即特征值构成序列

$$\lambda_m=\left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^2,\quad m=0,1,2,\cdots,$$

并且当$m\neq 0$时,所有的λ_m都是二重的. 见第三部分,2.9.

---

1) 这两个重数不一定相同; 例如, $\lambda=0$ 是特征值问题

$$y''=\lambda(y);\ y(0)-y(1)+\frac{1}{2}y'(1)=0,\ y'(0)=0$$

的简单特征值, 但是它却是相应的行列式

$$\Delta(\lambda)=1-\operatorname{ch}k+\frac{1}{2}k\operatorname{sh}k\quad (k^2=\lambda)$$

的二重根.

以后将要讨论特征值问题的下述两个基本理论问题.

关于求特征值的问题. 对于齐次边值问题(2),作怎样的假设时,一般都会存在特征值?在什么情况下有无穷多个特征值?什么时候特征值是实的?对于特征值的大小可以作怎样的论断?

关于按特征函数展开的问题. 如果 u_ν 是齐次边值问题(2)的特征函数,那么,在怎样的条件下,给定的函数 $F(x)$ 可以按函数 $u_\nu(x)$ 展开为(收敛的)级数

$$F(x)=\sum c_\nu u_\nu(x).$$

2.2. 共轭特征值问题和格林豫解式;完备双正交系. 现在设每一个函数 f_ν 具有 ν 阶连续导数[1]. 这时对于微分方程

$$L(u)+\lambda gu=0$$

可以建立共轭方程,根据第一部分 17.5 节,此共轭方程具有下列形式[2]:

$$L^*(v)+\lambda gv=0.$$

因为双线性微分型 $\mathscr{L}[u,v]$ (见 1.3 节)不包含 $f_0+\lambda_g$,所以同齐次边值问题(2)共轭的边值问题具有下列形式:

$$L^*(y)+\lambda g(x)y=0;V_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n),\qquad(4)$$

其中 V_μ 仍然表示 1.3 节中所求出的表达式,并且既不依赖于 λ,也不依赖于 g.

从 1.3 节可知,齐次边值问题(2)和共轭边值问题(4)具有同样的一些特征值,并且在两种情况下特征值的重数是相同的.

如果 λ,λ^* 是两个不同的特征值,$u(x)$ 是齐次边值问题

---

1) 或者 L 应为 1.3 节脚注中指出的那种形式的微分型,并且满足那里所叙述的条件.

2) [对于实的 λ. ——俄译本编者注.]

(2) 对应于 λ 的特征函数，$v^*(x)$ 是共轭边值问题(4) 对应于 λ^* 的特征函数，则从格林公式可以得到下列双正交性关系式：

$$\int_a^b g(x)u(x)v^*(x)dx = 0\ .$$

如果 λ_0 是 k 重的特征值，则有边值问题(2) 的一组线性无关的特征函数 $u_1, \cdots, u_k$ 和边值问题(4) 的一组线性无关的特征函数 $v_1, \cdots, v_k$ 与 λ_0 相对应，并且这时

$$\int_a^b g(x)u_p(x)v_q(x)dx = 0 \quad \text{当}\ p \neq q\ \text{时}. \tag{5}$$

如果 $\Delta(\lambda) \neq 0$，那么一般只要特征函数存在，则总会有特征函数的完备双正交系

$$\begin{cases} u_1(x), & u_2(x), \cdots, \\ v_1(x), & v_2(x), \cdots, \end{cases} \tag{6}$$

即分别为边值问题(2) 和边值问题(4) 的不多于可数个的特征函数的集合，使得对应于某一个特征值 λ 的每一个特征函数 $u(x)$，可以表示为对应于该 λ 的有限个上述函数 u_p 的线性组合(对于 v 也有同样情况)，并且这时关系式(5) 成立.

如果 $\Delta(\lambda) \neq 0$，则对于每一个不是特征值的 λ，根据 1.5 节，可以建立格林函数(格林豫解式) $\Gamma(x, \xi, \lambda)$. $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 是 λ 的半纯函数；只有特征值才可能是此函数的极点，并且在点 λ 处极点的重数小于或等于作为函数 $\Delta(\lambda)$ 之零点的 λ 的重数. 如果 λ_0 是 k 重特征值，而 $u_1, \cdots, u_k$ 和 $v_1, \cdots, u_k$ 是对应于 λ_0 的特征函数双正交系，并且 λ_0 是 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 的一阶极点，则有

$$\int_a^b g(t)u_p(t)v_p(t)dt \neq 0 \quad (p = 1, \cdots, k), \tag{7}$$

而函数 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 相对于点 λ_0 的残数等于

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{u_p(x) v_p(\xi)}{\int_a^b g(t) u_p(t) v_p(t) dt}. \tag{8}$$

这一点对于按特征函数展开给定的函数是很重要的（见 2.5 节）。

2.3. 规范化的边界条件；正则特征值问题. 通过对于(2)的边界条件进行线性变换，可以得到

$$U_\mu(y) = U_{\mu,a}(y) + U_{\mu,b}(y),$$

其中 $U_{\mu,a}$, $U_{\mu,b}$ 具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned} U_{\mu,a}(y) &= \alpha_\mu y^{(k_\mu)}(a) + \sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} \alpha_{\mu,\nu} y^{(\nu)}(a), \\ U_{\mu,b}(y) &= \beta_\mu y^{(k_\mu)}(b) + \sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} \beta_{\mu,\nu} y^{(\nu)}(b), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$|\alpha_\mu| + |\beta_\mu| > 0,$$

$$n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n \geqslant 0, k_{\mu+2} > k_\mu$$

（**规范化的边界条件**）.

当 $g(x) \neq 0$ 时，可以按下述方式从这些边界条件中划分出某一类．方程

$$f_n(x)\omega^n + g(x) = 0$$

的解是 n 个连续函数 $\omega_1(x), \cdots, \omega_n(x)$．它们可以这样编号，即使得对某一整数 l，不等式

$$\Re\rho\omega_\nu(x) \leqslant \Re\rho\omega_{\nu+1}(x) \quad (\nu=1, \cdots, n-1)$$

对于处在扇形域

$$\frac{l\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(l+1)\pi}{n}$$

内的所有复数值 ρ 成立．对于这些 ρ 值建立行列式

$$\Theta(s_p, s_{p+1}) = \mathrm{Det}\,|\vartheta_{\mu,\nu}| \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, n),$$

其中

$$\vartheta_{\mu,\nu} = \begin{cases} \alpha_\mu \omega_\nu^{k_\mu}(a) & \text{当} \quad \nu \leqslant p-1 \quad \text{时}, \\ s_{\mu,p} & \text{当} \quad \nu = p \quad \text{时}, \\ s_{\mu,p+1} & \text{当} \quad \nu = p+1 \quad \text{时}, \\ \beta_\mu \omega_\nu^{k_\mu}(b) & \text{当} \quad \nu \geqslant p+2 \quad \text{时}. \end{cases}$$

当 n 为奇数($n=2p-1$)时，如果无论是对于

$$s_{\mu,p} = \alpha_\mu \omega_p^{k_\mu}(a), \quad s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b),$$

还是对于

$$s_{\mu,p} = \beta_\mu \omega_p^{k_\mu}(b), \quad s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b),$$

均有 $\Theta \neq 0$，则特征值问题称为**正则的**[1]。当 n 为偶数 ($n=2p$)时，如果无论是对于

$$s_{\mu,p} = \alpha_\mu \omega_p^{k_\mu}(a), \; s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b),$$

还是对于

$$s_{\mu,p} = \beta_\mu \omega_p^{k_\mu}(b), \; s_{\mu,p+1} = \alpha_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(a),$$

均有 $\Theta \neq 0$，则特征值问题称为**正则的**。

当 $n=2$ 时，只有边界条件

$$\alpha y'(a) + \beta y'(b) + \gamma y(a) + \delta y(b) = 0$$

$$\alpha \omega_1(a) y(a) + \beta \omega_2(b) y(b) = 0$$

是非正则的，其中 $|\alpha| + |\beta| > 0$，而 $\omega_1(a)$，$\omega_2(b)$ 分别为方程

$$f_2(x)\omega^2 + g(x) = 0$$

之根在点 a 和点 b 的值；特别是，所有的二阶自共轭边值问题(见 2.6 节和 9.2 节)都是正则的。

对于偶数 $n=2p$，所谓的"斯图姆型边界条件"

---

1) 这里只要 f_ν 满足 1.1 节中指出的条件就够了。

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_\mu^{(\nu)}y^{(\nu)}(a)=0,\quad \sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_\mu^{(\nu)}y^{(\nu)}(b)=0\quad(\mu=1,\cdots,p)$$

是正则的；这里边界条件的一半只与点 a 有关，而另一半只与点 b 有关.其次，周期边界条件

$$y^{(\nu)}(a)=y^{(\nu)}(b)\quad(\nu=0,1,\cdots,n-1)$$

是正则的.[同斯图姆型边界条件不同的**分组**的边界条件

$$U_\mu(y)\equiv\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{\mu\nu}y^{(\nu)}(a)=0\quad \mu=1,\cdots,m,\ m\neq\frac{n}{2},$$

$$U_\mu(y)\equiv\sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{\mu\nu}y^{(\nu)}(b)=0\quad \mu=m+1,\cdots,n$$

是非正则的，其中前 m 个边界条件只与点 a 有关，其余的边界条件只与点 b 有关.——俄译本编者注.]例如，当 $n\geqslant3$ 时，如果 $n-1$ 个边界条件只与点 a 或点 b 之一有关，则此边界条件是非正则的.

2.4. 正则和非正则特征值问题的特征值. 如果 $\Delta(\lambda)\not\equiv0$，齐次边值问题(2)是正则的(因此，$g\neq0$——见 2.3节；注意：还有 $f_n\neq0$——见 1.1 节)，函数 f_n 和 g 是 n 次连续可微的，而函数 f_{n-1} 是 $n-1$ 次连续可微的，其余的 f_ν 是连续的，则存在无穷多个特征值.当 n 为奇数时，这些特征值都是一重的(其中有限个可能除外)；可以把特征值排成两个序列

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots;\quad \lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots\tag{10}$$

使得一个序列在下述意义下逼近于虚 λ 轴的一半，而另一个序列则逼近于虚 λ 轴的另一半：

$$\lambda_h=\left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n\left(1+\frac{E_1}{h}\right),\quad \lambda_h^*=-\left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n\left(1+\frac{E_2}{h}\right),\tag{11}$$

其中

$$N=\int_a^b\sqrt[n]{\left|\frac{g(x)}{f_n(x)}\right|}\,dx;$$

这里 E 表示某一个 h 的有界函数(还可能依赖于其他的量).当 n 为偶数时,所有的特征值(其中有限个可能除外)的重数是1或2. 特征行列式 $\Delta(\lambda)$ 的零点,如果将其中的每一个取得具有相应的重数,则可排列为**两个**序列(10)的形式,使得

$$\lambda_n=\left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n\left(1+\frac{E_1}{h}\right),\quad \lambda_h^*=\left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n\left(1+\frac{E_2}{h}\right),\tag{12}$$

其中

$$N^n=-\operatorname{sign}(gf_n)\left[\int_a^b\sqrt[n]{\left|\frac{g(x)}{f_n(x)}\right|}\,dx\right]^n.$$

这些零点同时也是特征值,但是多重的零点不一定是多重的特征值. 因此,当 n 为偶数时,特征值渐近地逼近于实半轴之一. 在两种情况下,由公式(11)和(12)可知,当 h 取大值时,特征值在很大程度上与边界条件和微分方程的系数无关.

对于在2.3节末尾列举的非正则边值问题,可以得到类似的结果[1].

2.5. 给定的函数按正则和非正则特征值问题的特征函数之展开. 函数 $1, \cos kx, \sin kx$ (k 为正整数)是特征值问题

$$y''+\lambda y=0;\quad y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi)$$

的特征函数. 因此,将给定的函数 $F(x)$ 按齐次边值问题(2)的特征函数完备正交系或双正交系展开为级数

$$F(x)=\sum_\nu c_\nu u_\nu(x),\tag{13}$$

是傅立叶级数展开的推广.

如果 $\Delta(\lambda)\neq 0$,并且齐次边值问题(2)具有无穷多个特征

1) [见 Наймарк,第二章,其中叙述了 M. B. 凯尔第什(Келдыш)的结果. ——俄译本编者注.]

函数，则存在同齐次边值问题(2)及其共轭边值问题 (4) 对应的特征函数完备双正交系

$$u_1(x), u_2(x), \cdots; \ v_1(x), v_2(x), \cdots. \qquad (13)$$

这时，如果将可积函数 $F(x)$展开为均匀收敛的级数 (13)，则由于双正交性立即得到

$$c_\nu = \frac{\int_a^b g(x)F(x)v_\nu(x)\,dx}{\int_a^b g(x)u_\nu(x)v_\nu(x)\,dx}, \qquad (14)$$

只要这里的分母不为零．系数 c_ν 称为 (广义的)**傅立叶系数**，只要相应的表达式的分母不为零，对任一可积函数 $F(x)$都可以算出来．例如，如果 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$除了可有一阶极点以外，再没有其他的奇点，这显然是可能的 (见 2.2 节)。这时只是还要研究具有这些系数的级数(13)是否收敛，以及此级数的和等于什么。

由(8)可知，如果 $\Delta(\lambda)\neq 0$，而 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$只有一阶极点，并且如果特征函数 u_ν 这样编号，使得对应的特征值的绝对值单调增大，则积分

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\rho}\int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda)F(\xi)g(\xi)\,d\xi\,d\lambda \qquad (15)$$

等于级数 (13) 的某一部分和；这里 K_ρ 表示复 λ 平面上的圆 $|\lambda| = \rho$，在此圆上 Γ 作为 λ 的函数是正则的．如果当 $\rho \to \infty$ 时 I_ρ 趋于某一极限，则由此可知，级数(13)至少在按上述方式将其各项分组的情况下是收敛的．对于正则边值问题和对于在区间 $a < x < b$ 内的任何分段光滑的函数 $F(x)$，存在下列极限：

$$\lim_{\rho\to\infty} I_\rho = \frac{1}{2}[F(x-0)+F(x+0)], \tag{16}$$

并且当Γ具有高于一阶的极点时，上式也成立(但是当存在高于一阶的极点时，对于级数(13)的收敛性，上式没有给出任何论断)；当 $x=a$ 时，同(16)类似的右端为 $\alpha F(a+0)+\beta F(b-0)$的等式成立，其中 α 和 β 同 F 无关；当 $x=b$ 时，情况一样.

[因此，如果正则特征值问题的格林豫解式只有简单的极点，则任意的分段光滑函数可按该问题的特征函数展开为收敛于此函数的级数.

在边值问题是由分组的非正则的边界条件产生的情况下，类似的定理也成立(M. B. 凯尔第什)——见 2.4 节——俄译本编者注.]

2.6. 标准的自共轭特征值问题. 如果齐次边值问题(2)是自共轭的(见 1.4 节和2.2节)[1]，则根据2.2节，每两个对应于不同特征值的特征函数 ψ, ψ^*，满足下列正交性关系式：

$$\int_a^b g(x)\psi(x)\psi^*(x)\,dx = 0,$$

如果 $\Delta(\lambda)\neq 0$，而特征值一般存在(关于特征值的存在，见 2.9 节和 2.13 节)，则存在特征函数完备正交系 $\psi_1, \psi_2, \cdots$，即这样的特征函数系：每一个特征函数 ψ，可以表示为此函数系中和 ψ 对应同一特征值的有限个特征函数的线性组合，并且有

$$\int_a^b g(x)\psi_p(x)\psi_q(x)\,dx = 0 \quad 当\ p\neq q\ 时. \tag{17}$$

---

1) 特别是，设 $L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}$，函数 f_ν 具有 ν 阶连续导数，$f_n\neq 0$，并且 $n=2m$.

自共轭边值问题(2)称为**标准的**，如果对于其每一个特征函数 $\psi(x)$，下列条件成立：

$$\int_a^b g(x)|\psi(x)|^2 dx \neq 0^{1)}.$$

对于任何具有实系数 f_ν 和 g 的标准自共轭边值问题(2)，所有的特征值都是实的；此外，$\Delta(\lambda)\not\equiv 0$，所以存在不多于可数个的特征值，这些特征值可以写为序列的形式(也可能是中断的)：

$$\cdots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$$

$(\lambda_{-1}<0, \lambda_1 \geqslant 0)$；每一个特征值 λ^* 的重数，同 λ^* 作为函数 $\Delta(\lambda)$ 的零点所具有的重数是一样的；格林豫解式 $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ 只有一阶极点.

如果下列三个条件之一成立，则自共轭边值问题(2)显然是标准的(也可参阅 4.3 节)：

(a)当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $g(x)\geqslant 0$(或者处处有 $g\leqslant 0$)[2].

(b)$\lambda=0$ 不是特征值，而对于每一个 n 次连续可微并且满足(2)的边界条件的(实)函数 $y(x)$，

$$\int_a^b yL(y)dx \geqslant 0;$$

在这种情况下，边值问题(2)称为自共轭的和**正定的**.

(c)如果将边值问题 (2) 的自共轭微分型写为下列形式：

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}[f_\nu(x)y^{(\nu)}]^{(\nu)} \quad (f_m\neq 0, n=2m)$$

---

1) 关于本节的内容可参阅 4.3 节，也可参阅 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), p.231—286。

2) 如果用 $-\lambda$, $-g$ 来代替 λ, g，第二种情况便化为第一种情况。还需要假设 $g\not\equiv 0$(见 2.1 节)。

(关于这一点，见第一部分 17.5 节)，则有

$$(-1)^{\nu} f_{\nu}(x) \geqslant 0 \quad \text{当 } \nu=0,1,\cdots,m \text{ 时}$$

(或者处处$\leqslant 0$)，但是$f_0(x) \neq 0$，此外(见第一部分 17.6 节)，对于每一个 n 次连续可微并且满足(2)的边界条件的函数 $y(x)$，

$$\mathscr{R}[y, y]\Big|_a^b = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{p+q=r} (-1)^p y^{(p)} (f_{r+1} y^{(r+1)})^{(q)}\Big|_a^b \geqslant 0$$

(或者处处$\leqslant 0$)；条件(c)是条件(b)的特殊情况.

例如，如果 $m=1$，因而

$$L(y)=(f_1 y')' + f_0 y,$$

则$\mathscr{R}[y, y]=f_1 y y'$.根据条件(c)，如果 $f_1>0$, $f_0 \leqslant 0$ 和$\neq 0$，并且如果边界条件具有下列形式：

$$y(a)=y(b)=0, \quad \text{或} \quad y'(a)=y'(b)=0,$$

$$\text{或} \quad y(a)=y'(b)=0, \quad \text{或} \quad f_1(a)y(a)=f_1(b)y(b), \; y'(a)=y'(b),$$

则特征值问题显然是标准的和自共轭的.

如果 $g(x) \geqslant 0$，则构成完备正交系的函数 $\psi_p(x)$ 可以规范化，即使得

$$\int_a^b g(x)\psi_p(x)\psi_q(x)\,dx = e_{p,q}.$$

如果条件(b)或(c)成立，则 $\lambda=0$ 不可能是特征值，而构成完备正交系的特征函数 ψ_p 可以规范化，即使得

$$\int_a^b g(x)\psi_p(x)\psi_q(x)\,dx = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} e_{p,q}.$$

这样的函数系 ψ_p 称为完备规范化正交系(正交规范化函数系)；在第二种情况下，如果 g 可以改变符号，即如果条件(a)不成立，则上述函数系也称为规范化配极函数系.

如果 λ_0 是自共轭边值问题(2)的 k 重特征值，而 $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_k(x)$ 是对应于这个特征值的特征函数正交系，则格林豫解式 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 对于点 λ_0 的残数等于

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{\psi_p(x)\psi_p(\xi)}{\int_a^b g(x)\psi_p^2(x)\,dx};$$

如果 $g(x) \geqslant 0$，而正交函数系是规范化的，则这个残数等于

$$\sum_{p=1}^{k} \psi_p(x)\psi_p(\xi).$$

可积函数 $F(x)$ 的傅立叶系数现在可以写为下列形式（同 2.5 节相比较）：

$$c_p = \frac{\int_a^b g(x)F(x)\psi_p(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\psi_p^2(x)\,dx}; \tag{18}$$

如果函数系 ψ_p 是规范化的，那么只要 $g(x) \geqslant 0$，则有

$$c_p = \int_a^b g(x)F(x)\psi_p(x)\,dx;$$

而在(b)和(c)的情况下，则有

$$c_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\int_a^b g(x)F(x)\psi_p(x)\,dx. \tag{19}$$

当 $g \geqslant 0$ 时，下列不难验证的贝塞耳恒等式成立：

$$\int_a^b \left[F(x) - \sum_{p=1}^{N} c_p\psi_p(x) \right]^2 g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b F^2(x)g(x)\,dx - \sum_{p=1}^{N} c_p^2,$$

由此得到贝塞耳不等式

$$\sum_{p=1}^{N} c_p^2 \leqslant \int_a^b F^2(x) g(x) dx$$

(对于任何N)，从而得到级数 $\sum c_p^2$ 的收敛性．在(b)和(c)的情况下，对于满足 (2) 的边界条件的 n 次连续可微函数 $F(x)$，得到等式

$$\int_a^b \left(F + \sum_{p=1}^{N} c_p \psi_p\right) L\left(F + \sum_{p=1}^{N} c_p \psi_p\right) dx =$$

$$= \int_a^b FL(F) dx - \sum_{p=1}^{N} |\lambda_p| c_p^2,$$

由此得到

$$\sum_{p=1}^{N} |\lambda_p| c_p^2 \leqslant \int_a^b FL(F) dx,$$

因而，在这种情况下级数 $\sum |\lambda_p| c_p^2$ 收敛．

2.7. 关于弗雷德霍姆型积分方程[1]．积分方程

$$\int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x), \tag{20}$$

$$y(x) = \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x), \tag{21}$$

其中 $y(x)$ 是未知函数，分别称为第一类和第二类弗雷德霍姆

---

1) 〔更详细的叙述可以在下列著作中找到：И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, 1951 (中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，积分方程论讲义，高等教育出版社，1954)；И. И. Привалов, Интегральные уравнения,1937；W. V. Lovitt, Linear Integral Equations,1924 (俄译本：У. В. Ловитт, Линейные интегральные уравнения, 1957)；F. Tricomi, Integral Equations, 1957(俄译本：Ф. Трикоми, Интегральные уравнения,1960)；С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям,1959；П. П. Забрейко и др., Интегральные уравнения,1968；Courant 和 Hilbert,卷 I．——俄译本编者注．〕

型积分方程（未知函数在方程中分别出现一次和两次）；如果 $f\equiv 0$，则积分方程(21)称为齐次的．在关于积分方程的非常详尽的大量研究结果当中，我们这里只例举一小部分，并且仅限于第二类积分方程．

(a)如果核 $K(x,\xi)$ 和函数 $f(x)$ 当 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 时是连续的，并且如果

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,\xi)\,dx\,d\xi<1,$$

则诺伊曼逐次逼近

$$y_0(x)=f(x),\ y_\nu(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)\,y_{\nu-1}(\xi)\,d\xi$$

$$(\nu=1,2\cdots)$$

均匀地收敛于某一个极限函数，此极限函数就是积分方程(21)的解。

(b) 如果核 $K(x,\xi)$ 当 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 时是连续的，则表示弗雷德霍姆行列式的级数

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(u,u)\,du+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(u_1,u_1) & K(u_1,u_2)\\ K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2)\end{vmatrix}du_1du_2-\cdots$$

对于所有的 λ 是收敛的；其次，表示豫解核(豫解式)的级数

$$k(x,\xi,\lambda)=K(x,\xi)-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,\xi) & K(x,u)\\ K(u,\xi) & K(u,u)\end{vmatrix}du+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,\xi) & K(x,u_1) & K(x,u_2)\\ K(u_1,\xi) & K(u_1,u_1) & K(x_1,u_2)\\ K(u_2,\xi) & K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2)\end{vmatrix}du_1du_2-\cdots$$

在正方形 $a \leqslant x, \xi \leqslant b$ 内对于任何 λ 是均匀收敛的，因而，$k(x, \xi, \lambda)$ 是 x, ξ 的连续函数，这个函数同 $D(\lambda)$ 一样，是 λ 的（超越的）整函数.

(c) 如果 $f(x)$ 是连续的，并且 $D(\lambda) \neq 0$，则函数

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b k(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

是方程

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \tag{22}$$

的解，并且是唯一的解. 这时，齐次积分方程

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \tag{23}$$

只有唯一的解 $y(x) \equiv 0$.

使得齐次积分方程(23)具有非零解的那些 λ 值称为**特征值**，而对应的解称为**特征函数**. 特征值的集合称为积分方程的**谱**

(d) 由现在开始，我们假设核 $K(x, \xi)$ 是连续的和对称的，即 $K(x, \xi) = K(\xi, x)$，并且 $K(x, \xi) \not\equiv 0$.

在这些条件下，至少存在一个特征值. 所有特征值都是实的，并且在平面的有限部分上没有极限点；因此，谱是离散的. 如果第 n 次**迭代核** K_n 由下列条件来确定：

$$K_1 = K, \quad K_n(x, \xi) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, \xi) dt,$$

并且如果假设

$$V_n = \int_a^b \int_a^b K_n^2(x, \xi) dx d\xi,$$

则极限

$$\lambda_1^2=\lim_{n\to\infty}\frac{V_{n-1}}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{V_n}}$$

存在，并且是最小特征值的平方；对于每一个 n，有

$$\frac{1}{\sqrt[n]{V_n}}\leqslant\lambda_1^2\leqslant\frac{V_{n-1}}{V_n},$$

因此我们在这里同时也就有了误差估计.

其次，对于每一个连续函数 $u(x)$，只要

$$\int_a^b u^2(x)d\,x=1,$$

则有

$$\left|\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)u(x)u(\xi)\,dx\,d\xi\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda_1|};$$

二重积分的模的上界等于 $|\lambda_1|^{-1}$；于是，我们还得到了近似计算最小特征值的另一种方法.

每两个对应于不同特征值的特征函数 φ, ψ, 满足**正交性关系式**

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx=0.$$

对应于每一个特征值 λ，有一组彼此线性无关的正交特征函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$，使得对应于特征值 λ 的每一个特征函数 φ，可以表示为下列形式：

$$\varphi=c_1\varphi_1+\cdots+c_m\varphi_m;$$

数 m 称为特征值 λ 的重数，并且满足不等式

$$m\leqslant\lambda^2\int_a^b\int_a^b K^2(x,\xi)\,dx\,d\xi.$$

对应于一切可能的特征值的所有这样的特征函数 φ_ν 的集合，构成特征函数的**完备正交系** $\psi_1, \psi_2, \cdots$. 将这些特征函数乘以相应的因子，可以使得

$$\int_a^b \psi_p(x)\psi_q(x)dx = e_{p,q}$$

(**规范化正交系**). 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, 是特征值，其中每一个重复的次数同其重数是一样的，则有

$$\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(x, \xi)dxd\xi,$$

并且当 $n=2,3,\cdots$ 时，

$$\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu^n} = \int_a^b K_n(x, x)dx.$$

如果 K 是正定核，即对于每一个连续函数 $u(x)$ 有

$$\int_a^b\int_a^b K(x, \xi)u(x)u(\xi)dxd\xi \geqslant 0,$$

则 $K(x, x) \geqslant 0$，所有的 $\lambda_\nu > 0$，并且

$$\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} = \int_a^b K(x, x)dx.$$

为了在计算特征值的同时，也算出对应的特征函数，例如同在(a)中一样，可以利用逐次逼近法. 我们从某一个函数 φ_0 出发，$\int_a^b \varphi_0^2(x)dx = 1$ (规范化的函数)，并且假设

$$\varphi_n(x) = \lambda^{(n)} \int_a^b K(x, \xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi \quad (n=1,2,\cdots), \ (*)$$

其中 $\lambda^{(n)}$ 之值每次都这样选取，使得函数 φ_n 是规范化的. 于是，适当选择 $\lambda^{(n)}$ 前面的符号，$\lambda^{(n)}$ 收敛于某一个特征值，而

φ_n 则收敛于对应的特征函数．如果假设存在一个在点 $c(a<c<b)$ 不等于零的特征函数，则可以从任意的连续函数 $\varphi_0(x)$ 出发，只须 $\varphi_0(c)=1$，将这个函数代入方程（*），然后选择 $\lambda^{(n)}$，使得条件 $\varphi_n(c)=1$ 成立。

(e) 核 $K(x,\xi)$ 称为**封闭的**，如果对于每一个连续函数 $u(x)\not\equiv 0$，

$$\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi\not\equiv 0.$$

具有封闭对称连续核的积分方程有无穷多个特征值．在这种情况下，每一个完备规范化正交系 $\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots$ 是由无穷多个函数组成的，而每一个可以借助于核 $K(x,\xi)$ 和某一个连续函数 $q(x)$ 表示为下列形式的函数 $g(x)$：

$$g(x)=\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi$$

（"原方程型表示"），可以表示为绝对收敛和均匀收敛的级数

$$g(x)=\sum c_\nu\psi_\nu(x);$$

这时

$$c_\nu=\int_a^b g(x)\psi_\nu(x)\,dx.$$

(f) 配极积分方程．这是下列形式的积分方程：

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)V(\xi)y(\xi)\,d\xi,$$

其中 $V(\xi)$ 是不为常数的、只取值 $+1$ 和 -1 的某一个函数．如果核 K 仍为对称的，则有类似于(d)中所指出的结果[1]．

---

1) 详见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45**(1939), p. 706—718.

2.8. 边值问题和弗雷德霍姆型积分方程之间的联系[1]. 设给定满足 2.1 节所指出的条件的边值问题 (1). 建立其辅助边值问题:

$$L(y)=0;\quad U_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)\tag{24}$$

和

$$L(y)=0;\quad U_k(y)=1,\quad U_\mu(y)=0\quad 当\ \mu\neq k\ 时.\tag{25}$$

齐次辅助问题(24)可能没有非零解，则这时对于这个问题存在格林函数 $\Gamma(x,\xi)$. 辅助问题 (25) 在这种情况下具有唯一解 $\psi_k(x)$.

如果将边值问题(1)的微分方程写为下列形式:

$$L(y)=f(x)-\lambda g(x)y,$$

则由 1.6 节，以 $f-\lambda gy$ 代替 f，得到如下结论：函数 $y=\varphi(x)$ 是边值问题(1)的解，当且仅当此函数满足第二类弗雷德霍姆型积分方程

$$y(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi=\Phi(x),$$

其中

$$K(x,\xi)=\Gamma(x,\xi)g(\xi),$$

$$\Phi(x)=\int_a^b\Gamma(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\sum_{k=1}^n\gamma_k\psi_k(x).$$

如果辅助边值问题已经解出，为了解边值问题 (1)，则可利用积分方程理论. 一般说来，解辅助边值问题并不简单；如果将 $f_0+\lambda g$ 表示为另一种形式，譬如说表示为 $(f_0+\lambda_0 g)+\lambda g$，其中 $\lambda=\lambda-\lambda_0$，有时求解过程可以简化.

---

1) 见 D. Hilbert(本书 210 页所引著作)；Ince p. 261 和以后.

2.9. 特征值问题和弗雷德霍姆型积分方程之间的联系. 现在设给定齐次边值问题(2). 这时只需要考虑辅助边值问题(24). 如果此边值问题没有非零解，因而存在格林函数 $\Gamma(x,\xi)$, 则齐次边值问题(2)的解和积分方程

$$y(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)y(\xi)d\xi=0 \tag{26}$$

的解相同.

显然,如果已知积分方程(26)的特征值和特征函数,因而也就得知齐次边值问题(2)的特征值和特征函数.

现在假设齐次边值问题(2)是自共轭的(见 2.6 节).

(a) 如果 $g(x)$不变号,例如 $g\geqslant 0$,并且如果 g 具有的零点不多于有限个,则由(26) 得到对于 $\eta(x)=y(x)\sqrt{g(x)}$ 的积分方程

$$\eta(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\eta(\xi)d\xi=0,$$

具有对称核

$$K(x,\xi)=\Gamma(x,\xi)\sqrt{g(x)g(\xi)}.$$

因为齐次边值问题(24)不应当有非零解,所以根据 1.6 节,对于任何连续函数 $u(x)$, 边值问题

$$L(y)=u(x)\sqrt{g(x)},\quad U_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)$$

是可解的,并且其解具有下列形式:

$$y(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)\sqrt{g(\xi)}u(\xi)d\xi.$$

由此可知: 核 K 是封闭的,并且每一个满足边界条件的 n 次连续可微的函数 $F(x)$, 当 $g>0$ 时,可以借助于 K 和函数

$$q(x)=\frac{L(F)}{\sqrt{g(x)}}$$

表示为原方程的形式. 对于自共轭边值问题(2),由此得到下述结论:

存在可数个特征值,这些特征值都是实的,并且没有任何一个有限的极限点;如果 $g>0$,则每一个满足(2)的边界条件的 n 次连续可微函数 $F(x)$, 可以按特征函数 ψ_p 的完全正交系展开为绝对收敛和均匀收敛的级数

$$F(x)=\sum_p c_p\psi_p(x),$$

并且此级数的系数由公式(18)来确定.

(b) 如果函数 $g(x)$ 的符号改变有限次,并且如果此时边值问题是正定的(见 2.6 节(b)),即对于所有的具有 n 阶连续导数并满足问题(2)的边界条件的连续函数 $y(x)\not\equiv 0$,有

$$\int_a^b yL(y)\,dx>0,$$

则齐次边值问题(2)等价于配极积分方程(见 2.7 节(f))

$$\eta(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)V(\xi)\eta(\xi)\,d\xi=0,$$

其中

$$V(x)=\operatorname{sign} g(x),$$

$$K(x,\xi)=\Gamma(x,\xi)\sqrt{|g(x)g(\xi)|},$$

$$\eta(x)=y(x)\sqrt{|g(x)|}.$$

现在由配极积分方程的理论可以断定:存在无穷多个正的特征值和无穷多个负的特征值, 并且可以得到关于按特征函数展开的定理.

2.10. 关于沃尔泰拉型积分方程[1]. 积分方程

$$\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi = f(x) \tag{27}$$

和

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{28}$$

称为第一类和第二类沃尔泰拉型积分方程（未知函数分别出现一次或两次，而积分上限是变化的）.

如果核 $K(x,\xi)$ 在三角形 $a \leqslant \xi \leqslant x < b$（容许 $b=\infty$）内是连续的，并且 $f(x)$ 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时是连续的，则方程(28)当 $a \leqslant x < b$ 时具有一个且仅具有一个连续解 $y=y(x)$. 这个解可以用逐次逼近法找到：任意选取连续函数 $y_0(x)$, 借助于递推公式

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x,\xi)y_{k-1}(\xi)d\xi \quad (k=1,2,\cdots)$$

建立序列 $y_0(x)$,, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$; 对于任何 c, $a<c<b$, 此序列在区间 $a \leqslant x \leqslant c$ 上均匀收敛，并且

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} y_k(x)$$

是给定积分方程的解.

积分方程(27)，在某些条件之下，可以化为(28)的形式. 如果 $K(x,\xi)$ 和导数 $K_x(x,\xi)$ 当 $a \leqslant \xi \leqslant x < b$ 时是连续的，$K(x,x) \neq 0$, $f(x)$ 是连续可微的，而 $f(a)=0$, 则(27)具有一个且仅具有一个连续的解 $y(x)$，并且这个 $y(x)$ 是第二类积分方程

$$y(x) + \int_a^x \frac{K_x(x,\xi)}{K(x,x)} y(\xi)\,d\xi = \frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

的连续的解.

1) 〔更详细的叙述可以在 2.7 节指出的文献中找到.——俄译本编者注.〕

2.11. 边值问题和沃尔泰拉型积分方程之间的联系. 设给定满足 2.1 节中提出的假设的边值问题(1). 此边值问题的每一个解 $y=\psi(x)$也是微分方程

$$L(y)=f(x)-\lambda g(x)y(x)$$

的解.

根据第一部分 16.4 节可知，此微分方程的解，即边值问题(1)的解，是积分方程

$$y(x)=\int_a^x\sum_{\nu=1}^n\varphi_\nu(x)\frac{W_\nu(\xi)}{f_n(\xi)W(\xi)}\,d\xi+\sum_{\nu=1}^n C_\nu\varphi_\nu(x)\qquad(29)$$

的解. 这里 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是方程 $L(y)=0$ 的基本解组, $W(x)$ 是其朗斯基行列式, $W_\nu(x)$ 是由行列式 W 将第 ν 列元素换为数量 $0,\cdots,0,f(x)-\lambda g(x)y(x)$ 而得到的行列式. 为了使 $y(x)$满足问题 (1) 的边界条件，只须适当地选择数值 C_ν, 如果这是可能的，即如果边值问题(1)是可解的.

积分方程(29)可以写为下列形式:

$$y(x)=F(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi,\qquad(30)$$

其中

$$F(x)=\int_a^x\frac{f(\xi)}{f_n(\xi)W(\xi)}\,D(x,\xi)\,d\xi+\sum_{\nu=1}^n C_\nu\varphi_\nu(x),$$

$$K(x,\xi)=\frac{g(\xi)}{f_n(\xi)W(\xi)}D(x,\xi),\qquad(31)$$

$$D(x,\xi)=\begin{vmatrix}\varphi_1(\xi) & \cdots & \varphi_n(\xi)\\ \varphi_1'(\xi) & \cdots & \varphi_n'(\xi)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\xi)\\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}.\qquad(32)$$

因而积分方程(29)可以写为沃尔泰拉型方程(30)的形式. 如果齐次边值问题(2)当 $\lambda=\lambda^*$ 时只有平凡解,则边值问题(1)当 $\lambda=\lambda^*$ 时具有唯一的解,并且适当选取数值 C_ν,解 $y(x)$ 满足积分方程(30). 如果 C_ν 已经知道,那么为了解此积分方程,则可利用2.10节中指出的逐次逼近法. 如果 C_ν 未知,则在进行每一步时,这样选择数值 C_ν,使得每一个近似解 $y_k(x)$ 也满足问题(1)的边界条件.

2.12. 特征值问题和沃尔泰拉型积分方程之间的联系. 现在设给定满足2.1节中提出的假设的特征值问题(2). 同此问题等价的积分方程(30)具有下列形式:

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \varphi_\nu(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi, \qquad (33)$$

其中 K 和 D 的意义仍为(31)和(32). 这时还需要以适当的方式选择数值 λ. 如果采用2.10节叙述的逐次逼近法,并且如果 C_ν 已经知道或者能以一定的方式来选取(见下面举出的例子),则对于(每一个)第 k 步这样选择 $\lambda=\lambda^*$,使得函数 $y_k(x)$ 满足边界条件. 有时,采用这种方法,可以非常迅速并十分精确地得到最小特征值的数值.

关于用这种方法得到的序列 y_k 和 λ_k 是否收敛以及相应的极限值如何的问题,在一般情况下尚未解决. 上述方法同3.4节的逐次逼近法密切相关,并且也能用来求得特征值的渐近表达式(见例2).

例 1. 计算下列问题的特征值:

$$y''+\lambda y=0;\quad y(0)=y(1)=0.$$

假设 $\varphi_1=1$, $\varphi_2=x$, 于是 $W=1$, $K=D=x-\xi$. 积分方程(33)给出

$$y(x)=C_1+C_2x-\lambda\int_0^x (x-\xi)\,y(\xi)\,d\xi.$$

因为应当有 $y(0)=0$,所以 $C_1=0$. 确定特征函数 $y(x)$ 只精确到常数因

子，所以上述积分方程可以由积分方程

$$y(x)=x-\lambda\int_0^x(x-\xi)y(\xi)d\xi$$

来代替. 如果假设 $y_0=1$，则有

$$y_1(x)=x-\lambda\int_0^x(x-\xi)\,d\xi=x-\frac{1}{2}\lambda x^2.$$

因为应当有 $y_1(1)=0$，所以 $\lambda=\lambda_1=2$，因而

$$y_1=x-x^2.$$

其次

$$y_2(x)=x-\lambda\int_0^x(x-\xi)\,(\xi-\xi^2)\,d\xi=x-\lambda\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right),$$

而条件 $y_2(1)=0$ 给出

$$\lambda_2=12,\quad y_2=x-2x^3+x^4.$$

然后得到

$$\lambda_3=10,\quad y_3=x-\frac{5}{3}x^3+3x^5-\frac{1}{3}x^6.$$

最小特征值的精确值显然等于 $\lambda=\pi^2=9.8696$；与其对应的特征函数是

$$y=\frac{1}{\pi}\sin\pi x\approx x-1.6x^3+0.8x^5.$$

例如，如果由函数 $y_0=\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x$ 出发，则对于所有的 k，有 $\lambda_k=(2\pi)^2$，而 $y_k=y_0$；在这种情况下，我们用的方法虽然也给出特征值，但不是最小特征值。

例 2. 计算下列问题的特征值的渐近表达式：

$$y''+g(x)y+\lambda^2y=0;\quad y(a)=y(b)=0.$$

为此目的，将含有 λ 的表达式取作为 $L(y)$，即

$$L(y)=y''+\lambda^2y;$$

g 不过是起了 λg 的作用，而在这种情况下 f 等于零. 方程 $L(y)=0$ 的基本解组是

$$\varphi_1=\cos\lambda x,\quad \varphi_2=\sin\lambda x.$$

其次，$W=\lambda$，$D=\sin\lambda(x-\xi)$，而积分方程(33)具有下列形式：

$$y(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x-\frac{1}{\lambda}\int_a^x g(\xi)y(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

边界条件 $y(a)=0$ 给出

$$C_1\cos\lambda a+C_2\sin\lambda a=0.$$

因而

$$C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x=C\sin\lambda(x-a).$$

因为确定特征函数只精确到任意常数因子， 所以给定的积分方程可以写为下列形式：

$$y(x)=\sin\lambda(x-a)-\frac{1}{\lambda}\int_a^x g(\xi)y(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

不难看出，这样得到的函数 $y(x)$ 对于所有足够大的 $\lambda>0$，是一致有界的. 由第二个边界条件得到

$$\sin\lambda(b-a)=\frac{1}{\lambda}\int_a^b g(\xi)\,y\,(\xi)\sin\lambda(b-\xi)\,d\xi=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

于是，对于自然数 n，有

$$\lambda=\lambda_n=\frac{n\pi}{b-a}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{n\pi}{b-a}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

由此也可以近似地求出相应的 $y(x)$ 之值. 如果再将这个近似值代入积分方程，则所得到的估值可以加强. 类似地，也可以用这种方法来研究其他边界条件，例如斯图姆型边界条件(见 9.2 节)[1].

2.13. 特征值问题和变分法之间的联系[2]. 现在我们假设特征值问题是自共轭的和正定的. 详细地说，我们研究下列特征值问题：

$$L(y)=\lambda g(x)y;\ U_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n);\qquad(34)$$

这里 $n=2m$ 是偶数，并且

---

1) 关于自共轭边界条件见 Zaanen, *Compos. math.* 7 (1939), p. 253.

2) 详见 Courant 和 Hilbert, 卷 I, 第六章, 和 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 45 (1939), p. 759.[也可参阅 С. Гулд, Вариационные методы в задачах о собственных значениях, 1970.——俄译本编者注.]

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}[f_\nu(x)y^{(\nu)}]^{(\nu)} \tag{35}$$

是 n 阶自共轭微分型，$f_m\neq0$，每一个函数 f_ν 具有 ν 阶连续导数，$g(x)$ 是连续函数，$\neq0$，并且 $g(x)$ 可能变号，即可能是所谓配极情况；U_μ 具有 1.1 节中指出的那种意义. 假设问题是自共轭的(见 2.2 节和 1.4 节)和正定的（见 2.6 节（b））, 即 $\lambda=0$ 不是特征值，并且对于每一个容许函数 $y(x)$，有

$$\int_a^b yL(y)\,dx\geqslant0; \tag{36}$$

这里，函数 $y(x)$ 称为允许的，如果它是 n 次连续可微的且满足(34)的边界条件. 在这种情况下，边值问题是标准的，并且只有实的特征值.

这时，对应于特征值问题可以提出下列变分问题：在所有使得

$$\int_a^b gy^2dx>0 \tag{37}$$

成立的容许函数 $y(x)$ 之中，求满足条件

$$\frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b gy^2dx}=\text{极小} \tag{38}$$

的函数. 在上述条件之下，此变分问题具有解 $y=\psi_1(x)$. 如果 λ_1 是极小值，即如果

$$\lambda_1=\frac{\int_a^b \psi_1 L(\psi_1)dx}{\int_a^b g\psi_1^2 dx}=\min_y\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b gy^2dx}, \tag{39}$$

则 λ_1 是最小的正的特征值，而 ψ_1 是与其对应的特征函数.

现在如果对于问题(38)，除了条件(37)以外，再引入另一个附加条件(正交性条件)：

$$\int_a^b g\psi_1 y dx=0,$$

则变分问题又具有某一个解 $\psi_2(x)$；如果 λ_2 是相应的极小值，则 λ_2 按大小来说是紧接着的($\geqslant\lambda_1$)特征值，而 ψ_2 是对应于 λ_2 的与 ψ_1 正交的特征函数. 一般说来，如果已知前 $p-1$ 个正的特征值 $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{p-1}$，以及与其相对应的特征函数正交系 $\psi_1,\cdots,\psi_{p-1}$，则下一个特征值等于

$$\lambda_p=\min_y\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b gy^2dx}, \tag{40}$$

并且现在考虑的是这样一些容许函数，对于这些容许函数，除(37)以外，下列附加条件成立：

$$\int_a^b g\psi_\nu y dx=0 \quad (\nu=1,\cdots,p-1). \tag{41}$$

只有当 $g(x)$ 或者改变其符号或者总是$\leqslant 0$ 时，才会遇到负的特征值. 如果将条件(37)换为

$$\int_a^b gy^2dx\leqslant 0, \tag{37 a}$$

将极小换为极大，将 λ_ν 换为 $\lambda_{-\nu}$，将 ψ_ν 换为 $\psi_{-\nu}$，只要采用上述方法就能得到负的特征值 $\lambda_{-1}\geqslant\lambda_{-2}\geqslant\cdots$，以及对应的特征函数正交系 $\psi_{-1},\psi_{-2},\cdots$；如果在特征值问题(34)中，$\lambda, g$ 分别由 $-\lambda, -g$ 来代替，则这种情况可以归结为前一种情况。

这样，得到了特征值的集合：

$$\cdots\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}<(0)<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots \tag{42}$$

(取每一个特征值具有相应的重数；括号中的数 0 不是特征值)以及对应的特征函数完备正交系：

$$\cdots, \psi_{-2}(x), \psi_{-1}(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \tag{43}$$

特征函数可以规范化，即使得

$$\int_a^b g\psi_p\psi_q dx=\varepsilon_p e_{p,\ q}, \quad \varepsilon_p=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}. \tag{44}$$

如果 g 既可取正值又可取负值，则存在无穷多个正的特征值和无穷多个负的特征值。如果总是 $g\geqslant 0(\leqslant 0)$，则显然只存在正的(负的)特征值，并且这些特征值有无穷多个。

2.14. 按特征函数展开的应用. 在上面所作的假设之下，下列级数收敛并且不等式

$$\sum\frac{\psi_p^2(x)}{|\lambda_p|}\leqslant\Gamma(x,x),\ \sum\frac{1}{|\lambda_p|}\leqslant\int_a^b\Gamma(x,x)\,|g(x)|\,dx \tag{44 a}$$

成立[1)]，其中 $\Gamma(x,\xi)$ 是特征值问题 (34) 的对应于 $\lambda=0$ 的格林函数。

对于每一个容许函数 $F(x)$，其傅立叶系数为

$$c_p=\varepsilon_p\int_a^b F(x)g(x)\psi_p(x)dx, \quad \varepsilon_p=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|},$$

---

1) 见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45** (1939), p. 775.

存在

$$\sum |\lambda_p| c_p^2 \leqslant \int_a^b F L(F) dx \qquad \text{(贝塞耳不等式)},$$

$$\sum \varepsilon_p c_p^2 = \int_a^b g(x) F^2(x) dx \qquad \text{(帕塞法耳等式)}.$$

如果 $\Phi(x)$ 是另一个容许函数，其傅立叶系数为 γ_p，则有

$$\sum \varepsilon_p c_p \gamma_p = \int_a^b g(x) F(x) \Phi(x) dx.$$

级数

$$\sum |c_p \psi_p(x)|$$

均匀收敛；如果 $g(x)$ 在任何（含于 (a, b) 中的）区间上都不恒等于零，则下列展开式成立：

$$F(x) = \sum c_p \psi_p(x).$$

2.15. 几点补充说明.

(a) 瑞利原理. 将特征值问题化为某一个变分问题，无论是对于进行证明，还是对于实际计算特征值，都十分重要. 例如，当 $g>0$ 时，由 (39) 直接得到：如果 g 减小，则特征值问题(34)的最小特征值增加，其次，对于满足条件(37)的任意容许函数 $y(x)$，则有

$$\frac{\int_a^b y L(y) dx}{\int_a^b g y^2 dx} \geqslant \lambda_1 \qquad \text{(瑞利原理)}. \tag{45}$$

例如，对于问题

$$-y''=\lambda y;\ y(0)=y(1)=0,$$

$y=x(1-x)$ 是容许函数，利用这个函数，由(45)得到真正特征值 $\lambda_1=\pi^2$ 的估值 $\lambda_1\leqslant 10$.

(b) **另一个变分原理**[1]. 设对于特征值问题(34)，2.13节所用的表示法和所提出的条件仍然有效；但是设 $g\geqslant 0$, $\lambda=0$ 可以是特征值，而在这里对正定性应作不同理解.

首先，由(34)的边界条件组成尽可能多个只含有阶数 $\leqslant m-1$ 的导数的线性无关的线性组合；设这些"本性的"边界条件是

$$U_1(y)=0,\ \cdots,\ U_k(y)=0. \tag{46a}$$

其次，再加入问题(34)的与(46a)无关的 $n-k$ 个边界条件；设这些"剩余的"边界条件是

$$U_{k+1}(y)=0,\ \cdots,\ U_n(y)=0. \tag{46b}$$

按照第一部分 17.6 节的狄里克莱公式，有

$$\int_a^b yL(y)dx=\int_a^b\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu f_\nu(x)[y^{(\nu)}]^2dx+\mathscr{R}[y,y]\Big|_a^b, \tag{47}$$

其中

$$\mathscr{R}[y,y]=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{p+q=r}(-1)^p[f_{r+1}y^{(r+1)}]^{(q)}y^{(p)}. \tag{48}$$

利用关系式(46b)，从 $\mathscr{R}[y,y]_a^b$ 中消去尽可能多个阶数 $\geqslant m$ 的导数；可以证明，这里甚至可以消去**所有的**阶数 $\geqslant m$ 的导数. 现在，特征值问题(34)是正定的，其意义是：

$$(-1)^\nu f_\nu(x)\geqslant 0\quad(\nu=0,1,\cdots,m),$$

并且对于满足方程(46a)的每一组数

1) 详见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 47(1942).

$$y(a),\ y'(a),\ \cdots,\ y^{(m-1)}(a),\ y(b),\ \cdots,\ y^{(m-1)}(b),$$

变换后的量 $\mathscr{R}[y, y]|_a^b$ 是非负的. 现在考虑变分问题(38), 不过在其分子当中按上述方式消去了导数;这时,即便是将满足本性边界条件(46a)的所有 m 次连续可微函数取作为容许函数,变分问题(38)也具有解 $y=\psi_1(x)$; 极小值是最小的特征值 λ, 函数 $\psi_1(x)$ 本身具有 $2m$ 阶连续导数,并且是对应于特征值 λ_1 的特征函数.

(c) 第三个变分原理. 当 $g>0$ 时, 变分问题 (38) 可以用变分问题

$$\frac{\int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2 dx}{\int_a^b yL(y)dx} = \text{极小}$$

来代替,只要对于所有容许函数 $y(x)\neq 0$,这里的分母 >0[1].

所以, 对于任意的容许函数 $y(x)$, 上述分数是最小特征值的上估值. 但是

$$\frac{\int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2 dx}{\int_a^b yL(y)dx} \geqslant \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b g y^2 dx} \geqslant \lambda_1,$$

即对于同样的函数 y,瑞利原理给出比较好的估值.

例如,对于(a)末尾例举的问题,利用容许函数

$$y=\frac{x}{12}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12},$$

得到数值: $9.882>9.871>\pi^2$; 但是, 为了求得第一个精确

1) 见 L. Collatz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 19(1939), p. 228.

性差些的近似值，需要的计算量是比较小的。

(d) 按库朗法独立地确定特征值[1)]. 利用 2.13 节叙述的变分原理，只是在已经求出特征值 $\lambda, \cdots, \lambda_{p-1}$ 以及与其对应的特征函数之后，才能求得特征值λ_p。在多数情况下，这样做并不方便. 根据库朗的建议，利用下述方法决定特征值，可以排除这个缺点. 设 $w_1(x), \cdots, w_{p-1}(x)$是任意一些可积函数. 由这些函数建立表达式：

$$m(w_1, \cdots, w_{p-1}) = \inf_y \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b gy^2dx},$$

$$M(w_1, \cdots, w_{p-1}) = \sup_y \frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b gy^2dx},$$

其中 $y(x)$ 遍及所有这样的容许函数，即使得 m 的表达式分母为正而 M 的表达式分母为负，并使得

$$\int_a^b w_\nu y dx = 0 \quad (\nu=1, \cdots, p-1).$$

这时，如果 g 可改变符号，则有

$$m \leqslant \lambda_p, \quad M \geqslant \lambda_{-p};$$

如果 $g \geqslant 0 (\leqslant 0)$，则第二个(第一个)不等式失效.

现在如果使函数 $w_1, \cdots, w_{p-1}$ 发生变化，则可得到：

$$\lambda_p = \max_w m(w_1, \cdots, w_{p-1}), \quad \lambda_{-p} = \min_w M(w_1, \cdots, w_{p-1}).$$

---

1) 见 Courant 和 Hilbert, Vol. I, p. 342; E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45**(1939), p. 778; **46**(1940), p. 280.

(e) 一个估值定理[1]. 设 $g^*(x) \geqslant g(x)$，其中函数 $g^*(x)$ 是连续的并且不恒等于零；其次，设 λ_p^* 是特征值问题(34)(其中以函数 g^* 代替 g)的特征值. 这时，

$$\lambda_p^* \leqslant \lambda_p \quad (p=\pm 1, \pm 2, \cdots),$$

只要是这些特征值存在(如果 $g \geqslant 0$, 则只是对于 $p=1, 2, \cdots$ 存在).

如果 $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \cdots$ 是由(34)用 $|g|$ 代替 g 而得到的特征值问题的特征值，则有

$$\lambda_{-p} \leqslant -\varkappa_p < 0 < \varkappa_p \leqslant \lambda_p.$$

[(f) 参数以非线性函数出现的情况[2]. 可将特征值问题作下述推广. 考虑 n 阶线性微分方程

$$L(y;\ \lambda)=0, \tag{49}$$

其系数依赖于参数 λ，以及线性齐次边界条件

$$U_\nu(y;\ \lambda)=0 \quad (\nu=1, \cdots, n), \tag{50}$$

其系数也依赖于 λ. 数 λ_0 称为这种边值问题的**特征值**，如果当 $\lambda=\lambda_0$ 时，微分方程(49)具有满足边界条件(50)的非平凡解；同时，这样的解称为**特征函数**.

参数以非线性函数形式出现的特征值问题研究得还很少. 其中得到了下列边值问题的特征值的渐近表达式：微分方程为

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x, \lambda) y^{(n-1)}+f_{n-2}(x, \lambda) y^{(n-2)}+\cdots$$
$$+f_0(x, \lambda) y=0,$$

其中 $f_\nu(x, \lambda)$ 是参数 λ 的 ν 次多项式，具有系数为参数 λ 的 n

---

1) 见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45**(1939), p. 780 和 **46**(1940), p. 280.

2) [见 Я. Д. Тамаркин. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград. 1917; J. Tamarkin, *Math. Zeitschrift* 27(1928), p. 1—54; М. В. Келдыш. *ДАН СССР* **87**(1951), p. 11—14. ——俄译本编者注.]

次多项式的线性边界条件(50). ——俄译本编者注.]

§ 3. 特征值问题和边值问题的近似解法[1]

3.1. 里兹-伽辽金近似方法[2]. 设 2.13 节指出的条件仍然成立;此外,设 $g(x)>0$. 其次,设 $u_1(x), \cdots, u_k(x)$ 是彼此线性无关的容许函数. 如果现在不是对于所有的容许函数 $y(x)$,而只是对于可以表示为

$$\overline{y}(x)=\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x) \tag{1}$$

这种形式的容许函数来考虑 § 2 的变分问题 (38),则这时得到的最小特征值 $\overline{\lambda}_1$ 显然 $\geqslant\lambda_1$. 因此,由变分问题得到了确定 a_ν 的简单的极小值问题. 按照微分运算法则,对于 a_ν,得到下列线性方程组:

$$\sum_{q=1}^{k} a_q \int_a^b u_p[L(u_q)-\lambda g u_q]dx=0 \quad (p=1, \cdots, k);$$

这时,λ 应当这样确定,使得此方程组具有非平凡解 $a_1, \cdots,$

---

1) [目前已有阐述本段所论问题的大量文献. 我们仅仅指出某些著作,利用这些著作可以初步熟悉问题,并且从中可以找到进一步的文献索引:

И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, 1962;

Р. В. Хемминг, Численные методы, 1968;

Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1952;

С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, 1970;

С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, 1965;

Sansone.——俄译本编者注.]

2) 见 N. Kryloff, Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique, Paris, 1931.

a_k，也就是说，λ 应当是行列式

$$D(\lambda)=\text{Det}\left|\int_a^b u_p[L(u_q)-\lambda g u_q]\,dx\right| \quad (p,\ q=1,\ \cdots,\ k)$$

的零点. $D(\lambda)$ 只有实的零点. 设这些零点是 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k$, 其中 $\lambda_\nu\geqslant\lambda_\nu$. 因此，我们得到对于前 k 个特征值的上估值.

如果 $g(x)$ 变号，则这样选择 u_ν, 使得下列正交性关系式成立：

$$\int_a^b g u_p u_q dx=0 \quad (p\neq q).$$

如果想要对于正的特征值进行估值，则选择 u_ν 时，除了要满足上式以外，还应满足

$$\int_a^b g u_\nu^2 dx>0 \quad (\nu=1,\ \cdots,\ k).$$

这时，行列式 $D(\lambda)$ 可以写为下列形式：

$$D(\lambda)=\text{Det}\left|\int_a^b u_p\left[L(u_q)-\lambda e_{p,q} g u_q\right] dx\right|$$
$$(p,\ q=1,\ \cdots,k).$$

$D(\lambda)$ 仍然只有实的零点：

$$\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k \text{ 和 } \lambda_\nu\geqslant\lambda_\nu.$$

如果想要对于负的特征值进行估值，则应当这样选择 u_ν, 使得

$$\int_a^b g u_\nu^2 dx<0 \quad (\nu=1,\ \cdots,\ k).$$

这时，$D(\lambda)$ 只有负的零点：

$$\lambda_{-k}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{-1} \text{ 和 } \lambda_{-\nu}\leqslant\lambda_{-\nu}.$$

当然，所得近似值的精确程度，取决于用函数 u_ν 或其线性组合逼近前一些特征函数时所具有的精确程度. 在多数情况下，对于很小的 k 值，例如 $k=2$ 或 3，已经可以得到实际上适用的结果.

3.2. 格拉梅尔近似方法[1). 假设 $g(x)>0$. 同在 3.1 节中一样，我们研究下列形式的函数：

$$y^*(x)=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u_\nu(x),$$

但是现在，对于这些函数应用 2.15 节(c)的第三变分原理，即这样来确定 a_ν，使得表达式

$$\frac{\int_a^b \frac{1}{g}[L(y^*)]^2 dx}{\int_a^b y^* L(y^*) dx}$$

取极小值. 同在 3.1 节中一样，我们知道，这个极小值 λ^* 是使得行列式

$$D^*(\lambda)=\mathrm{Det}\left|\int_a^b L(u_q)\left[\frac{1}{g}L(u_p)-\lambda u_p\right]dx\right|$$

$$(p, q=1, \cdots, k)$$

等于零的那些 λ 值之中的最小的. 如果 λ_1 是由同样的一些 u_ν，按 3.1 节中的方法得到的近似值，则有 $\lambda_1^*\geqslant\bar{\lambda}_1\geqslant\lambda_1$. 因此，伽辽金方法给出更好的近似值；但是，在多数情况下，这种简单形式的格拉梅尔方法要求的计算工作量比较小，同时 λ_1^* 已

1) R. Grammel, *Ingenieur-Archiv* **10** (1939), p. 35—46; L. Collatz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **19**(1939), p. 225; Biezeno-Grammel, Techn. Dynamik, p. 169—172 (俄译本: К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, 1950, т. II, 1952).

给出足够好的近似值.

假设

$$y^{**}(x)=\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu v_\nu(x),$$

其中 $v_\nu(x)$ 是边值问题

$$L(v_\nu)=g(x)u_\nu,\quad U_\mu(v_\nu)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)$$

的解,也就是说,

$$v_\nu(x)=\int_a^b\Gamma(x,\xi)g(\xi)u_\nu(\xi)d\xi,\tag{2}$$

还可以求出下一个近似值(同 3.4 节相比较). 如果现在对于 y^{**}, v_ν, 重复对于 y^*, u_ν 进行过的一切运算,则得到 λ_1^{**}——使得行列式 $D^{**}(\lambda)$ 等于零的 λ 值中的最小的, $D^{**}(\lambda)$ 与 $D^*(\lambda)$ 不同之处是,其中的 u 全都用 v 来代替.

下列不等式成立:

$$\lambda_1^*\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_1^{**}\geqslant\lambda_1,$$

即我们现在得到比对函数 u_ν 应用伽辽金方法时更好的近似值;正如一些实例所表明的,这一改进是相当大的. 当研究纯弹性振动时,可以避免计算表达式 (2) 中包含的格林函数,这一点对于实际应用来说是很重要的.

3.3. 用里兹-伽辽金法解非齐次边值问题. 设给定半齐次边值问题

$$L(y)=f(x);\quad U_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n);\tag{3}$$

同时设 2.13 节中指出的条件成立, 并且设 $f(x)$ 是连续的. 这时,对应的齐次边值问题没有非平凡解,因而,(3)具有唯一的解 $y=\varphi(x)$. 此解可以按下述方式来逼近: 设 $u_1(x),\cdots,u_k(x)$ 是彼此线性无关的容许函数. 在表达式

$$\varphi_k=\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu u_\nu$$

中，选择数 a_γ，使得

$$\int_a^b \varphi_k[L(\varphi_k)-2f(x)]dx=\text{极小},$$

即

$$\sum_{p,q=1}^{k} a_p a_q \int_a^b u_p L(u_q)dx-2\sum_{p=1}^{k} a_p\int_a^b u_p f dx=\text{极小}.$$

数 a_q 由方程组

$$\sum_{q=1}^{k} a_q\int_a^b u_p L(u_q)dx=\int_a^b u_p f dx \qquad (p=1,\cdots,k)$$

单值地确定．于是 φ_k 成为 φ 的近似表达式．

[如果研究的是一般的非齐次边值问题

$$L(y)=f(x);\quad U_\mu(y)=\gamma_\mu \quad (\mu=1,\cdots,n),$$

那么，经过变换

$$y=Y+u,$$

其中 $u(x)$ 是满足边界条件

$$U_\mu(u)=\gamma_\mu \quad (\mu=1,\cdots,n)$$

的任意容许函数，则此边值问题可以化为形如 (3) 的边值问题．——俄译本编者注．]

3.4. 逐次逼近法[1]． 设 2.13 节指出的条件仍然成立，并且设 $g(x)\geqslant 0$． 我们从某一任意的连续函数 $y_0(x)$ 出发，对此函数有

$$\int_a^b g y_0^2 dx>0,$$

---

1) 这个方法同维亚涅罗(Vianello)和恩格瑟(Engesser)有关，在他们的著作中包含了逐次逼近法的基本原理。关于这个方法，见 Biezeno-Grammel. Techn. Dynamik. p. 155-163(俄译本： К. Б. Бецино и Р. Граммель. Техническая динамика. т. I，1950，т. II，1952)。

按下述方式建立函数序列 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \cdots$: 如果 y_{k-1} 已经知道,则 y_k 作为边值问题

$$L(y_k)=g(x)y_{k-1}(x);\quad U_\mu(y_k)=0\quad(\mu=1,\cdots,n)$$

的解来确定. 这时(见 1.6 节)

$$y_k(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)g(\xi)y_{k-1}(\xi)d\xi.$$

如果 y_0 已经是§2 特征值问题(34)的容许函数,则 y_0 可按某一个特征函数完备规范化正交系 $\psi_p(x)$ 来展开:

$$y_0=\sum c_p\psi_p(x)$$

而

$$y_k=\sum_p \frac{c_p}{\lambda_p^k}\psi_p(x).$$

由此可知:

(a) $\sigma_k(x)=\dfrac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)}$, 当 $k\to\infty$ 时,具有与 x 无关的极限,而此极限就是特征值 λ_r. 其次,

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_r^k y_k(x)$$

是与特征值 λ_r 对应的特征函数. 如果特征值问题是这样的,即与最小特征值 λ_1 对应的特征函数在区间 $a<x<b$ 上不等于零,则此方法给出的正是第一个特征值,只要在区间 $a<x<b$ 上 $y_0\neq0$. 例如,从振荡定理可知,二阶斯图姆型问题就具有这种性质(9.2 节(a_1)).

例:

$$y''+\lambda y=0;\quad y(0)=y(1)=0.$$

假设 $y_0=1$; 这时, 作为 $\lambda_1=\pi^2$ 的近似值, 我们得到 $\sigma_1\left(\frac{1}{2}\right)=8$; $\sigma_2\left(\frac{1}{2}\right)=9.6$; $\sigma_3\left(\frac{1}{2}\right)=9.84$.

(b) 如果假设

$$a_k=\int_a^b g y_\nu y_{k-\nu} dx \quad (\nu=0,1,\cdots,k),$$

则 a_k 与 ν 无关，并且

$$0<a_k^2\leqslant a_{k-1}a_{k+1} \quad 当 k\geqslant 1 时;$$

因此，数值

$$\rho_k=\frac{a_{k-1}}{a_k} \quad (k\geqslant 1)$$

当 k 增加时单调减小；其极限正是特征值 λ_r. 在与(a)中同样的假设之下，可以得到最小特征值.

在上述例子中，$\rho_1=12$；$\rho_2=10$；$\rho_3=9.88$.

因为

$$\rho_{2k}=\frac{\int_a^b y_k L(y_k)dx}{\int_a^b g y_k^2 dx}$$

并且当 $g>0$ 时

$$\rho_{2k-1}=\frac{\int_a^b \frac{1}{g}[L(y_k)]^2 dx}{\int_a^b y_k L(y_k)dx},$$

则从 2.14 节(c)得知，每一个 $\rho_k\geqslant\lambda_1$.

(c) 如果求出了第一个特征值以及与其对应的特征函数 $\psi_1(x)$，那么为了得到以后的特征函数，可以应用同样的方法，只要将某一个与 $\psi_1(x)$ 正交的函数取作为 $y_0(x)$ 即可.

应用逐次逼近法，在进行不多的几步以后，常常就可以达到目的.

3.5. 应用有限差分法近似求解边值问题和特征值问题.

这个方法的基本思想如下：设给定边值问题

$$L(y)=f(x);\quad U_\mu(y)=\gamma_\mu\quad(\mu=1,\cdots,n),\tag{4}$$

并设1.1节指出的表示法和条件这时仍然有效. 我们假设此边值问题是可解的,为了得到其近似解,将区间$[a,b]$分为长度为 $h=\frac{b-a}{m}$的相等部分,并且对于每一个分点 $x_\nu=a+\nu h$ 写出一个方程,此方程可以这样来建立:以适当方式选取差分关系,作为近似式代替微分方程(4)中的导数,就得到这个方程. 对于边界条件中包含的导数也进行这样的代换. 于是，为了求未知解 $y(x)$在分点上的值 $y_\nu=y(a+\nu h)$之近似值 Y_ν, 我们得到线性(代数)方程组,原来的边值问题从而化成了"有限的"问题.

如果给定特征值问题

$$L(y)+\lambda g(x)y=0;\quad U_\mu(y)=0\quad(\mu=1,\cdots,n),$$

则得到的齐次线性方程组的系数还依赖于 λ. 数值 λ 应当这样选择,使得方程组具有非平凡解. 因此,为了求第一个特征值的近似值,我们得到代数方程.

将微分的问题化为有限的问题，可以利用下列表格来进行:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]+\dfrac{1}{6}h^2R_3,\\[2ex] \dfrac{1}{12h}[-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+\\ \qquad\qquad +f(x-2h)+\dfrac{1}{18}h^4R_5,\\[2ex] \dfrac{1}{60h}[f(x+3h)-9f(x+2h)+45f(x+h)-\\ \qquad -45f(x-h)+9f(x-2h)-f(x-3h)]+\\ \qquad\qquad +\dfrac{47}{2100}h^6R_7;\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]+\dfrac{1}{12}h^2R_4, \\ \dfrac{1}{12h^2}[-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+ \\ \qquad +16f(x-h)-f(x-2h)]+\dfrac{1}{54}h^4R_6, \\ \dfrac{1}{180h^2}[2f(x+3h)-27f(x+2h)+270f(x+h)- \\ \qquad -490f(x)+270f(x-h)-27f(x-2h)+ \\ \qquad +2f(x-3h)]+\dfrac{47}{8400}h^6R_8; \end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{h^3}[f(x+2h)-3f(x+h)+3f(x)- \\ \qquad -f(x-h)]+\dfrac{5}{6}hR_4, \\ \dfrac{1}{2h^3}[f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)- \\ \qquad -f(x-2h)]+\dfrac{17}{60}h^2R_5, \\ \dfrac{1}{8h^3}[-f(x+3h)+8f(x+2h)-13f(x+h)+ \\ \qquad +13f(x-h)-8f(x-2h)+f(x-3h)]+ \\ \qquad +\dfrac{403}{2520}h^4R_7; \end{cases}$$

$$f^{(4)}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{h^4}[f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)- \\ \qquad -4f(x-h)+f(x-2h)]+\dfrac{17}{90}h^2R_6, \\ \dfrac{1}{6h^4}[-f(x+3h)+12f(x+2h)-39f(x+h)+ \\ \qquad +56f(x)-39f(x-h)+12f(x-2h)- \\ \qquad -f(x-3h)]+\dfrac{403}{5040}h^4R_8. \end{cases}$$

利用更高阶的表达式，在同样的步长之下，可以提高精确度.

这里 R_ρ 表示某一个数，这个数小于 $|f^{(\rho)}(x)|$ 在包含上述表达式中所遇到的一切横坐标的某一个区间上的最大值.

如果对于边界条件也利用更高阶的有限差分，那么这时可能会得到这样一些项，这些项含有对应于处在区间(a, b)以外的点的 Y值. 如果在给定的区间的端点上利用较低阶的近似，则可以避免这种情况(见下面举出的例子).

例：如果对于边值问题

$$y''+\lambda xy=0;\quad y(0)=y(1)=0,$$

假设 $m=4$，即 $h=\frac{1}{4}$，则按照一次近似公式得到方程组

$$Y_2-2Y_1+Y_0+\frac{1}{4}\lambda h^2Y_1=0,$$

$$Y_3-2Y_2+Y_1+\frac{2}{4}\lambda h^2Y_2=0,$$

$$Y_4-2Y_3+Y_2+\frac{3}{4}\lambda h^2Y_3=0.$$

由于边界条件，此方程组可以化为

$$(\lambda h^2-8)Y_1+4Y_2=0,\quad Y_1+(2\lambda h^2-8)Y_2+Y_3=0,$$
$$Y_2+(3\lambda h^2-8)Y_3=0.$$

使得这个方程组的行列式等于零，从而方程组具有非平凡解的参数 λ 的最小值等于17.87. 这个近似值同最小特征值的精确值18.956相差 6%.

采用二次近似公式则可导出方程组

$$-Y_3+16Y_2-30Y_1+16Y_0-Y_{-1}+3\lambda h^2Y_1=0,$$
$$-Y_4+16Y_3-30Y_2+16Y_1-Y_0+6\lambda h^2Y_2=0,$$
$$-Y_5+16Y_4-30Y_3+16Y_2-Y_1+9\lambda h^2Y_3=0;$$

由于边界条件 Y_0 和 Y_4 均不出现；还可以消去 Y_{-1} 和 Y_5，如果在边界点上也用有限方程来代替微分方程，而这时利用的是一次近似公式；我们得到

$$Y_1-2Y_0+Y_{-1}+0\cdot\lambda h^2Y_0=0,\quad \text{即}\quad Y_{-1}=-Y_1,$$

$$Y_5-2Y_4+Y_3+1\cdot\lambda h^2Y_4=0,\quad 即\quad Y_5=-Y_3.$$

这时，对于最小特征值得到近似值 18.86。

甚至采用比较粗糙的计算方式，这种方法所给出的近似值，当 $h\to 0$ 时，也会趋向于精确解，从理论观点看来，这是很有意义的。因为，根据普朗彻尔(Plancherel)的研究，下述结果成立：设给定边值问题

$$[f(x)y']'+[g(x)+\lambda]y=h(x);\quad y(0)=y(1)=0,\qquad(5)$$

在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，函数 $f>0$，并且是二次连续可微的，而 g 和 h 是连续的。如果将导数 $y'(x_\nu)$, $y''(x_\nu)$, $f'(x_\nu)$ 用

$$\frac{\Delta y(x_{\nu-1})}{h},\quad \frac{\Delta^2 y(x_{\nu-1})}{h^2},\quad \frac{\Delta f(x_\nu)}{h},\quad \left(h=\frac{1}{n}\right),$$

来代替，则相应的代数方程组具有下列形式：

$$n^2f_\nu(Y_{\nu+1}-2Y_\nu+Y_{\nu-1})+n^2(f_{\nu+1}-f_\nu)(Y_\nu-Y_{\nu-1})+$$
$$+(g_\nu+\lambda)Y_\nu=h_\nu,\quad(\nu=1,\cdots,n-1),$$

此外，边界条件给出 $Y_0=Y_n=0$。如果 λ 不是对应的齐次边值问题的特征值，即如果(5)具有唯一的解 $y(x)$，则 $Y_\nu\to y(x)$，其中 $x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu}{n}$。

如果 $h\equiv 0$，λ_p 是边值问题的第 p 个特征值，并且如果 $\lambda_p^{(n)}$ 是上面写出的线性方程组的行列式按增加的次序排列的零点，则当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_p^{(n)}\to\lambda_p$。

3.6. 扰动方法[1]. 扰动方法基本思想是，借助于比较简单的特征值问题的解，来求(即使是近似地)另一个“被扰”问题的解。同时假设，被扰问题的解能够按某一个参数 h 的幂次展开。这种思想可以通过两种途径来实现。

(a) 设给定斯图姆型问题

---

1) 也可参阅 9.10 节(b)。

$$[f(x)y']'+[g(x)+\lambda]y=0; \tag{6}$$

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0, \tag{7}$$

其中$(|\alpha|+|\beta|>0, |\gamma|+|\delta|>0)$.其次,设对于某一个$h>0$,级数

$$f=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}f_{\nu}(x),\quad g=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}g_{\nu}(x)$$

在区间$a\leqslant x\leqslant b$上均匀收敛和绝对收敛,并且设g_{ν}是连续的,f_{ν}是连续可微的,$f_0\neq 0$,第一个级数可以逐项微分. 设对于由方程

$$(f_0y')'+(g_0+\lambda)y=0 \tag{6$_0$}$$

和边界条件(7)组成的未被扰问题,第n个(例如,第一个)特征值$\lambda=\varkappa$,以及对应的规范化的特征函数$\varphi(x)$均已知;设$\varkappa$是重数为1的特征值. 求斯图姆型问题(6),(7)的具有下列形式的第n个特征值μ和对应的规范化的特征函数$\psi(x)$:

$$\mu=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}\mu_{\nu},\quad \psi=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}\psi_{\nu}(x), \tag{8}$$

并且假设$\mu_0=\varkappa$, $\psi_0=\varphi$,而ψ_{ν}满足边界条件(7). 将表达式(8)代入方程(6). 如果这时所遇到的级数都可以逐项微分和相乘,则$\lambda=\mu$, $y=\psi$显然是问题(6),(7)的解,只要下式成立:

$$(f_0\psi_{\nu}')'+(g_0+\varkappa)\psi_{\nu}=F_{\nu}(x)\quad(\nu=1,2,\cdots), \tag{9}$$

其中

$$F_{\nu}(x)=-\sum_{p=1}^{\nu}[(f_p\psi_{\nu-p}')'+(g_p+\mu_p)\psi_{\nu-p}].$$

因为齐次特征值问题(6),(7)具有非零解,所以当且仅当(见1.4节)

$$\int_a^b F_{\nu}\varphi dx=0 \tag{10}$$

时，非齐次特征值问题(9)，(7)才是可解的．在适当选择数值 μ_ν 时，这些条件可以满足．特别是，当 $\nu=1$ 时，这个条件给出

$$\mu_1=-\int_a^b[\varphi(f_1\varphi')'+g_1\varphi^2]dx.$$

对于这个数值 μ_1，非齐次特征值问题(9)，(7)当 $\nu=1$ 时是可解的，并且存在同 φ 正交的规范化的解 ψ_1。其次，在 $\nu=2$ 的情况下，可以这样确定 μ_2，即使得条件(10)成立，这时非齐次特征值问题(9)，(7)又有同 φ 和 ψ_1 正交的规范化的解 ψ_2，如此等等．

如果级数(8)的各项迅速地减小，则这种方法可以用来近似地计算 μ 和 ψ．

这种方法也可以用于更高阶的微分方程和其他的边界条件．

(b)现在设方程

$$L(y)+\lambda y=0,\quad L(y)\equiv[f(x)y']'+g(x)y \tag{11}$$

以及条件(7)，是未被扰特征值问题，而方程

$$L(y)+[hr(x)+\lambda]y=0 \tag{12}$$

以及条件(7)，是被扰特征值问题．未被扰问题的特征值和规范化的特征函数用 λ_n 和 φ_n 来表示，而被扰问题的则用 μ_n 和 ψ_n 来表示．将表示法作一些改变，再来求下列形式的解：

$$\mu_n=\lambda_n+h\rho_n+h^2\sigma_n+\cdots,\quad \psi_n=\varphi_n+hu_n+h^2v_n+\cdots$$

将这些表达式代入方程(12)，并且令 h^ν ($\nu=1,2,\cdots$) 的系数等于零，得到方程组

$$\left.\begin{array}{l} L(u_n)+\lambda_n u_n=-(r+\rho_n)\varphi_n,\\ L(v_n)+\lambda_n v_n=-(r+\rho_n)u_n-\sigma_n\varphi_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{13}$$

如果

$$a_{p,q}=\int_a^b u_p\varphi_q dx$$

是 u_p 按特征函数 φ_q 的展开式的系数，则从 (13) 的第一个方程利用格林公式可以得到

$$(\lambda_p-\lambda_q)a_{p,q}=-d_{p,q}-e_{p,q}\rho_p,$$

其中

$$d_{p,q}=\int_a^b r\varphi_p\varphi_q dx.$$

因此，$\rho_p=-d_{p,p}$，并且如果将 u_p 规范化，则有

$$u_p=\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{\infty}\frac{d_{p,q}}{\lambda_q\lambda_p}u_q \quad (p=1,2,\cdots).$$

用类似的方法从(13)的后面的方程可以确定 $\sigma_n, v_n, \cdots$. 这个方法也能用于更高阶的方程和其他的自共轭边界条件.

3.7. 特征值的估值. 我们来考虑§2 的特征值问题 (34)，这时 2.13 节提出的假设仍然成立，此外，设 $g(x)\geqslant 0$.

(a) 邓克利-杰夫科特分解公式[1). 设 $g(x)=g_1(x)+\cdots+g_k(x)$ (g 是连续的，$\geqslant 0$ 并且 $\neq 0$)，其次，设 $\lambda_1^{(\nu)}$ 表示用函数 g_ν 代替函数 g 之后所得特征值问题的第一个特征值；这时

$$\frac{1}{\lambda_1}\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\lambda_1^{(\nu)}}.$$

(b) 索思韦尔分解公式[2). 如果 $L(y)$ 可以表示为 k 个 n 阶微分型之和的形式：

1) 见 H. H. Jeffcott, *Proceedings Soc. London A* **95**(1919), p. 106.

2) H. Lamb—R. V. Southwell, *Proceedings Soc. London A* **99** (1921), p. 272.

$$L(y)=L_1(y)+\cdots+L_k(y),$$

使得特征值问题

$$L_\nu(y)=\lambda g y;\quad U_\mu(y)=0\quad (\mu=1,\cdots,n)$$

中的每一个都满足 2.13 节中叙述的条件，并且如果 Λ_ν 是这样的特征值问题的最小特征值，则有

$$\lambda_1\geqslant\sum_{\nu=1}^{k}\Lambda_\nu.$$

(c)坦普尔包括定理[1]. 设 $g(x)>0$，而 $y(x)$ 是某一个在区间 $a<x<b$ 上不为零并且在此区间内使得 $\frac{1}{y}L(y)>0$ 的容许函数(见 2.13 节)；其次，设极限

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{y}L(y)\quad 和\quad \lim_{x\to b}\frac{1}{y}L(y)$$

存在，因此 $\frac{1}{y}L(y)$ 可以看作为在整个闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数。那么，在数值

$$m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{L(y)}{gy}\quad 和\quad M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\frac{L(y)}{gy}$$

之间，至少有一个特征值 λ_r。如果给定的特征值问题是这样的，即对于所有的具有任意连续函数 $g>0$ 的特征值问题 §2 (24)来说，对应于最小特征值的特征函数只要它们在区间 $a<x<b$ 上不等于零，则甚至有 $m\leqslant\lambda_1\leqslant M$。

例如，从 9.2 节(a_1)可知，对于所有的(二阶)斯图姆型特征值问题，上述假设成立。

---

1) G. Temple, *Proceedings London Math. Soc.*(2), 29 (1929), p. 270; L. Collatz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 19 (1939), p.239.

(d) 克雷洛夫-博古柳波夫包括定理[1]. 设$g(x)>0$. 假设对于任意的容许函数 $y(x)\neq 0$,

$$\alpha=\frac{\int_a^b yL(y)dx}{\int_a^b gy^2dx},\quad \beta^2=\frac{\int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2dx}{\int_a^b gy^2dx};$$

这时$\beta^2\geqslant\alpha^2$, 并且在

$$\alpha-\sqrt{\beta^2-\alpha^2} \quad 和 \quad \alpha+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$$

之间,至少有一个特征值.

(e) 利用格林函数进行估值. 在$g\geqslant 0$ 的情况下,对于 λ_1, § 2(44 a)的第二个不等式给出下列下估值:

$$\frac{1}{\lambda_1}\leqslant\int_a^b \Gamma(x,x)g(x)dx,$$

其中 Γ 是所论问题对应于 $\lambda=0$ 的格林函数. 甚至在给定的问题不是正定的情况下, 但是 如果 $g>0$, 则可利用公式

$$\frac{1}{\sqrt[k]{V_k}}\leqslant\lambda_1^2\leqslant\frac{V_{k-1}}{V_k}$$

(2.7 节(d))对于第一个特征值进行估值. 这个公式中包含的格林函数在许多情况下不易算出, 因而这个公式的使用受到限制.

但是,另一方面,也有不少问题,其中格林函数 $\Gamma(x,\xi)$不难算出;例如,微分方程的形式为 $y''+\lambda gy=0$ 的二阶特征值问题,即可以化为求方程 $y''=0$ 的格林函数的问题,就属于

---

1) Н. Крылов и Н. Боголюбов, *ИАН СССР*(1929), p.471; E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 45(1939), p.788—790.

这种问题(见第三部分 2.1).

(f) 坦普尔-比克利下估值[1]. 设λ_1是重数为 1 的特征值, A_2 是第二个特征值 λ_2 的某一个上估值,并且 $A_2>\rho_k$, 其中 ρ_k 的意义同在 3.4 节(b)中是一样的. 这时,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{A_2-\rho_{k-1}}{A_2-\rho_k}\rho_k.$$

(g) 特雷夫茨-牛因格下估值[2]. 仍然设 $g>0$, λ_1 是重数为 1 的特征值. 这时,

$$0 \leqslant \beta-\lambda_1 \leqslant \beta\sqrt{\frac{l_2-l_1}{l_1-\alpha}}\left(\gamma+2\sqrt{\gamma}\sqrt{1-\sqrt{\frac{l_2-\alpha}{l_2-l_1}}}\right),$$

其中 $\gamma=1-\dfrac{\alpha}{\beta}$, α 和 β 具有(d)中所指出的意义, l_2 和 l_1 是前两个特征值的(粗粗的)下估值,并且还假设 $l_2>\alpha$. 上述公式可以用来改善估值 l_1. 也就是说,如果 $l_1=l_1^{(0)}$是 λ_1 的某一个下估值,则从上述公式我们可以得到 λ_1 的新的下估值. 一般说来, 如果把某一个下估值 $l_1^{(\nu)}$代入这个公式来代替 l_1, 我们则得到新的下估值

$$l_1^{(\nu+1)}=\beta-\beta\sqrt{\frac{l_2-l_1^{(\nu)}}{l_1^{(\nu)}-\alpha}}\left(\gamma+2\sqrt{\gamma}\sqrt{1-\sqrt{\frac{l_2-\alpha}{l_2-l_1^{(\nu)}}}}\right).$$

这样,便得到下估值序列 $l_1^{(0)}, l_2^{(1)}, \cdots$, 因而我们可以使原来是粗糙的估值得到一定程度的改善.

(h) 按特雷夫茨-维勒斯法对较大特征值的下估值[3]. 如果

$$S_1=\sum\frac{1}{\lambda_\nu} \quad 或者 \quad S_2=\sum\frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

---

1) G. Temple. *Proceedings London Math. Soc.*(2), **29** (1929), p. 275

2) 见 R. A. Newing. *Philos. Magazine* (7), **24** (1937), p. 114—127.

3) 见 Willers, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **16**(1936), p. 336.

并且如果对于前面一些特征值，我们有例如按里兹-伽辽金方法求出的上估值

$$A_\nu \geqslant \lambda_\nu \quad (\nu=1,\cdots,k),$$

对于 $\nu=1,\cdots,k$，则有

$$\frac{1}{\lambda_\nu} \leqslant S_1+\frac{1}{A_\nu}-\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{A_p}, \quad \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqslant S_2+\frac{1}{A_\nu^2}-\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{A_p^2},$$

并且

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}} \leqslant S_1-\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{A_p}, \quad \frac{1}{\lambda_{k+1}^2} \leqslant S_2-\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{A_p^2}.$$

例如，根据 2.14 节，当 $g>0$ 时，有

$$S_1 \leqslant \int_a^b \Gamma(x, x) g(x) dx,$$

并且，利用积分方程理论，可以得到对于 S_2 的相应估值。

3.8. 计算特征值和特征函数几种方法的综述. 设给定特征值问题

$$L(y)=\lambda g(x) y; \quad U_\mu(y)=0 \quad (\mu=1,\cdots,n).$$

(a) $\Delta(\lambda)$ 方法. 这里不要求任何补充假设. 如果对于每一个 λ，可以求出微分方程的基本解组

$$\varphi_1(x, \lambda), \cdots, \varphi_n(x, \lambda) \tag{14}$$

则方程 $\Delta((\lambda)=0$（见 2.1 节）可以精确求解，或者利用近似的数值方法来求解. 因此，如果求出了某一个特征值 λ_0，则剩下的只是选择常数 C_ν，使得函数

$$y=\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \varphi_\nu(x, \lambda_0)$$

满足所论特征值问题的边界条件；这时 y 就是特征函数.

如果实际求函数组(14)有困难，但是已知存在实的特征值，则总可以对于参数 λ 的两个值 $\lambda_1<\lambda_2$ 利用近似方法求出

相应的基本解组(14)．这时，如果$\Delta(\lambda_1)$和$\Delta(\lambda_2)$具有不同的符号，则在λ_1和λ_2之间至少存在一个特征值．缩小区间(λ_1, λ_2)，并且重复使用同样的方法，可以使算出的特征值具有任意的精确度．

(b) 化为积分方程．见2.9节，这种方法对于理论研究可能是非常有用的．但是，一般说来，为了算出特征值，这种方法并不方便，因为求格林函数通常是相当复杂的．

(c) 扰动方法．见3.6节．物理学家们广泛地使用着这种方法．为了估计误差，可以利用2.15节(e)和3.7节(a)，(b)的估值方法．

(d) 化为有限差分方程．见3.5节．在许多情况下，使用这种方法，要求不太大的计算量，就可以得到前面一些特征值的近似表示．

(e) 化为变分问题．见2.13节，3.1节，3.2节．这里首先应当提到的是瑞利原理、里兹-伽辽金近似方法和格拉梅尔近似方法，以及2.15节(e)，3.7节(a)，(b)的估值定理．这些方法都是近似地求特征值时最常使用的方法．因为，函数y以及函数$u_1, \cdots, u_k$向前面一些特征函数逼近得越好，瑞利原理和其他两种近似方法效率越高，所以有时利用3.4节的逐次逼近法来求前面一些特征函数的更精确的近似；常常是一次近似就够了．

(f) 逐次逼近法．见3.4节．在许多情况下，用这种方法进行不多的几步以后，就已经得到很好的近似值．然而，从计算技术的观点看来，这种方法并不总是方便的．

(g) 插值法．同里兹-伽辽金方法一样，从k个容许函数$u_1(x), \cdots, u_k(x)$出发，组成函数

$$y=\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x),$$

并且选择 a_ν 和 λ，使得函数 y 在 k 个给定的点 $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant b$ 上满足所论问题的微分方程。这时，用这种方式求出的数 λ 和函数 $y(x)$，近似地表示某一个特征值和对应的特征函数。这种方法有点原始，但其优点是应用范围很广。

(h) 3.7 节中叙述的估值定理也适用于上面列举的各种方法。关于二阶特征值问题，也可参阅 9.5 节。关于二阶方程的边值问题或二阶常系数方程组的边值问题的解法，还应当提到的是傅立叶变换法。

§ 4. 对于方程 $F(y)=\lambda G(y)$ 的自共轭特征值问题

下面援引的§1 和 § 2 一些结果的推广是属于作者的．见 E Kamke, *Math. Zeitschrift* 46(1940), p. 231—286.

4.1. 问题的提法。 前面叙述的定理和方法中的大部分，都能搬到以更一般的方式包含着参数 λ 的特征值问题上去，只要其微分方程仍然仅仅是线性地包含 λ。

设给定微分方程

$$F(y)=\lambda G(y), \tag{1}$$

其中

$$F(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}$$

是给定的自共轭微分型；此外，同从前一样，设给定边界条件（见 1.1 节）为

$$U_\mu(y)=0 \quad (\mu=1,\cdots,2m). \tag{2}$$

这里和以后将假设：

(a) $0 \leqslant n < m$。

(b) $f_\nu=f_\nu(x)$和 $g_\nu=g_\nu(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上取实值，并且具有 ν 阶连续导数；此外，$f_m\neq 0$；$g_n\neq 0$.

(c) 对于每一个 λ 值，特征值问题(1)，(2)是自共轭的。这意味着：第一，由微分方程 $F(y)=0$ 和边界条件 (2) 组成的边值问题是自共轭的，即对于两组数

$$\left.\begin{array}{l} u(a), u'(a), \cdots, u^{(2m-1)}(a), u(b), u'(b), \cdots, u^{(2m-1)}(b), \\ v(a), v'(a), \cdots, v^{(2m-1)}(a), v(b), v'(b), \cdots, v^{(2m-1)}(b), \end{array}\right\} \tag{3}$$

其中二者都满足方程(2)，下列等式成立：

$$\mathscr{F}[u, v]\big|_a^b=0,$$

这里 $\mathscr{F}$ 表示格林公式(第一部分 17.6 节)

$$\int_a^b [vF(u)-vF(u)]dx=\mathscr{F}[u, v]\big|_a^b$$

中包含的双线性微分型

$$\mathscr{F}[u, v]=\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{p+q=\nu-1}(-1)^p[(f_\nu u^{(\nu)})^{(q)}v^{(p)}-$$
$$-(f_\nu v^{(\nu)})^{(q)}u^{(p)}];$$

第二，对于任何两组数(3)，其中二者都满足方程(2)，有

$$\mathscr{G}[u, v]\big|_a^b=0,$$

这里 $\mathscr{G}[u, v]$ 表示格林公式

$$\int_a^b [vG(u)-uG(v)]dx=\mathscr{G}[u, v]\big|_a^b$$

中包含的双线性微分型，并且可以表示为同 $\mathscr{F}$ 的表达式相类似的形式.

在 § 2 讨论过的特征值问题中，有 $G(y)=g(x)y$ 和 $\mathscr{G}\equiv 0$，因而最后一个关于 G 的条件自然成立.

按照 2.1 节引用的术语，我们将不恒等于零的解理解为

问题(1),(2)的特征函数;同从前一样,将使得特征函数存在的每一个 λ 值称为特征值.

4.2.一般的初步注记. 对于每一个 λ 值,存在微分方程(1)的基本解组

$$y_1(x,\lambda),\ \cdots,\ y_{2m}(x,\lambda),$$

方程(1)的每一个解都可以表示为基本解组的线性组合. 因此,对于每一个特征值 λ_0,存在 $k=k(\lambda_0)$ 个线性无关的特征函数 $\psi_1(x),\cdots,\psi_k(x)$,而对应于 λ_0 的任何一个特征函数都可以表示为下列形式:

$$\psi(x)=C_1\psi_1+\cdots+C_k\psi_k\quad(\sum|C_p|>0).$$

这个数 k,称为特征值 λ_0 的重数;显然 $1\leqslant k\leqslant 2m$.

现在仍然设基本解组 $y_p(x,\lambda)$ 这样选择,使得

$$y_p^{(q)}(a,\lambda)=e_{p,q+1}$$
$$(p=1,\cdots,2m;\ q=0,\cdots,2m-1).$$

这时,行列式

$$\Delta(\lambda)=\mathrm{Det}\,|U_\mu(y_\nu)|\quad(\mu,\nu=1,\cdots,2m)$$

同从前一样,称为特征值问题的特征行列式. $\Delta(\lambda)$ 是 λ 的整函数. 如果 $\Delta(x)\equiv 0$,则每一个数 λ 都是特征值. 如果 $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$,则存在不多于可数个特征值;这些特征值同整函数 $\Delta(\lambda)$ 的零点是一样的,所以没有任何一个极限点,点 $\lambda=\infty$ 可能除外. 当且仅当行列式 $\Delta(\lambda_0)$ 的矩阵之秩为 $2m-k$ 时,特征值 λ_0 的重数为 k.

仍然可以引入格林豫解式的概念(见2.2节). 其次,如果 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ 是对应于不同的特征值 λ_1,λ_2 的特征函数,则下列正交性关系式成立:

$$\int_a^b \psi_1 G(\psi_2)\,dx=0. \tag{4}$$

4.3. 标准的特征值问题. 特征值问题(1),(2)称为标准的,如果对于每一个特征函数 $\psi(x)$,下列不等式成立:

$$\int_a^b \overline{\psi} G(\psi)\,dx \neq 0,$$

其中 $\overline{\psi}$ 表示同 ψ 复共轭的函数.

如果函数 $u(x)$ 具有直到 $2m$ 阶的连续导数,并且满足边界条件(2),则 $u(x)$ 称为特征值问题(1),(2)的**容许函数**.

如果下列条件之一成立,则自共轭特征值问题(1),(2)显然是标准的:

(a) $G(y)=g(x)y$, 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上, $g\geqslant 0$, 并且 $g\not\equiv 0$(或者 $g\leqslant 0, g\not\equiv 0$);

(b) 对于每一个实的容许函数 $u(x)\not\equiv 0$,

$$\int_a^b uG(u)\,dx>0 \quad (\text{或者对于每一个 } u(x),\ <0);$$

(c) $\lambda=0$ 不是特征值,并且对于每一个实的容许函数 $u(x)$,

$$\int_a^b uG(u)\,dx\geqslant 0 \quad (\text{或者对于每一个 } u(x),\ \leqslant 0);$$

(d) 对于每一个实函数 $u(x)$,

$$\int_a^b uF(u)\,dx\geqslant 0, \tag{5}$$

此外,对于每一个使得公式(5)中等号成立的实的容许函数 $u(x)\not\equiv 0$,表达式

$$\int_a^b uG(u)\,dx \tag{6}$$

不为零,并且对于所有这样的函数 u,符号相同.

如果条件(5)成立，则特征值问题称为正定的，并且如果在(5)中严格的不等式成立，则此问题称为严格正定的. 对于某一个具体问题，为了决定条件 (b)—(d) 之一是否成立，首先仍然可以利用狄里克莱公式(同 2.6 节(b)相比较).

对于这里讨论的形式更一般的标准自共轭特征值问题，2.6 节中得到的各项论断也成立.

4.4. 正定的特征值问题. 现在假设特征值问题(1),(2)是自共轭的，并且是严格正定的[1].

(a) 在这些条件之下，存在无穷多个特征值；可以把特征值排列为序列的形式:

$$\cdots\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\cdots;$$

这里 $\lambda_p>0$ 还是 <0，取决于 $p>0$ 还是 <0，并且每一个特征值出现的次数同其重数一样多. 此序列至少在一个方面不中断，并且当 $|p|\to\infty$ 时，$|\lambda_p|\to\infty$.

(b) 上面写出的特征值序列对应于特征函数完备规范化正交系

$$\cdots,\ \psi_{-2}(x),\ \psi_{-1}(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \cdots,$$

即这样的特征函数系，使得

$$\int_a^b \psi_p G(\psi_q)\,dx=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}e_{p,q},$$

而对应于某一个特征值 λ^* 的任何特征函数，都可以表示为这个完备规范化正交系中对应于特征值 λ^* 的有限个特征函数的线性组合.

(c) 如果即使存在一个正的特征值，则存在这样一些容许函数 $u(x)$，使得

---

1) 假设问题是简单正定的就够了，但是，在这里所作的比较强的假设之下，叙述可以简化.

$$\int_a^b uG(u)\,dx>0;$$

于是

$$\lambda_1=\min_u\frac{\int_a^b uF(u)\,dx}{\int_a^b uG(u)\,dx},$$

其中极小值是在使得此公式的分母为正的所有容许函数 u 中选取的. 如果即使存在一个负的特征值，则存在这样一些容许函数 $u(x)$，使得

$$\int_a^b uG(u)\,dx<0;$$

在这种情况下，相应地有

$$\lambda_{-1}=\max_u\frac{\int_a^b uF(u)\,dx}{\int_a^b uG(u)\,dx}.$$

(d) 如果 $\psi_1(x), \cdots, \psi_{p-1}(x)$ 是对应于特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ 的特征函数正交系，并且如果还存在另外一些正的特征值，则有

$$\lambda_p=\min_u\frac{\int_a^b uF(u)\,dx}{\int_a^b uG(u)\,dx},$$

其中极小值是在使得

$$\int_a^b uG(u)\,dx>0 \quad \text{和} \quad \int_a^b uG(\psi_\nu)\,dx=0$$

$$(\nu=1,\cdots,p-1)$$

成立的所有容许函数 $u(x)$ 中选取的。

如果 $\psi_{-1}, \cdots, \psi_{-(p-1)}$ 是对应于特征值 $\lambda_{-1}, \cdots, \lambda_{-(p-1)}$ 的特征函数正交系，则类似地有

$$\lambda_{-p}=\max_u \frac{\int_a^b uF(u)\,dx}{\int_a^b uG(u)\,dx},$$

其中极大值是在使得

$$\int_a^b uG(u)\,dx<0 \quad \text{和} \quad \int_a^b uG(\psi_\nu)\,dx=0$$

$$(\nu=-1,\cdots,-(p-1))$$

成立的所有容许函数中选取的。

(e) 从(c) 可以得到对于计算特征值来说十分重要的下述事实：如果 $u(x)$ 是使得

$$\int_a^b uG(u)\,dx\neq 0$$

成立的某一个容许函数，则在 0 与

$$\frac{\int_a^b uF(u)\,dx}{\int_a^b uG(u)\,dx}$$

之间至少存在一个特征值。

(f) 如果对于每一个容许函数 $u(x)$，下列不等式成立：

$$\int_a^b uG(u)\,dx \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

则所有特征值都是正的（负的）. 如果存在这样的一个区间 $[\alpha, \beta]$——区间 $[a, b]$ 的一部分，在此区间上

$$(-1)^\nu g_\nu(x) \geqslant 0 \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n), \tag{7}$$

并且如果在这些函数之中即使有一个大于零，则必定存在无穷多个正的特征值. 如果在公式 (7) 中，对于所有的 ν，不等式反号时成立，则必定存在无穷多个负的特征值. 如果在 $[a, b]$ 上这两类子区间都存在，则有无穷多个正的和无穷多个负的特征值.

(g) 其次，下述各点仍然有效：

独立地确定特征值的库朗方法（2.15 节(a)），其中 $L(y)$ 应由 $F(y)$ 来代替，gy^2 应由 $yG(y)$ 来代替；

2.15 节(e)的估值定理，只要特征值问题

$$F(y) = \lambda^* G^*(y); U_\mu(y) = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, 2m)$$

也是自共轭的，并且如果对于每一个容许函数 $y(x)$，下列不等式成立：

$$\int_a^b yG^*(y)\,dx \geqslant \int_a^b yG(y)\,dx;$$

里兹-伽辽金近似方法（3.1 节），如果将满足正交性关系式

$$\int_a^b u_p G(u_q)\,dx = 0 \quad (p \neq q)$$

和不等式

$$\int_a^b u_p G(u_p)\,dx > 0 \quad (\text{相应地} < 0)$$

的容许函数取为 $u_1, \cdots, u_k$. 这时应当假设

$$D(\lambda)=\mathrm{Det}\left|\int_a^b u_p[F(u_q)-\lambda e_{p,q}G(u_q)]dx\right| \quad (p, q=1, \cdots, k).$$

4.5. 按特征函数的展开.

(a) 如果 $\psi_1, \cdots, \psi_n, \cdots$ 是特征函数完备范规化正交系，则级数

$$\sum_p \frac{1}{|\lambda_p|}[\psi_p^{(\nu)}(x)]^2$$

当 $\nu=0, 1, \cdots, m-1$ 时是收敛的，并且其和不超过 $\Gamma^{(\nu,\nu)}(x, x)$，其中 $\Gamma(x, \xi)$ 是边值问题[1)]

$$F(y)=0, \quad U_\mu(y)=0 \quad (\mu=1, \cdots, 2m)$$

的格林函数，而

$$\Gamma^{(p,q)}(x, \xi)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial \xi^q}\Gamma(x, \xi).$$

(b) 对于连续函数 $\Phi(x)$，数

$$a_p=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\int_a^b \Phi G(\psi_p)dx$$

称为此函数关于特征值问题(1)，(2)的**傅立叶系数**.

对于某一个容许函数 $\Phi(x)$ 的傅立叶系数 a_p，下列关系式成立：

$$\sum_p |\lambda_p| a_p^2 \leqslant \int_a^b \Phi F(\Phi)dx \quad (\text{贝塞耳不等式})$$

和

$$\sum_p \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}a_p^2=\int_a^b \Phi G(\Phi)dx \quad (\text{帕塞法耳等式}).$$

如果 $\Psi(x)$ 也是某一个容许函数，而 b_p 为其傅立叶系数，

---

1) 因为对于严格正定的边值问题(1)，(2)，$\lambda=0$ 不是特征值，所以此边值问题没有非平凡解；因此格林函数存在.

则有

$$\sum_p \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} a_p b_p = \int_a^b \Phi G(\Psi)\,dx.$$

在稍有不同的假设之下，另一个贝塞耳不等式成立：

$$\sum_p a_p^2 \leqslant \int \Phi G(\Phi)\,dx.$$

同前面一样，这里应当假设特征值问题(1)，(2)是自共轭的和正定的，此外还应当假设 Φ 是**相对于** G 的**容许函数**，并且对于每一个相对于 G 的容许函数 $u(x)$，下列不等式成立：

$$\int_a^b uG(u)\,dx \geqslant 0.$$

这里，函数 $u(x)$ 称为**相对于** G 的**容许函数**，如果此函数是 $2n$ 次连续可微的，并且满足规范化的边界条件(2)（同 2.3 节相比较），因为这些边界条件仅包含阶数 $\leqslant 2n-1$ 的导数。特别是，如果 $G(y)=g(x)y$，则每一个连续函数 $u(x)$ 在上述意义下都是容许的。

(c) 为了推导一般的展开定理，边界条件仍然应当是规范化的。设

$$U_\mu^*(y)=0 \tag{8}$$

是仅仅包含阶数 $\leqslant m-1$ 的导数的那些边界条件。我们将特征值问题(1)，(2)称为**封闭的**，如果 $Y(x)\equiv 0$ 是满足边界条件(8)的唯一的 $m-1$ 次可微函数，并且对于每一个容许函数 $u(x)$，满足方程

$$\int_a^b YG(u)\,dx = 0$$

（见(d)）。

这时，下述展开定理成立：如果特征值问题(1)，(2)是自

共轭的，并且是严格正定的，则对于每一个具有傅立叶系数a_p的容许函数$\Phi(x)$，级数

$$\sum a_p \psi_p^{(\nu)} \quad (\nu \leqslant m-1)$$

在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上绝对收敛和均匀收敛。此外，如果特征值问题(1)，(2)是封闭的，则有

$$\Phi(x) = \sum_p a_p \psi_p(x),$$

并且这个等式可以逐项微分 $m-1$ 次。

(d) 当且仅当 $Y(x) \equiv 0$ 是满足下列条件的唯一函数时，自共轭特征值问题(1)，(2)是封闭的：

(α) $Y(x)$具有 $m-1$ 阶连续导数，并且满足边界条件(8)；

(β) 如果假设

$$G_n(u) = g_n u^{(n)},$$

$$G_\nu(u) = \frac{d}{dx} G_{\nu+1}(u) + g_\nu u^{(\nu)} \quad (\nu = n-1, \cdots, 1, 0),$$

则对于 $\nu = 0, 1, \cdots, n$，$G_\nu(Y)$存在；

(γ) $G_0(Y) = 0$[1)]；

(δ) 对于每一个容许函数$u(x)$，下列等式成立：

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p [u^{(p)} G_{p+1}(Y) - Y^{(p)} G_{p+1}(u)] \Big|_a^b = 0.$$

例：设$m \geqslant 2$，$n=1$，即方程(1)具有下列形式：

$$F(y) + \lambda[(g_1 y')' + g_0 y] = 0;$$

设在边界条件当中包括等式

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0.$$

这时，条件(β)和(δ)自动地满足，而条件(γ)给出

1) 在 $n=1$ 或 $n=2$ 的情况，这个条件可以用条件 $G(Y)=0$ 来代替.

$$(g_1y')'+g_0y=0.$$

因此，如果边值问题

$$(g_1y')'+g_0y=0,\quad y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0$$

具有唯一的解 $y\equiv0$，则所讨论的问题是封闭的．如果 $g_1(a)\neq0$，则在每一个包含着点 a 并使得 $g_1\neq0$ 的区间中，一定有 $y\equiv0$；对于点 b 也有同样的情况．所以，如果使得 $g_1(x)$ 等于零的点不多于一个，则所讨论的问题显然是封闭的．

§5．更一般形式的边界条件和附加条件

仍然设给定下列形式的方程(见 1.1 节和 2.1 节)：

$$L(y)=f(x)\quad 或者\quad L(y)+\lambda g(x)y=f(x).$$

到现在为止所讨论过的边界条件都是对于某一个有限区间的端点的．这些边界条件可以用各种不同的方式来推广：

(a) 区间在一边是无限的，例如具有 $a\leqslant x<\infty$ 的形式．要求找出给定的微分方程的解 $y(x)$，当 $x\to\infty$ 时，这些解趋向于零或者是有界的，可是在点 a，还是可以给出从前那种类型的边界条件(当然，这些边界条件中对于点 b 的那一部分除外)．对于 $-\infty<x\leqslant b$ 和 $-\infty<x<+\infty$ 的情况，也是类似的．

(b) 如果 b 是微分方程的奇点，则要求找出这样的解，当 $x\to b$ 时，这个解趋向于零或者是有界的，而在点 a，还是可以给出从前那种类型的边界条件．当 $x=a$ 是奇点或者区间的两端都是奇点时，情况类似[1]．

(c) 在下列 n 个点上：

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_n=b,$$

1) [关于情况(a)和(b)，见 9.9 节和 9.10 节．更详细的叙述见下列著作：Наймарк；Coddington 和 Levinson.——俄译本编者注.]

给定待求函数的值[1]

$$y(a_\mu)=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, n).$$

(d) 情况(c)的推广：设给定一些数 $\alpha_{\mu,p}^{(q)}$ 和一些点

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_k=b.$$

假设

$$U_{\mu,p}(y)=\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_{\mu,p}^{(q)}y^{(q)}(a_p);$$

待求函数应当满足条件

$$\sum_{p=1}^{k}U_{\mu,p}(y)=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, n)^{2)}.$$

(e) 待求函数应当满足积分的条件

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_a^b a_{\mu,\nu}(t)\,y^{(\nu)}(t)\,dx=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, n)^{3)}.$$

(f) 在(d)的条件中可以包括(e)中指出的那种类型的一些积分项[4].

(g) 设给定条件

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_a^b y^{(\nu)}(t)\,d\alpha_{\mu,\nu}(t)=\gamma_\mu \quad (\mu=1, \cdots, n),$$

其中积分理解为黎曼-斯蒂尔吉斯意义下的. 这些条件包括了情况(c)—(f), 以及从前讨论过的有限区间上的边界条件[5].

---

1) 见 Sansone, 以及 H. Geppert, *Math. Ann.* **95**(1926), p. 368—388; A. Kneschke, *Deutsche Math.* **5**(1941), p. 384—393.

2) 见 J. Tamarkin. *Math. Zeitschrift* **27**(1927), p. 1—54; K. Toyoda, *Tôhoku Math. Journ.* **38**(1933), p. 343—355.

3) 见 M. Picone. *Atti Accad. Lincei*(5), **17**(1908), p. 340—347; (6), **15**(1932), p. 942—948.

4) 见 G. Mammana, *Annali Pisa* **15**(1927).

5) 见 R. D. Carmichael, *Americ. Journ. Math.* **44**(1922), p. 129—152; N Cioranescu, *Buletinul Cernauti* **5**(1931), p. 99—117.

所有这些边界条件的共同点是，它们都是线性的．由于这种情况，前面对于最简单的边界条件所叙述的理论结果的大部分，几乎都可以照搬到这些比较一般的情况．这首先指的是：关于格林函数的存在问题，关于化边值问题为积分方程问题，以及如果不存在奇点，且$[a, b]$是有限区间，则在确定特征值时关于行列式$\Delta(\lambda)$及其作用的问题．

第二章　线性微分方程组的边值问题和特征值问题

§ 6. 线性微分方程组的边值问题和特征值问题[1]

在许多场合，对于微分方程组和对于一个 n 阶微分方程，情况是一样的．在其理论建立过程完全类似的情况中，我们将援引第一章相应之处，而仅仅指出不同的地方．

6.1. 表示法和可解性条件[2]. 设给定线性微分方程组

$$u'_\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{n}f_{\mu,\nu}(x)u_\nu+f_\mu(x)\quad(\mu=1,\cdots,n),\tag{1}$$

其中函数 $f_\mu, f_{\mu,\nu}$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的．借助于秩为 n 的矩阵[3]

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} & \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n}\end{pmatrix}$$

以及一些给定的数 γ_μ，建立边界条件

$$U_\mu(u)=\gamma_\mu\quad(\mu=1,\cdots,n),\tag{2}$$

其中

1) [本章叙述的问题在下一专著中有所讨论：Наймарк.
其中证明了本段援引的定理，并且指出了原始文献．——俄译本编者注．]

2) 同 1.1 节和 1.2 节相比较．

3) 同在 § 1 中一样，最初不一定要假定行数也等于 n．

$$U_\mu(u)=\sum_{\varkappa=1}^{n}\left[\alpha_{\mu,\varkappa}u_\varkappa(a)+\beta_{\mu,\varkappa}u_\varkappa(b)\right]. \tag{3}$$

要求确定一组满足方程组(1)和边界条件(2)的函数

$$u_1(x),\ \cdots,u_n(x),$$

这样，就组成了边值问题(1)，(2)。如果$\gamma_\mu=0$，则边值问题称为半齐次的，此外如果还有$f_\mu\equiv 0$，则称为齐次的．因而，对应于(1)，(2)的齐次边值问题具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&u'_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}f_{\mu,\nu}(x)u_\nu \qquad (4)\\ &U_\mu(u)=0 \qquad (5)\end{aligned}\right\}\quad(\mu=1,\ \cdots,\ n).$$

我们将不去关心齐次边值问题的平凡解$u_1\equiv\cdots\equiv 0$。如果齐次边值问题(4)，(5)有非零解，则存在k个线性无关的解

$$\vec{u}_1=\{u_{1,1},\ \cdots,\ u_{1,n}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{u}_k=\{u_{k,1},\ \cdots,\ u_{k,n}\}$$

使得此边值问题的每一个解$\vec{u}=\{u_1,\ \cdots,\ u_k\}$可以表示为这$k$个解的线性组合，即表示为下列形式：

$$u_1=\sum_{p=1}^{k}c_pu_{p,1},\ \cdots,u_n=\sum_{p=1}^{k}c_pu_{p,n}.$$

在这种情况下，边值问题称为k重可解的．

如果

$$\varphi_{\nu,1}(x),\ \cdots,\varphi_{\nu,n}(x)\quad(\nu=1,\ \cdots,\ n) \tag{6}$$

是方程组(4)的基本解组，则当且仅当行列式

$$\Delta=\mathrm{Det}\,|U_\mu(\varphi_\nu)|\quad(\mu,\ \nu=1,\ \cdots,\ n) \tag{7}$$

等于零时，齐次边值问题具有非平凡解；这里，$U_\mu(\varphi_\nu)$表示将函数组(6)代入U_μ以后所得到的表达式．如果Δ的秩为r，则齐次边值问题(4)，(5)是$n-r$重可解的．因此，或者是非

齐次边值问题(1), (2) 具有唯一的解，或者是齐次边值问题(4),(5)至少有一个非零解.

6.2. 共轭边值问题[1]. 同方程组(4)共轭的方程组具有下列形式：

$$v'_\mu = -\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\mu}(x) v_\nu \quad (\mu=1, \cdots, n). \tag{8}$$

建立微分型

$$L_\mu(u) \equiv u'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} f_{\mu,\nu} u_\nu,$$

以及与其共轭的微分型

$$L^*_\mu(v) \equiv -v'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\mu} v_\nu,$$

其中函数 $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$ 具有前一些阶数的连续导数. 这时，不难直接验证，格林公式具有下列形式：

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_a^b [v_\mu L_\mu(u) - u_\mu L^*_\mu(v)] dx =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} [u_\mu(b) v_\mu(b) - u_\mu(a) v_\mu(a)]. \tag{9}$$

如果借助于某一个秩为 n 的矩阵 (γ, δ) [正如曾借助于矩阵 (α, β)所做过的那样]，建立表达式

$$V_\mu(v) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} [\gamma_{\mu,\nu} v_\nu(a) + \delta_{\mu,\nu} v_\nu(b)],$$

而利用这些表达式建立边界条件

$$V_\mu(v) = 0 \quad (\mu=1, \cdots, n). \tag{10}$$

那么，如果对于任意两组数

$$u_1(a), \cdots, u_n(a), \quad u_1(b), \cdots, u_n(b),$$

---

1) 同 1.3 节相比较.

$$v_1(a), \cdots, v_n(a), \quad v_1(b), \cdots, v_n(b),$$

其中第一组满足边界条件(5)，第二组满足边界条件(10)，可以使得处在公式(9)右端的表达式等于零：

$$\sum_{\nu=1}^{n} [u_\nu(b)v_\nu(b) - u_\nu(a)v_\nu(a)] = 0,$$

则边值问题(8),(10)称为与边值问题(4),(5)是**共轭的**.上述条件等价于下列等式：

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{\mu,k}\gamma_{\nu,k} - \beta_{\mu,k}\delta_{\nu,k}) = 0 \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, n).$$

边值问题(4),(5)和(8),(9),或者二者都是不可解的,或者二者都是可解的,并且具有同样的重数,情况总是这样.

半齐次边值问题(1),(2),其中$\gamma_\mu = 0$,当且仅当对于边值问题(8),(10)的每一组解 $v_1, \cdots, v_n$, 等式

$$\sum_{p=1}^{n} \int_a^b f_p(x) v_p(x) dx = 0$$

成立时,是可解的.

关于自共轭边值问题,见 6.5 节.

6.3. 格林矩阵[1]. 矩阵

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,1}(x, \xi) \cdots \Gamma_{1,n}(x, \xi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma_{n,1}(x, \xi) \cdots \Gamma_{n,n}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

称为齐次边值问题(4),(5)的**格林矩阵**,如果矩阵的n行构成方程组(4)的基本解(见第一部分 9.7 节),此外,对于每一个ξ矩阵的元素作为x的函数满足边界条件(5). 当且仅当齐次边值问题(4),(5)没有任何一个非平凡解时, 格林矩阵存在,

1) 同 1.5 节和 1.6 节相比较. 关于格林矩阵的推广见 W. T. Reid, *Americ. Journ. Math.* **53** (1931), p. 443.

并且在这种情况下，存在唯一的格林矩阵．从第一部分 9.7 节引入的基本解，如果选择其中的数量 $c_{p,\nu}(\xi)$，使得基本解的每一行都满足边界条件，则可得到格林矩阵[1]．共轭边值问题(8)，(10)的格林矩阵 $\overline{\Gamma}(x,\xi)$ 的元素具有下列形式：

$$\overline{\Gamma}_{p,q}(x,\xi)=\Gamma_{q,p}(\xi,x),$$

当 $\gamma_\mu=0$ 时的半齐次边值问题(1)，(2)的解，由下列公式给出：

$$u_\nu=\sum_{p=1}^{n}\int_a^b \Gamma_{p,\nu}(x,\xi)f_p(\xi)\,d\xi \quad (\nu=1,\cdots,n).$$

6.4．特征值问题[2]．设给定不都恒等于零的连续函数 $g_{\mu,\nu}(x)$．建立含有参数 λ 的一般边值问题：

$$u'_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}(f_{\mu,\nu}+\lambda g_{\mu,\nu})u_\nu+f_\mu;\quad U_\mu(u)=\gamma_\mu$$
$$(\mu=1,\cdots,n),\tag{11}$$

以及与其对应的齐次边值问题(特征值问题)：

$$u'_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}(f_{\mu,\nu}+\lambda g_{\mu,\nu})u_\nu;\quad U_\mu(u)=0$$
$$(\mu=1,\cdots,n).\tag{12}$$

与(12)共轭的边值问题具有下列形式：

$$v_\mu=-\sum_{\nu=1}^{n}(f_{\nu,\mu}+\lambda g_{\nu,\mu})v_\nu;\quad V_\mu(v)=0$$
$$(\mu=1,\cdots,n).\tag{13}$$

---

1) 格林矩阵的明显表达式，见下列著作：E. Буницкий, К теории функций Грина обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Одесса, 1913 或 E. Bounitzky, *Journal de Math.*(6), **5** (1909), p. 65—125.

2) 同 2.1 节和 2.2 节相比较．

其中 V_μ 具有 6.2 节所指出的意义. 使得齐次边值问题(12)具有非零解 $u_1, \cdots, u_n$ 的数 λ,称为特征值，而这个解本身则称为特征向量.对于给定的特征值,如果有 k 个线性无关的特征向量与其相对应,我们就说此特征值具有 k 重.

如果(6)是齐次边值问题(12)的方程组的基本解组,并且如果对于每一个 λ,选择函数 $\varphi_{\nu,\varkappa}=\varphi_{\nu,\varkappa}(x, \lambda)$, 使得

$$\varphi_{\nu,\varkappa}(a, \lambda)=e_{\nu,\varkappa} \quad (\nu, \varkappa=1, \cdots, n),$$

则行列式

$$\Delta(\lambda)=\operatorname{Det}|U_\mu(\varphi_\nu)|$$

(见 6.1 节)是 λ 的整函数，其零点是齐次边值问题(12)的特征值. 由此可知;或者每一个 λ 都是特征值,或者存在不多于可数个特征值.

齐次边值问题(12)和与其共轭的边值问题(13)特征值相同，特征值的重数也相同. 如果 λ, λ^* 是两个不同的特征值，$u_1, \cdots, u_n$ 是齐次边值问题(12)对应于 λ 的特征向量，而 $v_1, \cdots, v_n$ 是共轭边值问题(13)对应于 λ^*的特征向量,则下列双正交性关系式成立:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \int_a^b g_{p,q} v_p u_q dx=0.$$

如果 $\lambda=0$ 不包括在特征值当中,则当 $\lambda=0$ 时,对于齐次边值问题(12),存在格林矩阵,而一般边值问题(11)可以用下列积分方程组来代替:

$$u_\nu(x)=\lambda \sum_{p,q=1}^{n} \int_a^b \Gamma_{p,\nu}(x, \xi) g_{p,q}(\xi) u_q(\xi) d\xi+$$

$$+\sum_{p=1}^{n} \int_a^b \Gamma_{p,\nu}(x, \xi) f_p(\xi) d\xi \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

6.5. 自共轭特征值问题[1). 齐次边值问题(12)的方程组称为自共轭的(在广义下)，如果存在由连续可微函数 $T_{p,q}(x)(p, q=1, \cdots, n)$组成的(与$\lambda$无关的)矩阵$(T_{p,q})$，使得

$$\operatorname{Det}|T_{p,q}|\neq 0,$$

并且当函数组 $u_1, \cdots, u_n$ 遍及齐次边值问题(12)的方程组的所有解时，函数组

$$v_p(x)=\sum_{q=1}^{n} T_{p,q}(x)u_q(x) \quad (p=1, \cdots, n) \tag{14}$$

遍及共轭边值问题(13)的方程组的所有解. 对此，其充分必要条件是：函数 $T_{p,q}$ 满足方程组

$$\left.\begin{aligned} T'_{p,q}+\sum_{\nu=1}^{n}(T_{p,\nu}f_{\nu,q}+T_{\nu,q}f_{\nu,p})=0, \\ \sum_{\nu=1}^{n}(T_{p,\nu}g_{\nu,q}+T_{\nu,q}g_{\nu,p})=0 \end{aligned}\right\}(p, q=1, \cdots, n).$$

特征值问题(12)称为是自共轭的，如果其方程组是自共轭的，并且，如果共轭问题(13)的边界条件，当将由(14)令 $x=a, b$ 而得到的数值 $v_\nu(a), v_\nu(b)$ 代入其中以后，同(12)的边界条件相同. 这个条件同下列等式是等价的：

$$\sum_{p,q=1}^{n}\alpha_{\mu,p}T^{-1}_{p,q}(a)\alpha_{\nu,q}=\sum_{p,q=1}^{n}\beta_{\mu,p}T^{-1}_{p,q}(b)\beta_{\nu,q}$$

$$(\mu, \nu=1, \cdots, n),$$

其中 $T^{-1}_{p,q}$ 是从方程组(14)解出 u 时得到的系数，即

$$u_p=\sum_{q}T^{-1}_{p,q}\ v_q\ .$$

1) 也可参阅第一部分 9.5 节.

根据布利斯的定义[1]，自共轭特征值问题(12)称为**正定自共轭的**，如果下列三个条件也成立：

(α) 函数

$$S_{p,q}(x)=\sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu,p}g_{\nu,q}$$

构成对称矩阵 $(S_{p,q})$，因此，对于任意的一些复数 y_p 和与其共轭的复数 $\bar{y}_p$，表达式

$$\sum_{p,q} S_{p,q}y_p\bar{y}_q$$

是实数.

(β) 永远有

$$\sum_{p,q} S_{p,q}y_p\bar{y}_q\geqslant 0.$$

(γ) 如果对于具有连续函数 $g_\nu(x)$ 的任何微分方程组

$$y_\nu'=\sum_{p=1}^{n}(f_{\nu,p}y_p+g_{\nu,p}g_p)\quad(\nu=1,\cdots,n)\tag{15}$$

的某一个解 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$，下列恒等式成立：

$$\sum_{p,q} S_{p,q}y_p\bar{y}_q\equiv 0,$$

则有 $y_1\equiv\cdots\equiv y_n\equiv 0$.

如果将 $g>0$ 的 n 阶方程的自共轭特征值问题，用一阶方程组的自共轭特征值问题来代替，则根据布利斯的定义，对此方程组可以得到正定自共轭特征值问题.

对于正定自共轭特征值问题，下述结论成立：所有的特

1) 见 G. A. Bliss. *Transactions Americ. Math. Soc.* **28** (1926), p. 561—584; **44** (1938), p. 413—428.

征值都是实的，所以特征向量也总是可以取为实的. 特征值 λ_0 的重数，和 λ_0 作为函数 $\Delta(\lambda)$ 的零点所具有的重数相同. 存在可数个特征值，对应于特征向量完备规范化正交系

$$u_{\nu,1}(x), \cdots, u_{\nu,n}(x) \quad (\nu=1, 2, \cdots),$$

$$\sum_{p,q=1}^{n}\int_a^b u_{\mu,p}S_{p,q}u_{\nu,q}dx=e_{\mu,\nu} \quad (\mu, \nu=1,2, \cdots).$$

如果函数 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$满足齐次边值问题(12)的边界条件，其次，如果在适当选择连续函数 $g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 时，它们满足条件(15)，则 n 个级数

$$\varphi_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, u_{k,\nu}(x) \quad (\nu=1, \cdots, n)$$

在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上均匀收敛，其中

$$c_k=\sum_{p,q=1}^{n}\int_a^b u_{k,p}(\xi)S_{p,q}(\xi)y_q(\xi)d\xi,$$

并且有

$$\sum_{p=1}^{n} g_{\nu,p}(y_p-\varphi_p)\equiv 0 \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

如果从最后这些等式可以推出 $y_p\equiv\varphi_p$，这样，则对于一些个别的 y_p，或对于所有的 y_p，我们得到按特征向量的分量的展开式. 例如，如果 $\mathrm{Det}|g_{p,q}|\neq 0$，则这一结论对于所有的 $p=1, \cdots, n$ 来说，显然都是正确的.

[正则边值问题特征值的渐近值，以及按特征函数展开的相应定理，在专著 Наймарк 第三章中有所论述. ——俄译本编者注.]

第三章　低阶方程的边值问题和特征值问题[1)]

§ 7. 一 阶 问 题

7.1. 线性问题. 设函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的. 求下列线性微分方程的解:

$$y'+[f(x)+\lambda g(x)]y=h(x), \tag{1}$$

此解还应当满足某些附加条件. 这里不会发生任何重大困难,因为此方程所有的解都能够按照第一部分 4.3 节的方法求出,所以剩下的问题只是选择积分常数,使得方程的解满足所提出的附加条件.

如果给定的问题是齐次的,即如果 $h\equiv 0$, 并且给定边界条件

$$y(b)=\alpha y(a)\quad(\alpha\neq 0), \tag{2}$$

那么,如果对于某一个 λ 值,微分方程具有满足边界条件(2)

---

1) [杂志中有大量的文章研究低阶(特别是二阶)方程的边值问题和特征值问题,并已得到非常详细的结果. 但是,这里既不可能介绍所有的结果,也不可能列举所有的最新研究. 为了初步熟悉以后会涉及到的问题,可以参考下列著作:

Ince; Наймарк; Sansone; Coddington 和 Levinson; Tricomi; Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950; B. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions Associated with Secondorder Differential Equations (俄译本: Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 1960).

在这些著作中,可以找到下面援引的结论的证明和发展,以及必要的文献索引.——俄译本编者注.]

并且不恒等于零的解，则此 λ 值是特征值(同 2.1 节相比较)。因为在这种情况下，方程(1)的解具有下列形式：

$$y=C\exp\left\{-\int_a^x (f+\lambda g)\,dx\right\},$$

所以 λ 应当满足方程

$$-\int_a^b (f+\lambda g)\,dx=\ln \alpha.$$

如果 $\int_a^b g\,dx\neq 0$，则存在无穷多个特征值．如果 λ_0 是某一个特征值，则其余的特征值可以由下列条件来确定：

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b g\,dx=2k\pi i \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

因而，所有特征值全都处在某一条直线上，此直线平行于复 λ 平面的虚轴；当且仅当 $\alpha>0$ 时，λ_0 可以取实数值．

曾详细地研究过下列问题[1)]：

$$y'=y\sum_{\nu=1}^{n}\frac{g_\nu(x)}{\lambda-\alpha_\nu};\quad y(a)=y(b).$$

7.2．非线性问题． 设要求确定这样的 λ 值，对于这个 λ 值，微分方程

$$y'=\lambda f(x,\ y)$$

具有通过两个给定点 $(a,\ A)$ 和 $(b,\ B)$ $(a<b)$ 的积分曲线．如果 $B>A$，又例如 f 在矩形 $a\leqslant x\leqslant b,\ A\leqslant y\leqslant B$ 内是连续可微的，并且 >0，则存在唯一的特征值．

---

1) R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **25** (1923), p. 155—172.

§ 8. 二阶线性边值问题

8.1. 一般注记. 设给定微分方程

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x).$$

如果f_ν和f是连续的，并且在区间$a\leqslant x\leqslant b$上不为零，则根据第一部分24.1节，此方程总是可以化为自共轭形式

$$[f(x)y']'+g(x)y=h(x). \tag{1}$$

这里，函数f应当是连续可微的，并且不等于零，g和h应当是连续的；下面假设这些条件永远成立.

方程(1)的解应当满足边界条件

$$U_\mu(y)=\gamma_\mu \quad (\mu=1,2), \tag{2}$$

其中

$$U_\mu(y)=\alpha_\mu y(a)+\alpha'_\mu y'(a)+\beta_\mu y(b)+\beta'_\mu y'(b), \tag{3}$$

而矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha'_1 & \beta_1 & \beta'_1\\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \beta_2 & \beta'_2\end{pmatrix} \tag{4}$$

之秩为2，即U_μ彼此之间应当是线性无关的.

齐次边值问题

$$(fy')'+gy=0;\quad U_\mu(y)=0 \quad (\mu=1,2), \tag{5}$$

当且仅当

$$(\alpha_1\alpha'_2-\alpha'_1\alpha_2)f(b)=(\beta_1\beta'_2-\beta'_1\beta_2)f(a) \tag{6}$$

时(见1.4节)，是自共轭的.

由方程(1)和边界条件

$$y(a)=\gamma,\qquad y(b)=\delta, \tag{7 a}$$

$$y'(a)=\gamma,\qquad y'(b)=\delta, \tag{7 b}$$

$$\alpha y(a)+\alpha' y'(a)=\gamma,\quad \beta y(b)+\beta' y'(b)=\delta \tag{7 c}$$

组成的边值问题，分别称为第一类、第二类和第三类边值问

题；边界条件(7 c)，当 $\gamma=\delta=0$ 时，也称为斯图姆型条件. 对应的齐次边值问题是自共轭的；当 $f(a)=f(b)$ 时，对应于周期边界条件

$$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b)$$

的边值问题，也有同样的情况.

8.2. 格林函数. 边值问题(5)的格林函数(同 1.5 节相比较)具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=C_1(\xi)\varphi_1(x)+C_2(\xi)\varphi_2(x)+g(x,\xi);$$

这里 φ_1, φ_2 是方程(5)的基本解组，g 是所谓的基本解（同第一部分 17.4 节相比较）：

$$g(x,\xi)=\pm\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)}{2f(\xi)W(\xi)}$$

(当 $x\leqslant\xi$ 时，取上面的符号，当 $x\geqslant\xi$ 时，取下面的符号)，

$$W(\xi)=\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_1'(\xi)\varphi_2(\xi)$$

是朗斯基行列式，而 C_1 和 C_2 应当这样选择，即对于每一个固定的 ξ, $a<\xi<b$, 使得函数 Γ 满足(5)的边界条件. 格林函数和基本解的实例，见第三部分 2.1， 2.2， 2.6， 2.11 等.

8.3. 第一类边值问题解的估值[1].

(a) 如果由方程(1)和边界条件 $y(a)=y(b)=0$ 组成的边值问题，具有某一个解 $y(x)$, 并且 $f>0$, $g\leqslant0$, 则有

$$|y|\leqslant(b-a)^2\frac{H}{\varphi},$$

其中

$$H=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|h(x)|,\quad \varphi=\min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

(b) 我们指出可以将二阶边值问题的解同某一个一阶初

1) 见 M. Picone, *Math. Zeitschrift* **28**(1928), p. 526; P. Clemente, *Atti Accad Lincei*(6), **15**(1932), p. 925—931; F. Prete, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **63** (1930), p. 1115—1132.

值问题的解联系起来的下述结果[1]：设 $f(x)$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时是连续可微的，并且设 $y(x,\lambda)$ 是边值问题

$$y''-\lambda(y'+y)=\lambda f(x);\ y(0)=y(1)=0$$

对于每一个 $\lambda>0$ 都存在的解. 这时

$$\lim_{\lambda\to\infty} y(x,\lambda)=\eta(x)\quad(0\leqslant x<1),$$

其中 $\eta(x)$ 是下列初值问题的解：

$$\eta'+\eta=-f(x),\quad \eta(0)=0.$$

8.4. 当 $|x|\to\infty$ 时的边界条件. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $-\infty<x<+\infty$ 时是连续的，并且如果对于某一些 α,β,A，下列不等式成立：

$$0<\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta,\quad |g(x)|\leqslant A,$$

则方程

$$y''-f(x)y=g(x)$$

具有一个且仅具有一个在整个直线 $-\infty<x<+\infty$ 上有界的解[2].

8.5. 求周期解[3]. 设研究方程 $y''+\alpha^2y=g(x)$，其中 $\alpha>0$，函数 $g(x)\not\equiv 0$，并且对于所有的 x 值是连续的和周期的，其周期为 p. 要求找出具有同样的周期 p 的解，即由上述方程和边界条件

$$y(0)=y(p),\quad y'(0)=y'(p)$$

所组成的边值问题的解. 对应的齐次方程的解具有下列形式：

---

1) 见 E. Rothe, *Journal of Science Iowa College* **13** (1939), p. 369—372.

2) 见 F. H. Murray, *Annals of Math.* (2), **24** (1923), p. 84.

3) [求微分方程(特别是二阶方程)的周期解的问题具有重大的实际意义，并且在一般形式下，远未解决。为了初步熟悉这个问题，可以参阅下列著作：

Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953; Андронов, Витт 和 Хайкин.——俄译本编者注.]

$$C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

根据第一部分 24.2 节，由此可以得到非齐次方程的解，然后只须选择常数 C_1 和 C_2（如果这是可能的），使得相应的解满足边界条件．这时，可能有三种情况：

(a) 齐次边值问题没有任何一个非平凡解，即 $\frac{\alpha p}{2\pi}$ 不是整数．这时，根据 1.2 节最后所述，非齐次边值问题具有唯一的解．

(b) 齐次边值问题具有非平凡解，即 $\frac{\alpha p}{2\pi}=m$ 是整数（共振情况）；这时，甚至齐次方程的任何解，同时也是相应的齐次边值问题的解．其次，应当区别下述情况：

$$(\mathrm{b}_1)\quad \int_0^p g(x)\cos\alpha x\,dx=\int_0^p g(x)\sin\alpha x\,dx=0.$$

这时（同 1.4 节最后的结论相比较），非齐次方程的每一个解，同时也是边值问题的解，即具有周期 p．

(b_2) 如果情况(b_1)没有发生，则对于非齐次方程的每一个解 $y(x)$，将有

$$\overline{\lim_{x\to\pm\infty}}\,|y(x)|=\infty,$$

即"振幅"是无界的．

8.6．一个同研究流体流动有关的边值问题． 在研究河渠中的流体流动时，普劳德曼(Proudman)[1]曾遇到下述问题．设给定边值问题

$$(fy')'+\lambda y=-1;\quad y'(0)=y(1)=0.$$

对于此边值问题的每一个解 $y(x,\lambda)$，求出平均值

$$M(\lambda)=\int_0^1 y\,dx.$$

---

1) J. Proudman, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 24 (1926), p. 131—139.

如果$M(\lambda)=\alpha\lambda$，则解y称为对于给定的数α的特征解。还顺便讨论了在什么情况下函数0和$F(x)$才能按特征函数$y_\nu(x)$展开为

$$0=\sum a_\nu y_\nu,\quad 其中\quad \sum a_\nu=1$$

和

$$F(x)=\sum b_\nu y_\nu,\quad 其中\quad \sum b_\nu=0.$$

的问题。如果在河渠中有潮汐流动的情况下，注意到地球的转动，则根据霍罗克斯(Horrocks)的作法[1)]，可以得到方程组

$$(fu')'+(\lambda+i\gamma)u=-1,\quad (fv')'+(\lambda-i\gamma)v=-1,$$

具有同样的附加条件；这时，只须假设

$$M(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^1(u+v)\,dx.$$

§ 9. 二阶线性特征值问题

9.1. 一般注记. 我们首先考虑下述情况.微分方程具有下列形式：

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+[f_0(x)+\lambda g(x)]y=0, \tag{1}$$

即参数λ仅仅包含在y的系数当中，并且只是线性地出现；在所讨论的区间$a\leqslant x\leqslant b$上，函数f_ν和g是连续的，并且$f_2\neq 0$. 边界条件

$$\alpha_\mu y(a)+\beta_\mu y'(a)=\gamma_\mu y(b)+\delta_\mu y'(b)\quad(\mu=1,2) \tag{2}$$

是线性的，并且彼此线性无关。

根据第一部分24.1节，方程(1)可以写为下列自共轭方

1) H. Horrocks, *Proceedings Soc. London* A **115** (1927), p. 184—198.

程的形式：

$$[f(x)y']'+[\lambda g(x)+h(x)]y=0, \tag{3}$$

其中，$f\neq0$，并且是连续可微的，而函数 g 和 h 是连续的[1]。

特征值问题(3)，(2)，当且仅当

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)f(b)=(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)f(a) \tag{4}$$

时，是自共轭的．在应用中经常会遇到这种情况．自共轭特征值问题，当 $g\neq0$ 时，在 2.3 节的意义下，永远是正则的．

还应当考虑更一般的特征值问题，即方程

$$[f(x,\lambda)y']'+g(x,\lambda)y=0 \tag{5}$$

具有边界条件(2)，其中系数 $\alpha_\mu,\cdots,\delta_\mu$ 也可以依赖于 λ．方程(5)同方程组

$$y'=\frac{z}{f},\qquad z'=-gy.$$

是等价的．所以，此特征值问题也可以写为下列形式：

$$y'=F(x,\lambda)z,\quad z'=-G(x,\lambda)y, \tag{6}$$

具有边界条件

$$A_\mu y(a)+B_\mu z(a)=C_\mu y(b)+D_\mu z(b)\quad(\mu=1,2); \tag{7}$$

当且仅当

$$A_1B_2-A_2B_1=C_1D_2-C_2D_1$$

时，此特征值问题是自共轭的．

在 9.2 节—9.5 节中，假设所讨论的特征值问题都是自共轭的．在 9.6 节中讨论非自共轭边值问题，而在 9.7 节中讨论其他类型的附加条件．

到目前为止，曾假设在方程(1)中 $f_2\neq0$．实际上，这个假设并不总是必要的．考虑微分方程

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0,$$

1) 关于更特殊的标准形式（刘维尔标准型）见 9.2 节 (a_1)。

根据卡拉西奥多里定理（第一部分，5.3 节），甚至只要f和g是可积的，因而例如f, g具有这样的一个间断点ξ，使得函数$f(x)(x-\xi)^{\delta}$, 对于某一个$\delta(0<\delta<1)$，在点ξ是连续的，即可保证此微分方程的解存在. 显然，微分方程(1)在形式上可以写为这种类型的方程，如果$f_2(x)$在一个点上具有“阶数<1的零点”. $f_2(x)$具有阶数$\geqslant 1$的零点的情况，这将在 9.9 节中进行讨论.

9.2. 自共轭特征值问题. 设给定微分方程(3)，在区间$a\leqslant x\leqslant b$上，函数f不等于零并且是连续可微的，函数g和h是连续的；此外，给定边界条件(2). 我们讨论自共轭特征值问题，即条件(4)应当成立.

(a) $g(x)\neq 0$. 这时，可以假设$f>0$和$g>0$. 详细地研究下列常常会遇到的问题：

(a_1) **斯图姆问题**，即具有第三类边界条件（见 8.1 节）或斯图姆型条件的情况：

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0,$$
$$|\alpha|+|\beta|>0;\quad |\gamma|+|\delta|>0$$

（实例见第三部分 2.9）. 在这种情况下，下述定理成立：

斯图姆振荡定理. 存在无穷多个特征值，所有的特征值都是实的，并且可以排列为无界单调渐增序列的形式. 每一个特征值的重数为 1；因此，对应于同一个特征值λ_n的所有特征函数$\varphi_n(x)$，彼此仅差一个不为零的常数因子. 每一个特征函数φ_n, 在开区间(a, b)上，正好具有n个零点.

特征函数满足正交性关系式

$$\int_a^b g\varphi_p\varphi_q dx=0\quad 当p\neq q时.$$

如果$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$是完备规范化特征函数系，即如果还满足条件

$$\int_a^b g\varphi_n^2 dx = 1,$$

则除了 2.14 节的展开定理以外，下述结论也成立：对于每一个这样的分段连续可微函数 $F(x)$，即如果 $\varphi_0(a)=0$，则有 $F(a)=0$，如果 $\varphi_0(b)=0$，则有 $F(b)=0$，级数

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad \text{其中}\, c_n=\int_a^b F(x)g(x)\varphi_n(x)dx,$$

绝对收敛且均匀收敛于 $F(x)$.

刘维尔标准型. 如果在方程 (1) 中 $\dfrac{f_1}{f_2}$ 具有连续的一阶导数，而 $\dfrac{g}{f_2}$ 具有连续的二阶导数，则经过变换

$$\eta(\xi)=\Phi(x)y(x), \quad \xi=\int_a^x \sqrt{\frac{g}{f_2}}\,dx,$$

其中

$$\Phi(x)=\sqrt[4]{\frac{g}{f_2}}\exp\frac{1}{2}\int_a^x \frac{f_1}{f_2}dx,$$

可将此方程化为刘维尔标准型

$$\eta''+[\lambda-\varphi(\xi)]\eta=0;$$

这里

$$\varphi(\xi)=\frac{f_0}{g}+\frac{1}{2}\left(\frac{g}{f_2}\right)'\left(\frac{f_2}{g}\right)^2\frac{\Phi'}{\Phi}-\frac{f_2}{g}\frac{\Phi''}{\Phi},$$

并且在此等式的右端，x 也需要通过 ξ 来表示. 应当注意，一般说来，在进行这种变换时，边界条件以及区间 $[a, b]$ 本身，也会发生变化. 但是斯图姆型条件，仍然转变为同类型的条件.

当 n 取大值时的特征值和特征函数. 设给定写成刘维尔

标准型的微分方程

$$y''+[\lambda+h(x)]y=0, \tag{8}$$

并且这里应当假设，$h(x)$具有连续的导数；仍然取在(a_1)的开始指出的斯图姆型边界条件作为边界条件。根据2.12节，这种特征值问题同下列沃尔泰拉型积分方程是等价的：

$$y(x)=-\beta\cos k(x-a)+$$

$$+\frac{a}{k}\sin k(x-a)-\frac{1}{k}\int_a^x h(\xi)y(\xi)\sin k(x-\xi)d\xi,$$

其中$\lambda=k^2$，而k应当这样选择，使得$y(x)$也满足第二个边界条件。利用逐次逼近法(见2.10节和2.12节例2)可以近似地算出特征值$\lambda_n=k_n^2$和特征函数$\varphi_n(x)$。如果假设

$$H(u,v)=\frac{1}{2}\int_u^v h(\xi)d\xi,$$

则得到：

当$\beta\neq0$, $\delta\neq0$时：

$$k_n=\frac{\pi n}{b-a}-\frac{A}{\pi n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中 $$A=H(a,b)+\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta},$$

$$\varphi_n=\cos\frac{\pi n(x-a)}{b-a}+\frac{1}{\pi n}\left[(x-a)\left(H(x,b)-\frac{\gamma}{\delta}\right)-\right.$$

$$\left.-(b-x)\left(H(a,x)+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\sin\frac{\pi n(x-a)}{b-a}+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

当$\beta\neq0$, $\delta=0$, $\gamma=1$时：

$$k_n=\frac{(2n+1)\pi}{2(b-a)}-\frac{2B}{(2n+1)\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中 $B=H(a,b)+\frac{\alpha}{\beta}$;

$$\varphi_n=\cos\frac{(2n+1)\pi(x-a)}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+1)\pi}\Big[(x-$$

$$-a)H(x,b)-(b-x)\Big(H(a,x)+$$

$$+\frac{\alpha}{\beta}\Big)\Big]\sin\frac{(2n+1)\pi(x-a)}{2(b-a)}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big);$$

当 $\beta=0,\ \delta\neq0,\ \alpha=1$ 时:

k_n 的确定同上面一样，但是 $B=\frac{1}{2}H(a,b)-\frac{\gamma}{\delta}$,

$$\varphi_n=\sin\frac{(2n+1)\pi(x-a)}{2(b-a)}-$$

$$-\frac{2}{(2n+1)\pi}\Big[(x-a)\Big(H(x,b)-\frac{\gamma}{\delta}\Big)-$$

$$-(b-x)H(a,x)\Big]\cos\frac{(2n+1)\pi(x-a)}{2(b-a)}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big);$$

当 $\beta=\delta=0,\ \alpha=\gamma=1$ 时:

$$k_n=\frac{(n+1)\pi}{b-a}-\frac{1}{(n+1)\pi}H(a,b)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$\varphi_n=\sin\frac{(n+1)\pi(x-a)}{b-a}-\frac{1}{(n+1)\pi}[(x-a)H(x,b)-$$

$$-(b-x)H(a,x)]\cos\frac{(n+1)\pi(x-a)}{b-a}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

(a_2) **一般的自共轭边界条件**. 借助于适当的线性变换，一般的自共轭边界条件(2),(4),可以化为下列形式:

$$y(b)=\alpha y(a)+\beta y'(a),\ y'(b)=\gamma y(a)+\delta y'(a),$$

其中

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\frac{f(a)}{f(b)}.$$

对于这个问题，存在无穷多个特征值。所有这些特征值都是实的。对此情况，振荡定理可以这样叙述[1]：

全体特征值可以排列为两个无界递增序列的形式：

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots \quad 和 \quad (\bar{\lambda}_0<)\bar{\lambda}_1<\bar{\lambda}_2<\cdots$$

并且：1）只要 $\beta<0$ 或者 $\beta=0$, $\alpha>0$，则 λ_0 存在，2）$\lambda_n\leqslant\bar{\lambda}_n<\lambda_{n+1}$。如果 $\lambda_n=\bar{\lambda}_n$，则此数是重数为 2 的特征值，即当 $\lambda=\lambda_n$ 时，方程(3)**所有**的解都是特征函数。如果 $\lambda_n<\bar{\lambda}_n$，则这些数中的每一个都是简单的特征值，即对应于特征值 λ_n 的所有特征函数 $\varphi_n(x)$，彼此相差一个不等于零的常数因子，对于对应于 λ_n 的特征函数 $\bar{\varphi}_n(x)$ 也有同样的情况。如果 $N(n)$ 表示对应于特征值 $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$ 的特征函数 $\varphi_n, \bar{\varphi}_n$ 在半开区间 $a<x\leqslant b$ 上的零点的个数，则 $N(n)$ 等于

$2n-2$ 或 $2n-1$	当 $\beta>0$ 时，
$2n-1$	当 $\beta=0, \alpha<0$ 时，
$2n-1$ 或 $2n$	当 $\beta<0$ 时，
$2n$	当 $\beta=0, \alpha>0$ 时。

(b) **函数** $g(x)$ **可以变号，但是特征值问题是正定的**[2]（见 2.13 节），即 $\lambda=0$ 不是特征值，并且对于每一个满足给定的自共轭边界条件(2)的二次连续可微函数 $y(x)$，

$$-\int_a^b[(fy')'y+hy^2]dx=$$

$$=-fyy'\Big|_a^b+\int_a^b(fy'^2-hy^2)dx\geqslant 0$$

1）见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 44 (1938), p. 635—658; A. C. Zaanen, *Compos. math.* 7 (1939), p. 253—282.

2）如果 $g(x)$ 变号，但是特征值问题不是正定的，则见 R. G. D. Richardson, *Americ. Journ. Math* 40 (1918), p. 283—316.

例如，当 $\lambda=0$ 不是特征值，$f>0, h\leqslant 0$，此外，对于每一个满足上述条件的函数 y，有

$$fyy'\Big|_a^b=0$$

时，就属于这种情况. 如果边界条件具有 $y(a)=y(b)=0$ 或者 $y'(a)=y'(b)=0$ 的形式，则最后这个假设显然成立. 在这种情况下，存在无穷多个特征值，并且有展开定理(见 2.14 节). 实例见第三部分 2.14.

9.3. $y'=F(x,\lambda)z,\ z'=-G(x,\lambda)y$，边界条件是自共轭的. 设给定边界条件(7)，其中系数也可以依赖于 λ. 如果对于某一个 λ 值，方程组(6)具有满足边界条件(7)的非平凡解 $y(x), z(x)$，则同从前一样，这个 λ 值称为此边值问题的特征值；这时，函数 y, z 称为特征函数或特征向量. 函数 F, G 应当满足下列条件：

Ⅰ. 当 $a\leqslant x\leqslant b, \Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ 时，$F(x,\lambda), G(x,\lambda)$ 是连续的，并且 $F>0$.

Ⅱ. 对于固定的 x，当 λ 增大时，$F(x,\lambda), G(x,\lambda)$ 不减小；对于每两个数 $\lambda_1<\lambda_2$，存在着这样的 $x_0=x_0(\lambda_1,\lambda_2)$，使得

$$G(x_0,\lambda_1)<G(x_0,\lambda_2)$$

或者

$$F(x_0,\lambda_1)<F(x_0,\lambda_2)\ \text{和}\ |G(x_0,\lambda_1)|+|G(x_0,\lambda_2)|>0.$$

Ⅲ. $\lim\limits_{\lambda\to\Lambda_1}G(x,\lambda)=-\infty,\quad \lim\limits_{\lambda\to\Lambda_2}G(x,\lambda)=+\infty.$

(a) 斯图姆型边界条件.

$$Ay(a)=Bz(a),\ Cy(b)=Dz(b),\tag{9}$$

其中 A, B, C, D 是 λ 的连续函数(特别是，它们可以是常数)，并且 $|A|+|B|>0, |C|+|D|>0$. 其次，假设

或者 $B(\lambda)\equiv 0$,

或者 $B(\lambda)\neq 0$，而当 λ 增大时，$A(\lambda)/B(\lambda)$ 不增大；再其

次，假设

或者 $D(\lambda)\equiv 0$，

或者 $D(\lambda)\neq 0$，而当 λ 增大时，$C(\lambda)/D(\lambda)$ 不减小。

这时，下述振荡定理成立[1]：存在无穷多个特征值．这些特征值可以写为序列 $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ 的形式，此序列收敛于 Λ_2．每一个特征值都是简单的，即对应于给定特征值 λ_n 的各组特征函数 $y_n(x)$，$z_n(x)$，彼此相差一个不为零的常数因子．每一个特征函数 $y_n(x)$ 在开区间 $a<x<b$ 内正好具有 n 个零点．

胡尔维茨曾研究过方程组[2]

$$y'=[\lambda+f(x)]z,\quad z'=-[\lambda+g(x)]y, \tag{10}$$

具有边界条件(9)，其中 A, B, C, D 是常数(也可参阅§6)：因为 $\lambda+f(x)$ 可能等于零，所以这个问题不能直接看作为上述问题的特殊情况．如果 f 和 g 是连续的，则问题(10)，(9)永远具有无穷多个特征值；所有的特征值都是实的，并且重数为 1；这些特征值可以排列为序列的形式：

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots,$$

其中 $\lambda_{-n}\to-\infty$，$\lambda_n\to+\infty$．如果 $a=0, b=1$，并且如果将边界条件(9)写为下列形式(这总是可能的)：

$$y(0)\cos\alpha+z(0)\sin\alpha=0,\quad y(1)\cos\beta+z(1)\sin\beta=0,$$

则有

$$\lambda_n=\alpha-\beta-\frac{1}{2}\int_0^1[f(x)+g(x)]dx+n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

对应于 λ_n 的特征函数 y_n，z_n 可以规范化，即使得

1) 见 E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **44**(1939), p.639.

2) 见 W. A. Hurwitz, *Transactions Americ. Math. Soc.* **22**(1921), p.526—543; Ch. Ch. Camp, *Americ. Journ. Math.* **44**(1922), p.25—53.

$$\int_0^1 (y_p y_q + z_p z_q)\,dx = e_{p,q}.$$

这时，

$$y_n = \sin(\xi_n - \alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right),\quad z_n = \cos(\xi_n - \alpha) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中

$$\xi_n = \lambda_n x + \frac{1}{2}\int_0^x [f(x) + g(x)]\,dx.$$

如果函数 $p(x)$, $q(x)$是二次连续可微的，并且满足边界条件，则它们可以同时展开为两个收敛的级数：

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x),\quad q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_n(x),$$

其中

$$c_n = \int_0^1 (p y_n + q z_n)\,dx.$$

(b) 不属于情况(a)的**任意的自共轭边界条件**.可以认为这种边界条件[见 9.2(a_2)]是写成下列形式的：

$$y(b) = Ay(a) + Bz(a),\quad z(b) = Cy(a) + Dz(a).$$

这里，A, B, C, D 是 λ 的连续函数，并且 $AD - BC = 1$.

除了条件 I—III以外，再作以下假设：在区间 $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ 上，或者$B(\lambda) \equiv 0$，或者 $B(\lambda) \neq 0$；因此，只能有下列四种情况：

(α) $B > 0$, (β) $B \equiv 0, A < 0$, (γ) $B < 0$, (δ) $B \equiv 0$, $A > 0$.

其次，设

$$B \cdot \Delta A \geqslant A \cdot \Delta B,\quad D \cdot \Delta C \geqslant C \cdot \Delta D,\quad \Delta A \cdot \Delta D \geqslant \Delta B \cdot \Delta C,$$

其中 $\Delta A = A(\lambda + \varepsilon) - A(\lambda)$ 等等，而 ε 在这些不等式的各项当中表示同一个正数；对于所有足够小的 ε 值，这些不等式都应当成立.

这时，下述振荡定理成立[1)]. 存在无穷多个特征值；这些

特征值可以排列为两个序列：

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots \text{和} (\lambda_0<)\lambda_1<\lambda_2<\cdots,$$

其中每一个序列都收敛于 Λ_2，并且具有下述性质：λ_0 只在情况 (γ) 和 (δ) 中存在；不等式 $\lambda_n\leqslant\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}$ 成立．如果 $\lambda_n=\lambda_n$，则这个数是重数为 2 的特征值，即当 $\lambda=\lambda_n$ 时，方程组(6)的所有非零解都是特征函数．如果 $\lambda_n<\lambda_n$，则这些数中的每一个都是简单的特征值，即对应于特征值 λ_n 的各组特征函数 $y_n(x)$, $z_n(x)$，彼此仅仅相差一个不等于零的常数因子，对于对应于 λ_n 的特征函数 $\bar{y}_n(x)$, $\bar{z}_n(x)$，也有同样的情况．如果 $N(n)$ 表示对应于特征值 λ_n, λ_n (这里也可能 $\lambda_n=\lambda_n$) 的特征函数 $y_n(x)$, $\bar{y}_n(x)$ 在半开区间 $a<x\leqslant b$ 上的零点的个数，则 $N(n)$ 在上述四种情况中具有下列数值：

(α) $2n-2$ 或 $2n-1$，(β) $2n-1$，(γ) $2n-1$ 或 $2n$，(δ) $2n$.

在情况(γ)和(δ)中，函数 $\bar{y}_0$ 甚至在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上没有一个零点．

9.4．特征值问题和变分原理． 设在方程 (3) 中，$f>0$，$g\neq0$ 并且是非负的，$h\leqslant0$；其次，设对于每一个满足边界条件的函数 $y(x)$

$$\mathscr{R}=-fyy'\big|_a^b\geqslant0;$$

最后，设 $\lambda=0$ 不是特征值．这时，根据 2.13 节，最小特征值等于

$$\lambda_1=\min_y\frac{-\int_a^b y[(fy')'+hy]dx}{\int_a^b gy^2dx},$$

1) E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 44(1939), p.635—658.

或者，分部积分以后

$$\lambda_1=\min_y \frac{\int_a^b (fy'^2-hy^2)dx+\mathscr{R}}{\int_a^b gy^2dx}, \tag{11}$$

其中极小值是在所有使得分母≠0并且满足下列条件的函数 $y(x)$ 中选取的：

(a) 二次连续可微，

(b) 满足自共轭边界条件(2)。

根据2.15节(b)，如果由给定的边界条件，借助于线性组合，组成尽可能多个“本性的”即不含导数的边界条件，并且再向它们补充“剩余的”边界条件，即不能将其中的导数之值消去的边界条件，则容许函数的集合可以扩大. 利用剩余的边界条件，可以从 $\mathscr{R}$ 中消去所有的导数，因此，$\mathscr{R}$ 能写为下列二次型的形式：

$$\mathscr{R}_0=\alpha y^2(a)+\beta y(a)y(b)+\gamma y^2(b),$$

假设对于所有满足本性的边界条件的数 $y(a)$, $y(b)$, 此二次型是非负的. 这时

$$\lambda_1=\min_y \frac{\int_a^b (fy'^2-hy^2)dx+\mathscr{R}_0}{\int_a^b gy^2dx},$$

其中极小值是在所有使得分母不等于零并且满足下列条件的函数 $y(x)$ 中选取的：

(a) 连续和逐段光滑，

(b) 满足本性的边界条件.

这时，达到此极小值的函数 $y(x)$，自然是二次连续可微的，并且也满足剩余的边界条件，即是对应于特征值 λ_1 的特征函数.

对于下列边界条件，这些假设成立[1]：

Ⅰ. $y(a)=0,\quad y(b)=0$;

Ⅱ. $y(a)=0,\quad y'(b)=-\beta y(b),\ \beta\geqslant 0$;

Ⅲ. $y(b)=0,\quad y'(a)=\alpha y(a),\ \alpha\geqslant 0$;

Ⅳ. $y(a)=y(b),\ f(a)y'(a)=f(b)y'(b)$;

Ⅴ. $y'(a)=\alpha y(a)-\beta f(b)y(b),\ y'(b)=\beta f(a)y(a)-$
$-\gamma y(b),\quad \alpha,\gamma\geqslant 0,\quad \beta^2 f(a)f(b)\leqslant\alpha\gamma$.

在这些情况中，二次型 $\mathscr{R}_0$ 具有下列形式：

Ⅰ. $\mathscr{R}_0=0$;　Ⅱ. $\mathscr{R}_0=\beta f(b)y^2(b)$;

Ⅲ. $\mathscr{R}_0=\alpha f(a)y^2(a)$;　Ⅳ. $\mathscr{R}_0=0$;

Ⅴ. $\mathscr{R}_0=\alpha f(a)y^2(a)-2\beta f(a)f(b)y(a)y(b)+$
$+\gamma f(b)y^2(b)$.

9.5. 特征值和特征函数的实际计算. 这里应当援引到§3，首先是里兹-伽辽金方法.

如果对于方程(3)，给定斯特姆型边界条件，则此边界条件可以写为下列形式：

$$y(a)\cos\alpha=y'(a)f(a)\sin\alpha\quad(0\leqslant\alpha<\pi),$$

$$y(b)\cos\beta=y'(b)f(b)\sin\beta\quad(0<\beta\leqslant\pi).$$

如果需要求特征值 λ_n，那么利用第一部分25.2节(d)指出的方法，可知：λ 应当这样选择，即使得微分方程

$$\vartheta'(x)=\frac{1}{f}\cos^2\vartheta+(\lambda g+h)\sin^2\vartheta \tag{12}$$

具有满足条件

---

1) 关于更一般类型的(非线性的)边界条件，见 Л. А. Люстерник, *Изв. Харьк. матем. общ-ва*(4), 14(1937), p.139—150.

$$\vartheta(x)=\alpha,\ \vartheta(b)=\beta+n\pi \tag{13}$$

的解 $\vartheta(x)$.

如果恰巧取某一个 $\lambda=\lambda^*$，则可采用这种或那种近似方法，求得方程(12)满足初始条件 $\vartheta(a)=\alpha$ 的解 $\vartheta(x)$.

如果这个 $\vartheta(x)$ 不满足 (13) 的第二个等式，则取另一个 λ 值，重复同样的作法，直到条件(13) 中的第二个被足够精确地满足时为止. 借助于所采用的 λ 值之间的插值，计算过程可以缩短.

9.6. 不一定是自共轭的特征值问题.

(a) 正则的和非正则的特征值问题. 给定特征值问题

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+[f_0(x)+\lambda g(x)]y=0,$$

其中 $f_2\neq0, g\neq0$，具有边界条件(2)；当且仅当边界条件通过线性组合可以化为下列形式时(见 2.3 节)，此特征值问题才是非正则的：

$$\alpha y'(a)+\beta y'(b)+\gamma y(a)+\delta y(b)=0,$$
$$\alpha\omega(a)y(a)-\beta\omega(b)y(b)=0,$$

其中

$$|\alpha|+|\beta|>0 \quad 和 \quad \omega(x)=\sqrt{\left|\frac{g}{f_2}\right|}.$$

在所有其他情况下，此特征值问题是正则的. 特别是，所有自共轭特征值问题都是正则的. 关于正则特征值问题的特征值的存在及其渐近性，以及展开定理，见 2.4 节和 2.5 节.

非正则特征值问题的实例[1]：

$$y''+[\lambda+h(x)]y=0,$$
$$y'(0)+\alpha y'(1)+\beta y(1)=0,\quad y(0)-\alpha y(1)=0.$$

---

1) M. H. Stone, *Transactions Americ. Math. Soc.* 29(1927), p. 23—53.

这里，每一个 λ（例如当 $h=0, \alpha=1, \beta=0$ 时）都可以是特征值。但是，当 $\beta\neq 0$ 时，以及在许多其他的情况下，仍然只是存在可数个特征值. 对于这些特征值，可以给出相应的估值并建立展开定理.

(b) $y'=F(x,\lambda)z,\quad z'=-G(x,\lambda)y$. 特征值的存在. 如果说即使有一个(实的)特征值存在，则除了 9.3 节所述各点以外，还可以指出以下情况[1].

一般假设：当 $a\leqslant x\leqslant b$, $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ 时，函数 $F(x,\lambda)$ 和 $G(x,\lambda)$ 是连续的，并且 $F>0$. 对于区间 (Λ_1, Λ_2) 上的某一数值序列 $\lambda=l_n$，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} G(x, l_n)=-\infty;$$

其次，对于这些 λ 值，函数 F 在整个区间 $[a, b]$ 上是有界的，并且在每一个小些的区间上具有正的下界[2]. 对于处在区间 (Λ_1, Λ_2) 上的某一数值序列 $\lambda=L_n$，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} G(x, L_n)=+\infty;$$

其次，对于这些 λ 值，函数 F 在整个区间 $[a, b]$ 上具有正的下界. 问题当中所包含的函数 $A(\lambda), \cdots, D(\lambda)$，当 $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ 时，应当是连续的.

Ⅰ. 存在无穷多个特征值，如果边界条件具有下列形式：

$$Ay(a)+Bz(a)=0,\quad Cy(b)+Dz(b)=0,$$

并且如果在整个区间 $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ 上，$A(\lambda)\neq 0$ 或者 $B(\lambda)\neq 0$，以及 $C(\lambda)\neq 0$ 或者 $D(\lambda)\neq 0$.

在下列情况下至少存在一个特征值：

1) H. J. Ettlinger, *Annals of Math.*(2), 21(1919—1920), p.278—290; *Bulletin Americ. Math. Soc.* 27(1921), p.322—325.

2) 对于定理Ⅰ，关于存在正的下界的假设并不需要.

Ⅱ. $z(a)=Ay(a),\ y(a)=Cy(b)+Dz(b)$,
数量 $A(l_n)$下有界，其次或者

$$D(l_n)=0,\ C(l_n)\geqslant C_0>0,$$

或者

$$D(l_n)\geqslant D_0>0,\ C(l_n)\text{下有界.}$$

Ⅲ. $y(a)=Bz(a),\ z(a)=Cy(b)+Dz(b)$，其次，在区间 $A_1<\lambda<A_2$ 上

或者 $B(\lambda)\geqslant 0$ | 或者 $B(\lambda)<0$,

此外,当 $n=1,2,\cdots$时,

或者 $D(l_n)=0, C(l_n)\geqslant C_0>0$, 或者 $D(l_n)\geqslant D_0>0$ 而 $C(l_n)$ 下有界,

$B(l_n)\leqslant B_0<0$，并且，或者 $D(l_n)=0$，$C(l_n)\leqslant C_0<0$，或者$D(l_n)\leqslant D_0<0$ 而 $C(l_n)$ 上有界。

Ⅳ. $y(b)=Ay(a)+Bz(a),\ z(b)=Cy(a)+Dz(a)$ 并且 $\Delta(\lambda)=AD-BC>0$,其次,$\Delta(\lambda)$有界,并且,或者$B(\lambda)\equiv 0$, $A(\lambda)>0, A(l_n)\geqslant A_0>0, C(l_n)$上有界，或者 $B(\lambda)<0$, $B(l_n)\leqslant B_0<0, C(l_n)$和 $D(l_n)$上有界,而 $A(l_n)$下有界.

(c) **非线性地包含参数的微分方程**. 这种问题目前研究得还很不够,这里只有关于个别特例的一些结果. 例如,曾研究过问题[1]

$$y''-2\lambda y'\cos c+\lambda^2 y=0,\ c=\frac{p\pi}{q},\quad 0<2p<q,$$

$$y(0)=0\ (\text{或 } y'(0)=0),$$

$$\alpha y(0)+\beta y'(0)+\gamma y(1)+\delta y'(1)=0;$$

问题[2]

1) J. I. Vass, *Duke Math. Journal* 2(1936),p.151—165.

2) R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* 31 (1929), p. 868—906.

$$y''[\lambda f_1(x)+f_0(x)]y'+[\lambda^2 g_2(x)+\lambda g_1(x)+g_0(x)]y=0$$

具有边界条件(2)，其中系数是对于 λ 的多项式；问题[1]

$$y''+\left(f_0(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f_\nu(x)}{\lambda-\alpha_\nu}\right)y'+$$

$$+\left\{g_0(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{g_{1,\nu}(x)}{\lambda-\alpha_\nu}+\frac{g_{2,\nu}(x)}{(\lambda-\alpha_\nu)^2}\right)\right\}y=0,$$

具有线性边界条件(2)。

9.7. 更一般形式的附加条件.

(a) 多项式的解. 设给定微分方程

$$P(x)y''+Q(x)y'+\lambda R(x)y=0,$$

其中 P, Q, R 是多项式，并且 $R\neq 0$. 代替从前的边界条件，设给定下述附加条件："$y(x)$ 是多项式". 如果存在这样的"特征值"序列 $\lambda_n(n=0,1,2,\cdots)$，其中每一个 λ_n 对应下列形式的"特征函数"：

$$y_n=\sum_{\nu=0}^{n}c_{n,\nu}x^\nu \quad (c_{n,n}=1),$$

则微分方程应当具有下列形式：

$$py''+qy'+\lambda y=0, \tag{14}$$

其中

$$p=ax^2+bx+c,\quad q=\alpha x+\beta;$$

这时，必定有

$$\lambda_n=-an(n-1)-\alpha n.$$

如果这些数值 λ_n 各不相同，则它们的确是特征值；如果将 y 的表达式代入微分方程，可以算出系数 $c_{n,\nu}$.

如果

1) E. Langer, там же 32(1930), p. 238—250.

$$(gpy')'+\lambda gy=0$$

是相应的自共轭方程，则 y_n 满足下列正交性关系式：

$$\int_u^v g(x)y_m(x)y_n(x)dx=0 \quad (m\neq n),$$

其中 u, v 是函数 $p(x)$ 的两个不同的零点（也可以等于 $\pm\infty$）.

其次，

$$h_n y_n=\frac{1}{g}\frac{d^n}{dx^n}(gp^n),$$

其中 h_n 等于此表达式右端 x^n 的系数. 作为特殊情况，由此可以得到雅可比多项式，契比雪夫-埃尔米特多项式，契比雪夫-拉盖尔多项式[1].

(b) **其他的附加条件**. 对于二阶方程，可以提出具有比在端点的条件更一般的条件的问题. 除了应用一般结果（见§5中指出的）以外，还曾专门研究过某些问题.

曾研究过方程[2]

$$y''+[h(x)+\lambda]y=0$$

具有形如 $y(0)=0$; $y(1)=y(2)$ 的条件.

对于方程组

$$y'=F(x,\lambda)z, \quad z'=-G(x,\lambda)y,$$

曾研究过更一般的条件[3]，即

---

1) [关于这些多项式，见 D. Jackson, Fourier Series and Orthogonal Polynomials, 1941 (俄译本：Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948); G. Szegn, Orthogonal Polynomials, 1959 (俄译本：Г. Cere, Ортогональные многочлены, 1962); H. Bateman and A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions. 卷 2 (俄译本：Г. Бейтмен и А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функций, 1966). ——俄译本编者注.] 关于问题的更一般的提法，下列著作中有所论述：S. Bochner, *Math. Zeitschrift* **29** (1929), p. 730—736.

2) 见 E. Hilb, *Math. Zeitschrift* 1 (1918), p. 58—69.

3) 见 W. M. Whyburn, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30** (1928), p. 630—640.

$$\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu(\lambda)y(a_\nu)=0;\quad y(c)=0$$

$$(a\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant b;\ \ a_1<c\leqslant b),$$

特别是，条件

$$y(a_1)+y(a_2)=0,\quad y(c)=0;$$

以及

$$\alpha(\lambda)z(a)=\beta(\lambda)y(a),\ \int_a^b A(x,\lambda)y(x)\,dx=0,$$

其中 α 和 β 是连续的，A 对 λ 是连续的而对 x 是可积的。

对于方程(3)，曾研究过附加条件[1]

$$\int_a^b A(x)y\,dx=0,\ \int_a^b B(x)y\,dx=0,$$

其中 A 和 B 是给定的函数。

9.8. 含有多个参数的特征值问题. 给定下列形式的方程：

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+\left[f_0(x)+g(x)\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu x^\nu\right]y=0,$$

其中函数 f_ν 和 g 在一些不重叠的区间 $a_\nu\leqslant x\leqslant b_\nu$ 上是连续的，$f_2\neq0$，$g\neq0$。要求找出"特征值"λ 和与其对应的"特征函数"φ，使得每一个 φ_ν 在区间 $[a_\nu,b_\nu]$ 上是此微分方程的非零解，并且满足边界条件

$$\alpha_\nu\varphi_\nu(a_\nu)+\alpha'_\nu\varphi'_\nu(a_\nu)=0,\quad \beta_\nu\varphi_\nu(b_\nu)+\beta'_\nu\varphi'_\nu(b_\nu)=0$$

$$(|\alpha_\nu|+|\alpha'_\nu|>0,\quad |\beta_\nu|+|\beta'_\nu|>0).$$

对于每一组整数 $k_\nu\geqslant0(\nu=0,1,\cdots,n)$，存在一组且仅存

---

1) 见 R. V. Mises, Festschrift Heinrich Weber gewidmet, Leipzig und Berlin, 1912.

在一组特征值 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$, 使得在区间 (a_ν, b_ν) 上正好具有 k_ν 个零点的某一个函数 $\varphi_\nu(x)$，在区间$[a_\nu, b_\nu]$上满足对应于特征值$\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 的边值问题；各组特征值都是实的（克莱因振荡定理）。

9.9. 在边界点具有奇异性的微分方程. 设给定微分方程

$$[F(x, y)y']' + G(x, \lambda)y = 0,$$

具有边界条件："$\lim\limits_{x\to a} y(x)$和$\lim\limits_{x\to b} y(x)$存在". 作如下假设：当 $a<x<b$, $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$时，$F>0$，$G$ 是连续的；对于这些 λ 值中的每一个，函数 F 和 G 在 $x=a$ 和 $x=b$ 对于 x 是正则的. 对于每一个 λ，所讨论的方程至少具有一个当 $x=b$ 时为正则的解[这意味着，a 和 b 是弱奇点，并且特征方程在这些点上至少具有一个非负解（见第一部分 18.1 节）]. 如果 x 固定，λ 增大，则 F 单调减小而 G 单调增大(在广义下). 最后，假设对于任何常数 α 和 β ($a<\alpha<\beta<b$)，

$$\frac{m_G(\alpha, \beta)}{M_F(\alpha, \beta)} \to \infty \quad 当 \lambda \to \Lambda_2 时,$$

其中

$$m_G(\alpha, \beta) = \min_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} G, \quad M_F(\alpha, \beta) = \max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} F.$$

在这样一些假设之下，存在着无限多个特征值 λ_n，当 n 增加时，对应的特征函数零点的个数无限增加. 此外，如果

$$\frac{M_G(\alpha, \beta)}{m_F(\alpha, \beta)} \to -\infty \quad 当 \lambda \to \Lambda_1 时,$$

则存在一个且仅存在一个在区间 $a<x<b$ 上不等于零的特征函数[1].

在某些情况下，上述边界条件可以加强. 通过更换自变量，可以将区间 (a, b) 转变为无限区间，从而得到对于无限区

1) W. H. McCrea, R. A. Newing, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **37** (1934), p.520—534.

间的有关特征值问题的一些定理.

9.10. 无限区间上的特征值问题.

(a) $y''+G(x,\lambda)y=0$, 具有边界条件:"当$|x|\to\infty$时, $y(x)\to 0$, $y'(x)\to 0$".

如果对于所有的 x 及 λ, G 是连续的,并且

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}>0,\ \lim_{\lambda\to-\infty}G=-\infty,\ \lim_{\lambda\to+\infty}G=+\infty,\ \lim_{|x|\to\infty}G=-\infty,$$

则存在无穷多个特征值,并且所有特征值都是简单的,可以写成序列的形式: $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, $\lambda_n\to\infty$. 对应于特征值 λ_n 的每一个特征函数 $\varphi_n(x)$ 具有 n 个零点,并且积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n^2\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n'^2\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\lambda)\varphi_n^2\,dx$$

存在.

(b) $y''+[\lambda+f(x)]y=0$, 具有边界条件:"对于 $-\infty<x<+\infty$, 函数 $y(x)$ 是有界的".

此方程在波动力学中常常会遇到(薛定谔方程),并且在文献当中曾多次研究过[1]. 为了近似地求出特征值,可以利用 WBK 法(见第一部分 25.10 节),以及扰动方法(见 3.6 节).

(c) 其他问题. [对于无限区间可以提出许多其他问题. 其中深入研究过的一个问题是[2]

$$(fy')'+hy=\lambda y,\quad \alpha y(0)+\beta y'(0)=0,$$

---

1) [见 Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, 1950; Л.Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, 1963; Л. Шифф, Квантовая механика, 1959 以及其他教科书.]

2) [详细的叙述见: Наймарк; Titchmarsh (见本书第 290 页脚注); Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950.——俄译本编者注.]

$$\int_0^\infty y^2\,dx<\infty.$$

特别是，问题$(fy')'+hy=\lambda y$，具有条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2\,dx<\infty,$$

一般不存在特征值.——俄译本编者注.]

还曾研究过下列问题解的性质[1]：

$$y''+[\lambda+f(x)]y=0,$$

$$y(0)=0,\ \alpha y(b)+\beta y'(b)=0 \quad \text{当 } b\to\infty \text{ 时.}$$

§ 10. 二阶非线性边值问题和特征值问题

10.1. 对于有限区间的边值问题. 我们主要研究第一类边值问题(8.1 节)：

$$y''=f(x,\ y,\ y');\ \ y(a)=A,\ \ \ y(b)=B, \tag{1}$$

即求通过两个给定点(a, A)和(b, B) $(a<b)$ 的积分曲线 $y=y(x)$的问题. 这时，每次都需要作如下假设：

当 $a\leqslant x\leqslant b,\ -\infty<y,\ y'<+\infty$时，$f$是连续的. (V)

这时，方程(1)有无限多条通过点(a, A)的积分曲线，而且至少存在一条通过此点并在此点具有给定方向$y'(a)=\alpha$的积分曲线. 但是，对于非常简单的方程，就已经会发生这种情况：这些积分曲线不能达到直线$x=b$. 所以，为了使给定的边值问题是可解的，一般说来，还需要某些补充假设.

边值问题(1)至少具有一个解，如果除了(V)以外，还有下列假设(a)—(e)之一成立：

1) 见 E. Hilb, *Math. Ann.* **76**(1915), p.333; W. E. Milue, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30**(1928), p.797.

(a) $f(x, y, y')$是有界的[1]. 在这种情况下，适当地选择 α 值，可以使得满足初始条件 $y(a)=A$, $y'(a)=\alpha$ 的积分曲线和直线 $x=b$ 相交，交点相应地在点(b, B)的上面和下面. 因为当 α 改变时交点连续地变化，所以至少存在一个 α 值，对于这个 α 值，对应的积分曲线通过点(b, B).

(b) 对于所有足够大的 $|y|$ 值，$|f|<C|y|$，其中

$$C<\frac{\sqrt{3\pi^3}}{(b-a)^2}\text{[2]}.$$

(c) 当$|y|+|y'|\to\infty$ 时，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有 $\frac{f(x, y, y')}{|y|+|y'|}\to 0$；此外，在每一个有限的区间上，函数 f 对于 y 和 y' 满足李普希茨条件[3].

(d) f 是 y 的单调增函数（在广义下），同在(c)中一样，满足李普希茨条件，并且数量

$$|f(x, y, \bar{y}')-f(x, y, y')|$$

是有界的[3]. 例如，对于线性方程 $y''=g(x)y+h(x)$, 当 $g>0$, g 和 h 连续时，这些假设成立.

(e) 同在(c)中一样，f 满足李普希茨条件，并且具有下列形式：

$$f=\varphi(x, y)+\psi(x, y, y'),$$

其中函数 φ 对于 y 是连续的和单调增加的，并且当 $|y|+|y'|\to\infty$时，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致地有[3]

$$\frac{\psi}{|y|+|y'|}\to 0.$$

---

1) 因而，例如都芬格方程 $y''+\alpha\sin y=g(x)$ （见第三部分 6.19），在函数 $g(x)$连续的情况下，总是至少具有一个满足边界条件 $y(a)=A$、$y(b)=B$ 的解.

2) A. Hammerstein. *Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.* **30** (1932), p.3—10.

3) G. Scorza Dragoni. *Rendiconti Sem. Mat. Roma* (4), **2** (1938), p. 177—215, 253 以及以后.

(f) 如果f具有对于y, y'的连续偏导数，并且

$$|f_y|\leqslant\alpha,\ |f_{y'}|\leqslant\beta \qquad \text{当 } \alpha+\beta<1 \text{ 时}^{1)},$$

或者$f_y\geqslant 0$[2]，则边值问题的解不多于一个。

(g) 设当$a\leqslant x\leqslant b$, $|y|\leqslant|\alpha|$, $|y'|\leqslant\beta$时，f是连续的，并且设

$$b-a\leqslant\min\left(\sqrt{\frac{8\beta}{M}},\ \frac{2\beta}{M}\right),$$

其中$M=\max|f|$。这时，问题(1)当$A=B=0$时是可解的[3]。

(h) 设当$a\leqslant x\leqslant b$, $\left|y-\dfrac{A+B}{2}\right|\leqslant K$, $|y'|\leqslant L$时，函数f是连续的，

$$|f(x,\bar{y},\bar{y}')-f(x,y,y')|\leqslant\alpha|\bar{y}-y|+\beta|\bar{y}'-y'|,$$

并且设

$$\frac{\alpha}{8}(b-a)^2+\frac{\beta}{2}(b-a)<1,\quad \frac{1}{2}|B-A|+\frac{M}{8}(b-a)^2\leqslant K,$$

$$\frac{|B-A|}{b-a}+\frac{M}{2}(b-a)\leqslant L.$$

这时，问题(1)具有一个且仅具有一个解，这个解可以利用逐次逼近

$$y_n''=f(x,\ y_{n-1},\ y_{n-1}')$$

得到，其中每一个y_n这样选择，使得边界条件(1)满足；所求的解是

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n{}^{4)}.$$

(i) 边值问题

---

1) (见本书318页之注2)

2) A. Rosenblatt, *Bulletin Sc. Math.*(2), **57** (1933), p.105.

3) M. Fukuhara, *Japanese Journal of Math.* **5**(1928), p.351—367.

4) 见 F. Lettenmeyer, *Deutsche Math.* **7**(1942), p.56—74.

$$y''=f(x,y),\quad y(0)=y(a)=0$$

是可解的，如果$f(x,y)$在区域$0\leqslant x\leqslant a$, $-\infty<y<+\infty$内是连续的，并且对于两个数$c_0\geqslant 0$, $c_1>0$，下列不等式成立[1]：

$$\int_0^y f(x,t)\,dt\geqslant -c_1y^2-c_0,\quad 0<a<\frac{\pi}{\sqrt{2c_1}}.$$

(j) 边值问题

$$y''+yf(y'^2)=0,\quad y(0)=y(1)=0$$

是可解的，如果下述条件成立：当$z\geqslant 0$时，函数$f(z)$是连续的，具有正的下界，当z增大时单调增大，在每一个点的邻域内满足李普希茨条件，并且存在这样一些数$0<C_1<C_2$, $0<\sigma<\frac{1}{2}$，使得对于所有足够大的z下列不等式成立[2]：

$$C_1z^\sigma<f(z)<C_2z^\sigma.$$

(k) 边值问题

$$\frac{d}{dx}[f(x,y)y'(x)]=g(x,y),$$

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

[或者$g(a,y(a))y'(a)=A$, $y(b)=B$]，具有一个且仅具有一个解[3]，如果下列条件成立：

当$a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<+\infty$时，f和g是连续的，f具有正的下界，并且

---

1) A. Hammerstein, *Acta Math.* **54**(1930), p. 120; H. O. Hirschfeld, *Proceedings Cambridge* **32** (1936), p. 86—95; S. Cinquini, *Bolletino Unione Math. Italiana* **17** (1938), p. 99—105.

2) A. Hammerstein, *Journal f. Math.* **168** (1932), p. 37—43.

例如，对于方程

$$y''+c^2y\sqrt[8]{y'^2+1}=0,$$

这里所作的假设成立

3) T. H. Gronwall, *Annals of Math.* (2), **28**(1927), p. 355—364.

$$f(x, y_2) \geqslant f(x, y_1) \text{ 当 } |y_2| \geqslant |y_1| \text{时},$$
$$\left|\frac{1}{f(x, y_2)} - \frac{1}{f(x, y_1)}\right| \leqslant M|y_2 - y_1|,$$
其中 M 同 x 无关，同 y 也无关，
$$g(x, 0) = 0, \quad g(x, y_2) > g(x, y_1) \text{ 当 } y_2 > y_1 \text{时},$$
并且在每一个有限的区域内 g 对于 y 满足李普希茨条件.

10.2. 对于半无限区间的边值问题.

(a) 边值问题

$y'' = f(x, y)g(x)$, $y(0) = y_0 > 0$, $y(x) \to 0$ 当 $x \to \infty$ 时，具有一个且仅具有一个解，如果下述条件成立.

当 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 时函数 f 是连续的，当 y 增大时单调增大，对于 y 满足李普希茨条件，对于每一个固定的 $y > 0$ 具有正的下界，并且对于所有的 $x \geqslant 0$, $f(x, 0) = 0$. 当 $x > 0$ 时函数 $g(x)$ 是连续的，在每一个有限的区间 $0 < x < a$ 上是正的和可积的，但是
$$\int_0^\infty g(x)\,dx \text{ 发散}^{1)}.$$

(b) 方程
$$y'' = f(x, y, y') \tag{2}$$
对于每一个 $y_0 > 0$，至少具有一个满足初始条件 $y(a) = y_0$ 的解，此解对于所有 $x \geqslant a$ 是存在的，并且每一条这样的积分曲线都具有水平的渐近线，如果下述条件成立：

当 $a < x < \infty$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ $(\beta > y_0)$, $-\infty < y' < +\infty$ 时，f 是连续的和非负的，$f(x, \alpha, 0) = 0$（因而，$y = \alpha$ 是方程(2)的解），而 $f(x, \alpha, y')$ 是 y' 的单调函数. 此外，如果当 x 增大时 f 单

1) A. Mambriani, *Atti Accad. Lincei* (6), **9** (1929), p. 620—622. 此定理可以用于方程 $y'' = c^2 y^p x^q$ $(p \geqslant 1, q > -1)$，因而，特别是可以用于托马斯-费米方程 $\sqrt{x}\, y'' = y^3$；见第三部分 6.100.

调增大，则存在一个且仅存在一个解. 此外如果由对于每一个当 $x\geqslant a$ 时具有负导数的函数 $y(x)$，积分

$$\int_a^\infty f(x, y(x), y'(x))dx$$

存在，可以得出

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=\alpha,$$

则具有渐近线 $y=\alpha$ 的积分曲线通过点 (a, y_0)[1].

(c) 如果给定方程

$$\frac{d}{dx}[f(x, y)y'(x)]=g(x, y),$$

具有边界条件

$$y(a)=A,\ y(x)\to 0 \quad 当\ x\to\infty\ 时,$$

或者

$$g(a, y(a))y'(a)=A,\ y(x)\to 0 \quad 当\ x\to\infty\ 时,$$

则此问题具有解，并且是唯一的，如果 10.1 节(k)指出的条件成立，此外，如果对于每一个 $c\neq 0$

$$\int_a^\infty g(x, c)dx\ 发散.$$

10.3. 特征值问题.

(a) $$\frac{d}{dx}(F_{y'}-F_y)+2k\lambda y^{2k-1}=0,\quad y(a)=y(b)=0,$$

其中 $F(x, y, y')$ 是某一个 $2k+2$ 次连续可微函数，并且是对于 y, y' 的 $2k$ 次齐次函数；当 $k=1$ 时，设 $F_{y'y'}>0$，而当 $k>1$ 时，设 $F_{y'y'}\geqslant 0$，并且仅当 $y=y'=0$ 时，$F_{y'y'}=0$. 这时，斯图姆特征值理论 (9.2 节 (a_1))，在很大程度上可以用于此问

---

1) G. Scorza Dragoni, *Giornale Math.* **69** (1931), p. 77—112, *Atti Accad. Lincei* (6), **9** (1929), p. 623—625. 此定理可以用于上一页脚注中指出的方程.

题[1).

(b)[2)
$$y''+\lambda yf(x, y, y')=0$$

具有边界条件

$$y(0)=y(1)=0. \tag{3}$$

设下述假设成立：当

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad -\infty<y, \quad y'<+\infty$$

时，函数 f 是连续的，并且具有正的下界；对于每一个 λ 和每一个 α，给定的方程具有一个且仅具有一个定义在整个区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上并且满足初始条件

$$y(\xi)=0, y'(\xi)=\alpha \quad (0\leqslant\xi<1)$$

的解。这时，对于每一个固定的 α，存在无穷多个正的特征值 $\lambda=\lambda_n(\alpha)$，并且对应的特征函数，除了边界条件(3)之外，还满足条件 $y'(0)=\alpha$。一般说来，这些特征值依赖于 α。

(c) 设给定微分方程

$$y''+\lambda yf(y'^2)=0,$$

具有边界条件(3)；假设函数 $f(z)$ 当 $z\geqslant 0$ 时是连续的，具有正的下界，并且在每一个有限区间上满足李普希茨条件。这时，对于每一个常数 α，存在无穷多个除满足边界条件(3)以外，还满足条件 $y'(1)=\alpha$ 的特征函数；在这些特征函数当中，存在着在开区间 $0<x<1$ 上具有 $0,1,2,\cdots$ 个零点的函数。

例如，在纵向弯曲理论中遇到的方程[2)

---

1) Л. Люстерник, *Матем. сборник* **44** (1937), p. 1143—1166; **46** (1938), p. 227—232.

2) 见 A. Hammerstein, *Journal f. Math.* **168**(1932), p. 37—43. W. M. Whyburn, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30**(1928), p. 848—854, 文中曾研究过方程组

$$y'=f(x,y,z,\lambda)z, \quad z'=g(x,y,z,\lambda)y,$$

具有边界条件 $y(a)=y(b)=0$，或 $y(a)=z(b)=0$。

$$y'' + \lambda(y'^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

符合于这个定理.

§ 11. 三阶至八阶边值问题和特征值问题

11.1. 三阶线性特征值问题. 因为不存在三阶自共轭线性微分型(见第一部分 § 26), 所以也就不存在三阶自共轭特征值问题. 因此, 在第一章的一般定理中, 所有那些有关自共轭特征值问题的结论, 这里都不能运用[1].

因此, 在一般定理中, 除了 § 1 包含的那些以外, 剩下的实质上只是关于正则特征值问题的定理. 对此可以补充一些个别的非正则问题以及在三个点给定边界条件的问题的研究.

微分方程

$$y''' + \lambda y = 0,$$

具有边界条件

$$y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0,$$

在下列工作中曾研究过: J W. Hopkins, *Transactions Americ Math. Soc.* 20(1919), p. 245—259; D Jackson, *Proceedings Americ Acad.* 51 (1916), p. 383—417; *Bulletin Americ Math Soc* 28 (1922), p. 37—41; L. E Ward, 同上, 33(1927), p 232—234. 同样的微分方程, 具有一般的非正则边界条件, 在下文中曾研究过: L. E. Ward, *Transactions Americ Math Soc* 29 (1927), p 716—745. 在上述刊物发表的一篇文章中, 32 (1930), p 544—557, 研究了这个微分方程, 具有边界条件

---

1) 对于微分方程组(见 § 6), 自共轭特征值问题的概念, 要比对于一个方程的广泛一些, 所以, 甚至三阶特征值问题, 如果写成方程组的问题, 则它也可能是自共轭的.

$$y(\pi)=y\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\pi\right)=y\left(e^{\frac{-\pi i}{3}}\pi\right)=0.$$

更一般形式的方程

$$y'''+[\lambda+f(x)]y=0,$$

具有非正则边界条件，在下列工作中曾研究过：L. E. Ward, *Transactions Americ. Math. Soc.* 34 (1932), p. 417—434; *Americ. Journ Math.* 57 (1935), p. 345—362.

桑森(Sansone)[1]研究过一些特征值问题，其中给定"边界条件"

$$y(a)=y(b)=y(c)=0 \quad (a<b<c),$$

以及下列方程之一：

$$y'''+Ay''+\lambda(By'+Cy)=0 \quad (|B|+|C|>0), \tag{1}$$

$$[f(x)y']''+\lambda h(x)y=0, \tag{2}$$

$$[f(x)y']''+\lambda[(g(x)y)'+h(x)y]=0. \tag{3}$$

在情况(1)中，存在无穷多个特征值．在情况(2)中，如果 $f>0$ 并且是二次连续可微的，$h\neq0$ 是连续的，而表达式 $(x-b)h(x)$ 不变号，则特征值存在；在情况(3)中，如果此外还有 $(x-b)g(x)h(x)\geqslant0$，则有同样的结果．

11.2．四阶线性特征值问题． 关于表示法和一般解法，见第一章．最经常研究的特征值问题，属于自共轭方程

$$\text{(a)} \qquad (f_2y'')''+(f_1y')'+f_0y=\lambda gy,$$

具有自共轭边界条件；这里，函数 $f_\nu=f_\nu(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上具有 ν 阶连续导数，$f_2\neq0$，$g=g(x)\neq0$ 并且是连续的．其中，首先应当讨论具有斯图姆型条件的情况：

$$\alpha_1y_a+\beta_1y'_a+\gamma_1f_{2a}y''_a+\delta_1[(f_2y'')'_a+f_{1a}y'_a]=0,$$

$$\alpha_2y_a+\beta_2y'_a+\gamma_2f_{2a}y''_a+\delta_2[(f_2y'')'_a+f_{1a}y'_a]=0,$$

---

1) G. Sansone, *Rendiconti Istituto Lombardo*(2), 62(1929), p. 683—692; *Rendiconti Sem. Mat. Padova* 1 (1930), p. 164—183; 3 (1932), p 128—140; *Bolletino Unione Mat. Italiana* 10 (1931), p. 277—282.

$$\alpha_3 y_b + \beta_3 y'_b + \gamma_3 f_{2b} y''_b + \delta_3[(f_2 y'')'_b + f_{1b} y'_b] = 0,$$
$$\alpha_4 y_b + \beta_4 y'_b + \gamma_4 f_{2b} y''_b + \delta_4[(f_2 y'')'_b + f_{1b} y'_b] = 0;$$

这里

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix},$$

下标 a 以及 b 表示，应分别假设 $x=a$ 和 $x=b$。

如果边界条件具有下列形式：

$$y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0,$$

则特征值的重数不大于 2，因为不难看出，方程(a)满足边界条件 $y(a)=y'(a)=0$ 的线性无关的解不多于两个[1]。

关于各种研究方法，必须指出下列工作：S. A. Janczewsky, *Annals of Math.* (2), 29(1928), p. 521—542; (2), 31(1930), p. 663—680; W. M Whyburn, *Americ. Journ. Math.* 52(1930), p. 171—196(振荡定理)；A Davidoglou, *Annales Ecole Norm.* (3),17(1900), p. 359—444; (3), 22(1905), p. 539—565 (逐次逼近法)；E Bounitzky, *Journal de Math.* (6), 5(1909),p. 65—125 (格林函数和积分方程)；H. Boerner, *Math. Zeitschrift* 34(1932), p. 293—319 (无限多个变量)。戴维斯 (H T. Davis, *Americ. Journ. Math.* 47 (1925), p. 101—120)曾研究过这种问题，即什么时候两个斯图姆型问题具有相同的特征值，什么时候一个问题的特征值同另一个问题的特征值交替出现；其次，他还利用伯克霍夫定理，得到了特征值的渐近表达式。

泽伦森(Sörensen)曾研究过一个关于更特殊的方程

$$(fy'')''+gy''+(ax+b)fy'+\lambda fy=0$$

的特征值问题(Sörensen, *Ingenieur-Archiv* 8 (1937), p. 381—396)。

(b) 更一般类型的特征值问题。齐米诺 (Cimmino) 和伯尔纳 (Boerner) 以不同的方法研究过下列问题：

---

1) G. Cimmino, *Math. Zeitschrift* 32 (1930), p. 30.

$$(f_2y'')''+[(f_1+\lambda g_1)y']'+(f_0+\lambda g_0)y=0,$$
$$y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0,$$

因而，参数 λ 是以更为一般的方式包含在其中的[1,2]. 关于同样的方程，具有任意的自共轭边界条件，见§4. 这时，在边界条件中不应当包含参数 λ. 边界条件中含有参数 λ 的一些情况，在下列工作中曾研究过：

W. Sternberg, *Math. Zeitschrift* **3** (1919), p. 191—208：

$$y^{(4)}+(fy')'+(g-\lambda)y=0,$$
$$y(0)=y'(0)=y'(1)=y'''(1)+(\alpha+\lambda\beta)y(1)=0,$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 和 β 是给定的数. 讨论了下述问题：特征值的存在，特征值和特征函数的估值，展开定理.

H. Boerner, *Math. Zeitschrift* **34** (1932), p. 293—319：

$$(fy'')''-f_0y+\lambda[(g_1y')'+g_0y]=0,$$

具有边界条件

$$y(a)=y(b)=0,\ [fy''+\lambda\alpha y]_{x=a}=0,$$
$$[fy''-\lambda\beta y]_{x=b}=0$$

或者

$$y'(a)=y'(b)=0,\ [(fy'')'-\lambda\alpha y]_{x=a}=0,$$
$$[(fy'')'+\lambda\beta y]_{x=b}=0.$$

讨论了下述问题：特征值的存在，展开定理.

(c) 对于附加条件涉及的点多于两个的那些边值问题，我们指出下述结果[3]：设 $a_0, \cdots, a_3$ 是实数，$|a_0|+|a_1|+$

---

1) G. Cimmino, *Math. Zeitschrift* **32** (1930), p. 4—58.

2) H. Boerner, *Math. Zeitschrift* **34** (1932), p. 293—319.

3) G. Sansone, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **64** (1931), p. 724—736.

$|a_2|>0, x_1<x_2<x_3<x_4$. 这时，边值问题

$$y^{(4)}+a_3y'''+\lambda(a_2y''+a_1y'+a_0y)=0,$$

$$y(x_1)=y(x_2)=y(x_3)=y(x_4)=0$$

具有无穷多个特征值.

11.3. 两个二阶微分方程组成的方程组的线性问题[1]. 设给定自共轭方程组

$$y''(x)+\lambda(A_{1,1}y+A_{1,2}z)=0,$$

$$z''(x)+\lambda(A_{2,1}y+A_{2,2}z)=0,$$

具有边界条件

$$y(a)=y(b)=z(a)=z(b)=0,$$

其中 $A_{p,q}=A_{p,q}(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的，并且满足条件

$$A_{1,2}=A_{2,1},\quad A_{1,1}>0,\quad A_{1,1}A_{2,2}>A_{1,2}^2.$$

这时，存在无穷多个特征值；可以按下述方式求出特征值：假设

$$I(u,v)=\int_a^b(u'^2+v'^2)\,dx,$$

$$K(u,v)=\int_a^b(A_{1,1}u^2+2A_{1,2}uv+A_{2,2}v^2)\,dx,$$

$$L(y,z,u,v)=\int_a^b(A_{1,1}yu+A_{1,2}yv+A_{2,1}zu+A_{2,2}zv)\,dx;$$

这时，

$$\lambda_1=\min\frac{I(u,v)}{K(u,v)}$$

是最小特征值，如果极小值是在所有满足边界条件的二次连

1) 也可以同 § 6 以及下文相比较：W. M. Whyburn, *Americ. Journ. Math.* **52** (1930), p. 171—196.

续可微函数中选取的．若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ 是前 $p-1$ 个特征值，而

$$y_\nu(x),\ z_\nu(x)\quad(\nu=1, \cdots, p-1)$$

是对应于这些特征值并且满足正交性关系式

$$L(y_\mu, z_\mu, y_\nu, z_\nu)=0\quad \text{当 } \mu\neq\nu \text{ 时}$$

的各对特征函数，则

$$\lambda_p=\min\frac{I(u, v)}{K(u, v)}$$

是下一个特征值，如果极小值是在所有满足边界条件和方程

$$L(y_\nu, z_\nu, u, v)=0\quad(\nu=1, \cdots, p-1).$$

的二次连续可微函数 $u(x), v(x)$ 中选取的．

关于不是包含一个参数 λ 而是包含多个参数的边值问题，见 R. G. D. Richardson, *Transactions Americ. Math. Soc.* 13(1912), p. 22—34; *Math. Annalen* 71 (1912), p. 214—232; 73 (1913), p. 289—304.

11.4. 四阶非线性边值问题． 边值问题

$$y^{(4)}=f(x, y, y', y'', y'''),$$

$$y(a)=\alpha,\quad y'(a)=\beta,\quad y(b)=\gamma,\quad y'(b)=\delta$$

是可解的，如果当

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad -\infty<y, y', y'', y'''<+\infty$$

时，函数 f 是连续的和有界的[1]．

方程组

$$y_p''=f_p(x, y_1, y_1', y_2, y_2')\quad(p=1,2),$$

具有边界条件

$$y_p(a)=\alpha_p,\quad y_p(b)=\beta_p\quad(p=1,2),$$

是可解的，如果当

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad -\infty<y_p, y_p'<+\infty$$

---

1) G. Zwirner, *Rendiconti Sem. Mat. Padova* 9(1938), p. 150—155.

时，函数 f_p 是连续的和有界的．如果假设这些条件只是在上述区域的某一部分中成立，则相应的叙述将会复杂化[1]．

尼克里包尔克(Nicliborc)[2]曾将具有给定的初始速度 v 的炮弹是否会命中既定目标这个弹道学问题，作为“边值问题”，按以下方式做了描述．设给定微分方程组

$$x''(t)=f(t, x, y, x', y'),\quad y''(t)=g(t, x, y, x', y').$$

要求对于给定的 $v>0$, a, b 和以适当方式选择的 τ，找出满足条件

$$x(0)=y(0)=0,\quad x'^2(0)+y'^2(0)=v^2,$$
$$x(\tau)=a,\quad y(\tau)=b$$

的解 $x(t)$, $y(t)$．利用逐次逼近法可以证明，在适当的假设之下，这个问题是可解的．

11.5．更高阶的特征值问题． 这种问题在研究圆周或圆柱表面的固有振动时常常会遇到；其中，费德霍费尔 (Federhofer) 曾研究过可以化为下列形式的方程的问题[3]：

$$y^{(6)}+2y^{(4)}+(1-a)y''+\lambda a y=0,$$
$$y^{(6)}+(\lambda+\nu)y^{(4)}+[\lambda(\nu-a)+a(1-\sigma^2)]y''+ a\lambda(1-\lambda)y=0$$

和

$$y^{(6)}+(2+a\lambda)y^{(4)}+(1-\lambda+a\lambda)y''+\lambda(1+a-a\lambda)y=0.$$

瓦尔特金(Waltking)曾遇到的方程[4]

1) G. Scorza Dragoni, *Bolletino Unione Mat. Italiana* **14** (1935), p. 225—230.

2) W. Nicliborc, *Berichte Leipzig* **82** (1930), p. 227—242.

3) K. Federhofer, *Akad. Wien* **145** (1936), p. 29—50, 681—688; *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, Hannover (1910), p. 465; *Ingenieur-Archiv* **6** (1935), p. 223—225.

4) F. W. Waltking, *Ingenieur-Archiv* **5** (1934), p. 429—449; **6** (1935), p. 226—228.

$$y^{(6)}+2y^{(4)}+(1-\lambda)y''+\lambda y=0$$

和

$$y^{(6)}+(2+a\lambda)y^{(4)}+(1-\lambda-a\lambda)y''+\lambda(1-a\lambda)y=0.$$

在计算临界速度时，遇到过方程组[1]

$$EIz^{(4)}+Ty'''+Fz''-P\lambda z=0,$$

$$EIy^{(4)}-Tz'''+Fy''-P\lambda y=0,$$

具有边界条件

$$y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=$$

$$=z(0)=z(l)=z''(0)=z''(l)=0.$$

1) Maria Nasta, *Atti Accad. Lincei* (6), **12** (1930), p. 209—216.

第三部分　各种微分方程

几点说明

（一）从第一章到第七章讨论单个的微分方程．在这几章中，自变量用 x 表示，未知函数用 y 表示．

（二）在有理表达式中，我们避免出现分母，例如，将方程

$$y'^2+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)y'+1=0, \tag{1}$$

$$y'=\frac{Axy+By^2+\alpha x+\beta y+\gamma}{Ax^2+Bxy+ax+by+c}\text{（雅可比方程）}, \tag{2}$$

$$y''+\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0\text{（贝塞耳方程）}, \tag{3}$$

$$y''=\left(\frac{m^2-\frac{1}{4}}{x^2}-\frac{k}{x}+\frac{1}{4}\right)y$$

（退化的超几何方程），　(4)

写为下列形式：

$$xyy'^2+(y^2+x^2)y'+xy=0, \tag{1a}$$

$$(Bxy+Ax^2+ax+by+c)y'=By^2+Axy+\alpha x+\beta y+\gamma, \tag{2a}$$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, \tag{3a}$$

$$4x^2y''=(x^2-4kx+4m^2-1)y. \tag{4a}$$

（三）只要翻阅一下后面收集的方程，不必特别解释，即可大体上看出方程中的各项排列时所遵循的原则．在每一个方程中，首先写出含有最高阶导数的各项，然后写出含较低阶

导数的各项，如此等等．在每一组之中，要注意各项的“权”或“秩”，并将各项按降秩的次序排列．

后面包括的微分方程中的大部分，只是由形如

$$ax^{m_0}y^{m_1}y'^{m_2}\cdots y^{(k)m_{k+1}}\quad(m_\nu\geqslant 0,\text{并且是整数})$$

的一些项组成的（例如，方程 $x^3y'^2+x^2yy'+a=0$）；而认为上述这样一项的秩，要比

$$bx^{n_0}y^{n_1}y'^{n_2}\cdots y^{(k)n_{k+1}}\quad(n_\nu\geqslant 0,\text{并且是整数})$$

这一项的秩来得低，只要下列条件之一成立[1]：

(a) 如果 m_r n_r 是不同的幂指数当中最后的两个，则 $m_r<n_r$；

(b)[2] 如果所有的 $m_r=n_r$，则

a, b 都是整数，并且 $|a|<|b|$，

或者，a, b 都是整数，$-a=b>0$，

或者，a 是整数，b 不是整数或是任意(尚未确定的)的数．

如果有些项的结构不象上面指出的那样简单，则对于每一组中含有同样一个最高阶导数 y^k 的各项，规定下列秩增加的尺度：

具有整数 ν 的 u^ν，

具有任意(不确定的)数 ν 的u^ν，

具有某一个确定的非整数 ν 的 u^ν，

e^u, $\ln u$, u 的双曲函数，u 的三角函数，任意(不确定的)形式的函数．

如果两项以相同的方式包含着最高阶导数，则由较低阶

---

1) 下面援引的分类法并不是详尽无遗的，所以秩不是完全唯一确定的，但是对于我们来说，这种分类法已经足够了．

2) 为了确定一个方程中各项的次序，不必利用 (b) 这一条，因为只差一个数字系数的各项可以合併为一项．但是为了确定各方程相继出现的次序，则需要(b)．关于这一点，见(四)．

的导数，按同样一些原则来确定它们的秩。

例如，在表达式

$$y''\text{tg}y'+f(x)y''+y'^2+xe^y+x$$

之中，各项是按其秩降低的次序排列的。

上述原则初看起来可能觉得有些复杂，但是如果浏览一下我们收集的实例，则不难熟悉它们，于是这些原则就会显得十分简单。

（四）各微分方程按第一项的秩增加的次序排列，而如果第一项的秩相同，则按随后一些项的秩增加的次序排列。

按这种方式仍然不能完全唯一地确定方程排列的次序，但是余下的任意的可能性并不大，以致于起不了什么作用了，况且这只会涉及到排列在相邻近处的一些方程。

（五）如果需要找某一个方程，那么最好将此方程化为（一）至（三）中叙述的形式，并且将方程中所包含的常数尽可能地归併在一起。

例： 形如

$$y=xy'+y'(1-y')$$

的克莱罗方程，如上所述，应当写为下列形式：

$$y'^2-(x+1)y'+y=0,$$

而形如

$$y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$$

的克莱罗方程，则应写为下列形式

$$\sqrt{y'^2+1}+xy'-y=0.$$

交流电流方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{W}{L}I=\frac{E}{L}\sin\omega t,$$

如果将其中的 t，I 分别换为 x，y，并且将方程中包含的常数改变写法，则具有下列形式：

$$y'+ay=b\sin cx.$$

研究方程

$$\frac{d\lambda(T)q\frac{dT}{dx}}{dx}=-\frac{i^2w(T)}{q}+2\sqrt{\pi qs}(T),$$

其中 $\lambda(T)$是由电流加热的辐射线的热传导系数，$T=T(x)$是点 x 处的温度，q 是导线的横断面，i 是电流强度，$w(T)$是电阻系数，$s(T)$是单位面积上的辐射能．如果 q 不变，则此方程可以写为下列形式：

$$\frac{d}{dx}[\lambda(T)T'(x)]=g(T),$$

其中 $g(T)$是给定的函数，如果引入符号 f，y 来代替 λ，T，则得到

$$[f(y)y']'=g(y),$$

即

$$f(y)y''+f'(y)y'^2=g(y); \tag{5}$$

此方程的编号是6.224.

如果注意到上述的方程排列次序，就可以很快地确定，在这一本手册当中是否有给定的方程，如果有的话，是在哪里。这里，还应当注意，该方程可能包含在更一般的形式之中。例如，在手册中没有方程

$$2y'^2+3y'-y=0,$$

但是有方程

$$ay'^2+by'-y=0 \text{ 和 } y'^2+ay'+by=0,$$

这两个方程都包含着上述方程作为其特殊情况．同样地，在手册中没有方程

$$y^3y''+3y^2y'^2=e^y,$$

但是有方程（5），上面的方程也是作为特殊情况包含在方程(5)中．其次应当注意，如果将因变量和自变量交换，则微分方程的形式可以大大改变．例如，如果在方程

$$[xf(y)-g(y)]y'+1=0$$

之中，将 y 取作为自变量，则此方程可以化为下列方程：

$$xf(y)-g(y)+x'(y)=0;$$

最后，如果将 y, x 分别换为 x, y, 则得到线性方程，其编号为 1.11.

（六）所有的解都经过验算。但是，如果要利用某一个方程的解来进行任何一项重要计算，则应当将这个解重新验算，因为在这一类手册中，很难完全避免笔误和刊误，以及实质性的错误。对于未解出最高阶导数的方程，在进行验算时，首先应当看一看是否忽略了某一些解（某些奇解!）。验算可以这样来进行：或者是把指出的解代入方程，或者是借助于在各种情况下我们简略叙述的解法来求这个解，而在必要时利用引证的文献。在许多场合，该文献中包含着有关所论方程的更为详细的情况。

[（七）某些方程或某些类型的方程之解法的详细解释，可以在本手册第一部分或下列著作中找到：

И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных диффeранциальных уравнений, «Наука», 1970(1953 年版中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程论讲义，人民教育出版社，1959.)

В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1970 (1953 年版中译本：В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，人民教育出版社，1960)；

Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения,1970(1961年版中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962)；

E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London, 1927(俄译本：Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения,Харьков,1939)；

Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений,1970;

A. Angot, Compléments de Mathématiques (A l'usage des ingénieurs de l'élektrotechnique et des télécommunications) (俄译本: A. Анго, Математика для электро-и радиоинженеров, 1967);

R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, 1953(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特,数学物理方法, I, 科学出版社, 1965);

G. Sansone, Equazioni Differenziali, Nel Campo Reale, 1948(俄译本: Д. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, 1953, т. II, 1954);

R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, 1953(中译本: R. 贝尔曼,微分方程的解的稳定性理论, 科学出版社, 1960);

E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 1927(俄译本: Е. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, т. I, 1962, т. II, 1963);

Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Лёш, Специальные функции (формулы, графики, таблицы), 1968;

G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Function, 1945(俄译本: Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. I, 1949);

Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. ЛГУ, 1963.

还要特别提到下列著作，其中既阐述了常微分方程的积分方法，又有各种方程及其解的一览表：

G. M. Murphy, Ordinary Differential Equations and Their Solutions, New Xork, 1960.

在编写本手册第三部分时,作者广泛地利用了下列著作：

A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl. Braunschweig, 1912; A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Bd. 2—4, Cambridge, 1900—1902; E. Fick, Aufgabensammlung über Differentialgleichungen, München und Berlin, 1930; Ph. Frank, R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 1,2, Aufl. Braunschweig, 1930; G. Julia, Exercices d'Analyse, t. 3, Paris, 1933; E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930; M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935,以及许多相当老的而且很难找到的其他外国出版物.有关这些著作的引证,我们一般都删去了.

在第三部分中，作者曾按照 J. 兹伯尔尼克 (Zbornik，瑞士人)的建议进行了某些修正和补充。——俄译本编者注。]

第一章　一阶微分方程

含有代数无理式的方程：1,57—74,112—116,190—192,209,266 332—340,398,511,512,516,517,550,555—562.

含有指数函数的方程：2,4,5,7,37,75,88,117,131,134,206,211,259,341,342,387,459,463.

含有对数函数的方程：9,91,93,108,109,118—120,132,159,193,194,343—346,357,373,392,563—565.

含有双曲函数的方程：347—349.

含有三角函数的方程：3,5—9,21,22,32,76—83,90,92,93,121—125,152,154,195—200,202,208,267,278,314,338,350—364,393,460,513,514,539,566—569.

含有 arctg$x$ 的方程：570.

含有椭圆函数的方程：49.

含有任意函数的方程：10,11,16,33—35,50,51,53—56,79,80,84—87,110,126—128,201,202,212,219,230,268,269,365—367,370,394,395,515—517,551,552,561,571—576.

1－367．对于 y' 的一次微分方程

1.1. $y'=(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)^{-\frac{1}{2}}$.

直接进行积分，即可得到解，一般说来，这会导致椭圆积分．通解具有下列形式：

$$R(\mathscr{P}(y))=C,$$

其中 R 是有理函数，$\mathscr{P}(y)$ 是具有适当选择的双周期的外尔斯特拉斯函数.

〔关于外尔斯特拉斯函数，见 2.26.——俄译本编者注.〕

1.2. $y'+ay=ce^{bx}$；线性方程.

$$y=\begin{cases}\dfrac{c}{a+b}e^{bx}+Ce^{-ax} & 当\ a+b\neq 0\ 时,\\ cxe^{bx}+Ce^{-ax} & 当\ a+b=0\ 时.\end{cases}$$

1.3. $y'+ay=b\sin cx$；线性方程.

作为交流电流的方程，此方程常常以下列形式出现：

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E_0}{L}\sin\omega t,$$

其中 $I(t)$ 是具有电动势 $E_0\sin\omega t$、欧姆电阻 R 和自感系数 L 的电路中的电流强度. 根据第一部分 4.3 节，并且通过引入"相位移"γ，其中 $\operatorname{tg}\gamma=\frac{\omega L}{R}$ $(|\gamma|<\frac{1}{2}\pi)$，和分部积分，可以将所得到的解化为下列形式：

$$I=e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0+\frac{\omega LE_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)+\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\gamma);$$

这里 I_0 表示 $t=0$ 时的电流强度. 当 $t\to\infty$ 时

$$I(t)\sim\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\gamma).$$

〔Д ж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953.——俄译本编者注.〕

1.4. $y'+2xy=xe^{-x^2}$；线性方程.

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right).$$

1.5. $y'+y\cos x=e^{2x}$；线性方程.

$$y=e^{-\sin x}\left(C+\int e^{2x+\sin x}dx\right).$$

1.6. $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；线性方程.

$$y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}.$$

1.7. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$; 线性方程。

$$y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

1.8. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$; 线性方程。

$$y=-2\cos^2 x+C\cos x.$$

1.9. $y'=(\sin\ln x+\cos\ln x+a)y$; 可分离变量的方程。

$$y=C\exp\{x(\sin\ln x+a)\}.$$

1.10. $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$; 线性方程。

$$y=f(x)-1+Ce^{-f(x)}.$$

1.11. $y'+f(x)y=g(x)$; 线性方程（见第一部分 4.3 节）.

1.12. $y'+y^2=1$; 可分离变量的方程。

$$y=\pm 1,\quad \mathrm{th}(x+C),\quad \mathrm{cth}(x+C).$$

1.13. $y'+y^2=ax+b$; 黎卡提方程。

如果（见第一部分 4.9 节）经过变换 $u'=yu$ 将此方程化为线性方程,则得到 $u''=(ax+b)u$, 即 2.10.

1.14. $y'+y^2+ax^m=0$; 黎卡提方程.

经过变换 $u'(x)=yu$, 则得到 $u''+ax^m u=0$, 即 2.14.

1.15. $y'+y^2-2x^2y+x^4-2x-1=0$.

假设 $u(x)=y-x^2$, 则得到 $u'+u^2-1=0$,即1.12.

1.16. $y'+y^2+(xy-1)f(x)=0$; 黎卡提方程.

$y=\frac{1}{x}$是解. 经过变换 $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{u(x)}$, 则化为线性方程

$$u'-\left(xf+\frac{2}{x}\right)u=1.$$

1.17. $y'-y^2-3y+4=0$; 可分离变量的方程。

$$y=\frac{C_1-4C_2e^{5x}}{C_1+C_2e^{5x}}.$$

1.18. $y'-y^2-xy-x+1=0$: 黎卡提方程.

$y=-1$ 是解. 经过变换 $y=-1+\frac{1}{u(x)}$, 则化为线性方程

$$u'+(x-2)u+1=0.$$

1.19. $y'=(y+x)^2$; 黎卡提方程.

假设 $u(x)=y+x$,则得到 $u'=u^2+1$, 因而,

$$u=\mathrm{tg}(x+C).$$

1.20. $y'-y^2+(x^2+1)y-2x=0$; 黎卡提方程.

假设 $u(x)=y-x^2-1$,则得到伯努利方程

$$u'-(x^2+1)u=u^2.$$

1.21. $y'-y^2+y\sin x-\cos x=0$; 黎卡提方程.

$y=\sin x$ 是一个解; 根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解.

1.22. $y'-y^2-y\sin 2x-\cos 2x=0$; 黎卡提方程.

$y=\mathrm{tg}x$ 是一个解; 根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解:

$$y=\mathrm{tg}x+\frac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\left(C-\int\frac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}dx\right)^{-1}.$$

1.23. $y'+ay^2=b$; 可分离变量的方程.

此方程同时也是特殊的黎卡提方程的特殊情况. 通过点(ξ,η)的积分曲线由下列方程给出:

$$y=\begin{cases}\eta+b(x-\xi) & \text{当 } a=0 \text{ 时},\\ \dfrac{\eta}{1+a\eta(x-\xi)} & \text{当 } b=0 \text{ 时},\\ \dfrac{\eta\sqrt{ab}+b\,\mathrm{th}\sqrt{ab}(x-\xi)}{\sqrt{ab}+a\eta\,\mathrm{th}\sqrt{ab}(x-\xi)} & \text{当 } ab>0 \text{ 时},\\ \dfrac{\eta\sqrt{-ab}+b\,\mathrm{tg}\sqrt{-ab}(x-\xi)}{\sqrt{-ab}+a\eta\,\mathrm{tg}\sqrt{-ab}(x-\xi)} & \text{当 } ab<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

1.24. $y' + ay^2 = bx^a$;

特殊的黎卡提方程；见第一部分 4.8 节.

1.25. $y' + ay^2 = bx^{2a} + cx^{a-1}$; 黎卡提方程.

当 $\alpha = -1$ 时，得到 1.24. 当 $\alpha \neq -1$ 时，经过变换

$$y = \beta x^\alpha \eta(\xi), \quad \xi = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

则化为方程

$$\xi\eta' + a\beta\xi\eta^2 + \frac{\alpha}{\alpha+1}\eta = \frac{b}{\beta}\xi + \frac{c}{(\alpha+1)\beta},$$

即化为方程 1.105.

1.26. $y' = (Ay - a)(By - b)$; 质量相互作用的方程.

此方程属于第一部分 4.1 节中指出的那种类型. 如果 $aB - bA \neq 0$, 则得到

$$y = \frac{C_1 b\exp(aB - bA)x - C_2 a}{C_1 B\exp(aB - bA)x - C_2 A} \quad (C_1^2 + C_2^2 > 0),$$

如果 $aB - bA = 0$, $A \neq 0$, 则得到

$$y = \frac{a}{A}, \quad y = \frac{a}{A} - \frac{1}{A(Bx - C)}.$$

1.27. $y' + ay(y - x) = 1$; 黎卡提方程.

假设 $u(x) = y - x$, 则得到伯努利方程

$$u' + a(xu + u^2) = 0.$$

1.28. $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0$; 黎卡提方程.

假设 $u(x) = x^2 - y$, 则得到伯努利方程

$$u' + x^3u = xu^2.$$

1.29. $y' - xy^2 - 3xy = 0$; 伯努利方程.

$$y = 3\left\{C\exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right) - 1\right\}^{-1}.$$

1.30. $y' + x^{-a-1}y^2 = x^a$, $x > 0$; 黎卡提方程.

当 $a \neq 0$ 时，经过变换 $y(x) = \eta(\xi)$, $a\xi = -x^{-a}$, 则化

为特殊的黎卡提方程(第一部分,4.8 节)

$$\eta' + \eta^2 = (-a\xi)^{-2-\frac{1}{a}},$$

而经过变换 $y(x) = \dfrac{x^{a+1}u'(x)}{u(x)}$, 则化为线性方程

$$xu'' + (a+1)u' - u = 0.$$

Watson, p. 90.

1.31. $y' - ax^n(y^2+1) = 0$;可分离变量的方程。

$$y = \begin{cases} \mathrm{tg}\left(\dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + C\right) & \text{当 } n \neq -1 \text{ 时,} \\ \mathrm{tg}(a\ln Cx) & \text{当 } n = -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

1.32. $y' + y^2 \sin x = 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; 黎卡提方程。

$$y = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x}.$$

1.33. $y' = \dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)}$; 黎卡提方程。

$$y = -\frac{g}{f} + f^{-2}\left(C - \int \frac{f'}{gf^2}dx\right)^{-1}.$$

1.34. $y' + f(x)y^2 + g(x)y = 0$; 伯努利方程。

$$\frac{1}{y} = E(x)\int \frac{f(x)}{E(x)}dx, \text{ 其中 } E(x) = e^{\int g dx}.$$

1.35. $y' + f(x)\ (y^2 + 2ay + b) = 0$;可分离变量的方程。

$$y + a = \begin{cases} \dfrac{1}{F} & \text{当 } b = a^2 \text{ 时,} \\ -\alpha \,\mathrm{tg}\, \alpha F & \text{当 } \alpha^2 = b - a^2 > 0 \text{ 时,} \\ \alpha \begin{matrix}\mathrm{th} \\ \mathrm{cth}\end{matrix}\, \alpha F & \text{当 } \alpha^2 = a^2 - b > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 $F=F(x)=\int f(x)dx+C$.

1.36. $\boldsymbol{y'+y^3+axy^2=0}$; 阿贝耳方程.

假设 $u(x)=y^{-1}-\frac{1}{2}ax^2$, 则得到特殊的黎卡提方程

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{2}ax^2+u.$$

1.37. $\boldsymbol{y'=y^3+ae^xy^2}$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=e^{-x}$, 则得到方 程 1.169 的 特殊情况.

$$\xi^2\eta'+\xi\eta^3+a\eta^2=0$$

1.38. $\boldsymbol{y'=ay^3+bx^{-3/2}}$;

阿贝耳方程,同时也是 1.52 型的方程.

假设 $y=x^{-\frac{1}{2}}\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 则化为第一部分 4.1 节中指出的那种类型

$$\eta'=a\eta^3+\frac{1}{2}\eta+b.$$

1.39. $\boldsymbol{y'=a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0}$.

阿贝耳方程的特殊情况(第一部分 4.10 节),第一部分 4.1 节中指出的方法可用于此方程.

1.40. $\boldsymbol{y'+3ay^3+6axy^2=0}$;

阿贝耳方程(第一部分, 4.10 节).

假设 $u'(x)=y$, 则得到

$$u''+3au'^3+6axu'^2=0, \tag{1}$$

如果把 u 取作为自变量,由此可得

$$x''-6axx'-3a=0. \tag{2}$$

将黎卡提方程

$$x'-3ax^2-3au-3C=0,$$

进行微分,可以得到方程(2);上述黎卡提方程,经过变换

$v'(u) = -3ax(u)v(u)$，则化为线性方程

$$v'' + 9av(au+C) = 0;$$

关于这个方程，见 2.10.

1.41. $y' + axy^3 + by^2 = 0$；阿贝耳方程.

假设 $\eta(\xi) = xy$, $\xi = \ln x$，则得到方程 1.39：

$$\eta' + a\eta^3 + b\eta^2 - \eta = 0.$$

1.42. $y' = x(x+2)y^3 + (x+3)y^2$；阿贝耳方程.

$$y = -\frac{2}{x(x+2)}$$

是一个解. 如果选择函数 $x = x(t)$，使得对于此方程的解 $y(x)$，下列关系式成立：

$$y(x) = -(x+ct)^{-1}$$

(c 任意，但是 $\neq 0$)，则得到方程

$$t(x+2)x'(t) = x + ct,$$

即 1.237 型的方程. 根据 1.237，由此方程可以得到 6.76 型的方程. 这时，我们得到给定类型的方程可积分为有限形式的情况.

1.43. $y' + (3ax^2 + 4a^2x + b)y^3 + 3xy^2 = 0$；阿贝耳方程.

假设 $y = u'(x)$，则得到

$$u'' + (3ax^2 + 4a^2x + b)u'^3 + 3xu'^2 = 0,$$

因此，如果把 u 取作为自变量，对于 $x = x(u)$ 则有

$$x'' - 3xx' - (3ax^2 + 4a^2x + b) = 0, \qquad (1)$$

即

$$\frac{d}{du}\left(x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax\right) + 2a\left(x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax\right) = b.$$

此方程对于括号中的表达式是线性方程. 于是，

$$x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax = \frac{b + Ce^{-2au}}{2a}. \qquad (2)$$

假设 $x(u)=-\frac{2v'(u)}{3v(u)}$，由此得到

$$2v''-4av'+\frac{3}{2a}(b+Ce^{-2au})v=0,$$

然后，借助于变换 $v(u)=\eta(\xi),\xi=e^{-2au}$，得到

$$\xi^2\eta''+2\xi\eta'+\frac{3}{16a^3}(C\xi+b)\eta=0;$$

关于这个方程，见 2.215.

1.44. $y'+2ax^3y^3+2xy=0$; 伯努利方程.

$$y^{-2}=-\frac{1}{2}a-ax^2+C\exp 2x^2.$$

1.45. $y'+2(a^2x^3-b^2x)y^3+3by^2=0$;

阿贝耳方程，同时也是 1.48 型的方程. 经过变换

$$\frac{1}{y}+ax^2-bx=2a\xi^2,\ ax+b=\frac{1}{\xi\eta}$$

可将此方程化为同类型的方程.

H. Lemke, *Sitzungsberichte Berlin. Math Ges* 18(1920), p 26—31.

1.46. $y'-x^ay^3+3y^2-x^{-a}y-x^{-2a}+ax^{-a-1}=0$;

阿贝耳方程.

$y=x^{-a}$ 是一个解. 假设 $y=x^{-a}+u(x)$，则得到伯努利方程

$$u'+2x^{-a}u-x^au^3=0.$$

1.47. $y'=a(x^n-x)y^3+y^2$; 阿贝耳方程.

如果对于解 $y(x)\neq0$，将方程 $x'(t)=-\frac{1}{ty(x)}$ 的解取作为 $x(t)$，则对于这个函数得到方程

$$t^2x''=-a(x^n-x).$$

1.48. $y'=(ax^n+bx)y^3+cy^2$; 阿贝耳方程.

假设 $y=\alpha\eta(\xi),\xi=\alpha cx,\alpha=\frac{1}{c}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，则得到1.47型的方程

$$\eta'=-\frac{b}{c^2}(\xi^n-\xi)\eta^3+\eta^2.$$

1.49. $y'+a\mathscr{P}'(x)y^3+6a\mathscr{P}(x)y^2+(2a+1)\frac{\mathscr{P}''(x)}{\mathscr{P}'(x)}y+$

$$+2(a+1)=0$$

($\mathscr{P}(x)$是外尔斯特拉斯函数)；阿贝耳方程.

假设 $y\mathscr{P}'(x)+2\mathscr{P}(x)=2\eta(\xi)$, $a\frac{dx}{d\xi}=-\mathscr{P}'(x)$, 则得到 1.39 型的方程

$$\eta'(\xi)=4\eta^3-g_2\eta-g_3,$$

其中 g_2, g_3 是函数 $\mathscr{P}(x)$的不变量.

1.50. $y'=f_3(x)y^3+f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x)$;

阿贝耳方程(第一部分,4.10 节).

1.51. $y'=(y-f)(y-g)\left(y-\frac{af+bg}{a+b}\right)h+$

$$+\frac{y-g}{f-g}f'+\frac{y-f}{g-f}g',$$

$f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$, $f\neq g$; 阿贝耳方程(第一部分,4.10 节). 其解可由关系式

$$|y-f|^a|y-g|^b\left|y-\frac{af+bg}{a+b}\right|^{-a-b}=$$

$$=C\exp\left[\frac{ab}{a+b}\int(f-g^2)hdx\right]$$

得到. 例如,函数

$$y=f,\quad g,\quad \frac{af+bg}{a+b}$$

是解。

M. Chini, *Rendiconti Istituto Lombardo*(2), **36**(1903), p 1035—1046.

1.52. $y' = ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}$; 1.55 型.

假设 $y = x^{\frac{1}{1-n}}u(x)$, 则得到可分离变量的方程

$$xu' = au^n + \frac{u}{n-1} + b,$$

因而,

$$\ln|x| = \int \frac{du}{au^n + \frac{u}{n-1} + b}.$$

1.53. $y' = \frac{f^{1-n}g'}{(ag+b)^n}y^n + \frac{f'}{f}y + fg'$,

$f = f(x)$, $g = g(x)$; 1.55 型。

假设 $y = u(x)f(ag+b)$, 则得到

$$(ag+b)u' = (u^n - au + 1)g';$$

因而,

$$\int \frac{du}{u^n - au + 1} + C = \frac{1}{a}\ln|ag+b|.$$

1.54. $y' = a^n f^{1-n} g' y^n + \frac{f'}{f}y + fg'$,

$f = f(x)$, $g = g(x)$; 1.55 型。

假设 $y = \frac{f}{a}u(x)$, 则得到

$$u' = a(u^n + 1)g',$$

因而,

$$ag = \int \frac{du}{u^n + 1} + C.$$

1.55. $y'=f(x)y^n+g(x)y+h(x)$.

如果在适当选择常数 α,β 时有

$$\left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\int g\,dx}\left[\beta+\alpha\int he^{-\int g\,dx}\,dx\right],$$

即如果

$$z=\left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{1}{n}}$$

是线性方程

$$z'-gz=\alpha h$$

的解，则原方程的解可由等式

$$y=\left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{1}{n}}u(x)$$

得到，其中 u 由关系式

$$\int\frac{du}{u^n-\alpha u+1}+C=\int\left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{1}{n}}h\,dx$$

确定。当 $h\equiv 0$ 时，此方程化为伯努利方程(第一部分4.5节)。

M Chini, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 57 (1924), p 498 以及以后；58(1925), p. 242 以及以后.

1.56. $y'+f(x)y^a+g(x)y^b=0$.

当 $a\neq 1$ 时，经过变换 $u(x)=y^{a-1}$，则得到

$$u'+(a-1)fu^2+(a-1)gu^{\frac{a+b-2}{a-1}}=0.$$

L Conte. *Bolletino Unione Mat Italiana* 11 (1932), p. 216—219.

1.57. $y'=\sqrt{|y|}$.

$y=0,\quad y=\operatorname{sign}x\cdot\frac{x^2}{4}$，以及当此曲线沿着 x 轴平行

移动时所得到的曲线，和由这些曲线的某些部分组成的可微曲线都是解（图28）．此方程是通过某一点（这里是通过 x 轴上的每一点）有许多条积分曲线的具有连续右端的方程的实例．

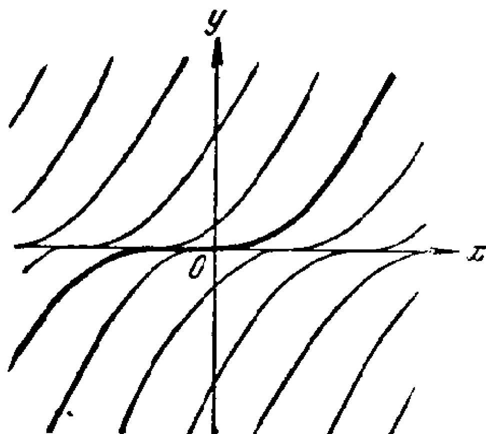


图 28

1.58. $y'=a\sqrt{y}+bx$;

方程 1.52 的特殊情况．

1.59. $y'=a\sqrt{y^2+1}+b$, $a\neq 0$.

如果$\frac{b}{a}<-1$，则 $y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}$ 是一个解．经过变换 $y=\operatorname{tg}u(x)$，则化为方程

$$\left(\frac{1}{\cos u}-\frac{b}{a+b\cos u}\right)u'=a.$$

当$|a|<|b|$时，由此得到

$$ax=C+\ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|-$$

$$-\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos u+\sqrt{b^2-a^2}\sin u}{a+b\cos u}\right|,$$

而当$|a|>|b|$时，则得到

$$ax=C+\ln\left|\frac{1+\sin u}{\cos u}\right|\mp\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin u}{a+b\cos u},$$

其中取上面的符号还是取下面的符号，应取决于

$(a+b\cos u)(a\cos u+b)>0$ 还是 <0．

当 $b=a$ 时，则有

$$ax=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|-\operatorname{tg}\frac{u}{2}+C.$$

Ira Freeman. *Bulletin Americ. Math. Soc.* 31(1925), p 425—429.

1.60. $y'=\pm\sqrt{\frac{y^2-1}{x^2-1}}$; 可分离变量的方程.

当$|x|<1$, $|y|<1$ 时，其解可由关系式

$$\arcsin y=\pm\arcsin x+C$$

得到(或者，由关系式

$$y\sqrt{1-x^2}\mp x\sqrt{1-y^2}=C$$

也能得到同样的结果)，而当$|x|>1$, $|y|>1$ 时，其解则可由关系式

$$y+\sqrt{y^2-1}=C\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$$

得到；此外，$y=\pm1$ 也是解. 也可参阅 1.448.

1.61. $y'=\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{y^2-1}}$; 可分离变量的方程.

当$|x|<1$, $|y|<1$ 时，其解可由关系式

$$\arcsin y+y\sqrt{1-y^2}=C\pm\arcsin x\pm x\sqrt{1-x^2}$$

得到，而当$|x|>1$, $|y|>1$ 时，其解则可由

$$y\sqrt{y^2-1}-\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=$$
$$=C\pm\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]$$

得到.

1.62. $y'=\frac{y-x^2\sqrt{x^2-y^2}}{xy\sqrt{x^2-y^2}+x}$.

假设 $y=xu(x)$，则得到全微分方程

$$x(u^2+1)+\left(x^2u+\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)u'=0.$$

所以

$$\frac{1}{2}x^2(u^2+1)+\arcsin u+C=0$$

和

$$y=x\sin\left[C-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right].$$

1.63. $y'=\dfrac{1+y^2}{[y+(1+y)^{1/2}](1+x)^{3/2}}$;

可分离变量的方程

$$\frac{2}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\int\frac{\sqrt{1+y}}{1+y^2}dy=C.$$

1.64. $y'=\pm\dfrac{(ay^2+by+c)^{1/2}}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$; 1.71 型.

根据第一部分 4.1 节，可以解此方程. 通解具有下列形式:

$$(a-C)^2(x^2+y^2)+2(a^2-C^2)xy+$$
$$+2b(a-C)(x+y)+b^2-4cC=0.$$

1.65. $y'=\dfrac{(y^3+1)^{1/2}}{(x^3+1)^{1/2}}$; 1.71 型.

通解为:

$$x^2y^2-4(x+y)+2Cxy(x+y)+C^2(x-y)^2+4C=0.$$

1.66. $y'=\pm\dfrac{[y(1-y)(1-ay)]^{1/2}}{[x(1-x)(1-ax)]^{1/2}}$, 1.71 型.

假设 $y=\pm\eta^2(\xi)$, $x=\pm\xi^2$, 则得到

$$\eta'=\frac{[(1-\eta^2)(1-a\eta^2)]^{1/2}}{[(1-\xi^2)(1-a\xi^2)]^{1/2}},$$

即 1.68 型的方程. 通解具有下列形式:

$$[x(1-y)(1-ay)]^{1/2}\mp[y(1-x)(1-ax)]^{1/2}=$$
$$=C(axy-1).$$

1.67. $y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^4}}{\sqrt{1-x^4}}$; 方程 1.68 的特殊情况.

通解可以通过兰尼斯卡坦函数来表示:

$$\sin \operatorname{lemn} y \mp \sin \operatorname{lemn} x = C.$$

关于这些函数,见Whittaker 和 Watson, p.524.

1.68. $y' = \pm\frac{(ay^4+by^2+1)^{1/2}}{(ax^4+bx^2+1)^{1/2}}$; 方程 1.71 的特殊情况.

其解可由关系式

$$(ax^2y^2-1)^2 = 2C(x^2+y^2)(ax^2y^2+1) + \\ + 4bCx^2y^2 - C^2(x^2-y^2)^2$$

或者(等价地)由

$$x(ay^4+by^2+1)^{1/2} \mp y(ax^4+bx^2+1)^{1/2} = C(ax^2y^2-1)$$

求出.

1.69. $y' = \pm\sqrt{XY}$, $X = \sum_{\nu=0}^{1} a_\nu x^\nu$, $Y = \sum_{\nu=0}^{1} b_\nu y^\nu$.

可用第一部分 4.1 节的方法求解. 关于这里遇到的积分的计算,见 1.72.

1.70. $y' = \pm\sqrt{\frac{X}{Y}}$, $X = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu$, $Y = \sum_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu$. 见1.69.

1.71. $y' = \pm\sqrt{\frac{Y}{X}}$, $X = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu$, $Y = \sum_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu$.

第一部分 4.1 节中讨论过的类型. 关于应用第一部分 4.1 节的方法时所遇到的积分的计算, 见 1.72. 如果 $b_\nu = a_\nu (\nu = 0, 1, \cdots, 4)$, 则通解为:

$$(\sqrt{Y} \pm \sqrt{X})^2 = (y-x)^2[a_4(y+x)^2 + a_3(y+x) + C];$$

或者取另一种形式:

$$(x^2\sqrt{Y} \pm y^2\sqrt{X})^2 =$$

$$=(y-x)^2[Cx^2y^2+a_1xy(x+y)+a_0(x+y)^2].$$

1.72. $y'=R_1(x,\sqrt{X})\cdot R_2(y,\sqrt{Y})$,

R_1, R_2 是两个变量的有理函数，而 X, Y 是不高于四次的多项式

$$X=\sum_{\nu=0}^{4}a_\nu x^\nu,\quad Y=\sum_{\nu=0}^{4}b_\nu y^\nu.$$

这是第一部分4.1节那种类型的可分离变量的方程．如果 X 或 Y 的次数高于二次，则其解将导致椭圆积分．

［见 Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II（中译本：Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，高等教育出版社，1954．卷II）；Whittaker 和 Watson．关于求这些积分的数值，见 Янке, Эмде 和 Лёш．——俄译本编者注．］

1.73. $y'=\pm\dfrac{Y^{2/3}}{X^{2/3}}$，$X=\sum\limits_{\nu=0}^{3}a_\nu x^\nu$，$Y=\sum\limits_{\nu=0}^{3}a_\nu y^\nu$.

如果 α 是多项式 X 的单根，并且

$$X=a_3(x-\alpha)(x^2+2px+q),\quad \beta=\frac{p^2-q}{\alpha^2+2\alpha p+q},$$

那么经过变换 $X=a_3(x-\alpha)^3\xi^3$，$Y=a_3(y-\alpha)^3\eta^3$ 则可化为方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\pm\sqrt{\frac{\eta^3+\beta}{\xi^3+\beta}}.$$

不论右端取什么符号，其解均满足方程

$$(\xi\eta+\xi\gamma+\eta\gamma)^2=4(\xi\eta\gamma+\beta)(\xi+\eta+\gamma),$$

其中 γ 是任意常数．

进一步计算（未加证明）可以得知，原微分方程的解满足关系式

$$XYC=\left[a_3xyc+\frac{1}{3}a_2(xy+xc+yc)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}a_1(x+y+c)+a_0\right]^3$$

其中 c 是任意常数,并且

$$C=\sum_{\nu=0}^{3}a_\nu c^\nu.$$

1.74. $\boldsymbol{y'=f(x)\,[y-g(x)]\sqrt{(y-a)(y-b)}}$.

经过变换 $u^2(x)=\frac{y-a}{y-b}$,则化为黎卡提方程

$$u'=\pm\frac{1}{2}f[a-g-u^2(b-g)].$$

1.75. $\boldsymbol{y'-e^{x-y}+e^x=0}$.

假设 $u(x)=e^y$,则得到

$$y=\ln[1+C\exp(-e^x)].$$

1.76. $\boldsymbol{y'=a\cos y+b}$, $a\neq 0$;可分离变量的方程.

$$\int\frac{dy}{a\cos y+b}=x+C.$$

其中的积分可以借助于变换

$$\cos y=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \sin y=\frac{2t}{t^2+1}$$

来计算. 例如,如果 $b^2>a^2$,则得到

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2}=C.$$

1.77. $\boldsymbol{y'=\cos(ay+bx)}$, $a\neq 0$.

假设 $u(x)=ay+bx$,则得到方程 1.76

$$u'=a\cos u+b.$$

1.78. $\boldsymbol{y'+a\sin(\alpha y+\beta x)+b=0}$

由给定的方程可以得到

$$\alpha y+\beta x+\arcsin\frac{y'+b}{a}=0;$$

这是拉格朗日-达兰贝尔方程（第一部分，4.19 节）．从而，我们得到原方程的解法．显然，当取任何其他函数来代替正弦函数时，也有类似的结果．

D. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* 4(1935), p. 150.

1.79. $y'+f(x)\cos ay+g(x)\sin ay+h(x)=0$.

假设 $u(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}ay$，则得到黎卡提方程

$$\frac{2}{a}u'+(h-f)u^2+2gu+(h+f)=0.$$

D. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade*, 4(1935), p. 149—152.

1.80. $y'+f\sin y+(1-f')\cos y=f'+1$, $f=f(x)$.

假设 $u(x)=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$，则得到

$$u'-f'=u(u-f),$$

假设 $v(x)=u-f$，由此得到伯努利方程

$$v'=v(v+f).$$

1.81. $y'+2\operatorname{tg}y\ \operatorname{tg}x=1$.

例如，函数 $y=\frac{1}{2}\pi-x+k\pi$ （k 为整数）满足此方程．假设 $\eta(\xi)=\operatorname{tg}y$, $\xi=\operatorname{tg}x$, 则得到

$$(\xi^2+1)\eta'=(\eta^2+1)(1-2\xi\eta).$$

关于这个方程，见 1.151．

1.82. $y'=a(1+\operatorname{tg}^2y)+\operatorname{tg}y\operatorname{th}x$.

此方程积分曲线的性状相当复杂，在下列文章中曾研究过：B. Gambier, *Enseignement math.* 28 (1929), p. 245 和 H. Milloux, 同上，29 (1930), p. 86—112.

1.83. $y' = \mathrm{tg}(xy)$.

其解满足方程

$$\int_0^y e^{\frac{1}{2}t^2} \cos(xt)\,dt = Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

P Hendlé, *Intermédiaire math* 25(1918), p 45以及其后.

1.84. $y' = f(ax+by)$.

假设 $u(x) = ax + by$, 则得到可分离变量的方程

$$u' = a + bf(u).$$

1.85. $y' = x^{a-1}y^{1-b}f\left(\frac{x^a}{a} \pm \frac{y^b}{b}\right)$.

假设 $u(y) = \frac{x^a}{a} \pm \frac{y^b}{b}$, 则得到可分离变量的方程

$$u' = x^{a-1}[1 \pm f(u)].$$

1.86. $y' = \frac{y - xf(x^2+ay^2)}{x + ayf(x^2+ay^2)}$; 见 1.366.

1.87. $y' = \frac{y}{x}\frac{af(x^c y) + cx^a y^b}{bf(x^c y) - x^a y^b}$; 见 1.367.

1.88. $2y' - 3y^2 - 4ay = b + ce^{-2ax}$;

黎卡提方程, 见 1.43(2).

1.89. $xy' \pm \sqrt{a^2 - x^2} = 0$;

曳物线(追逐线)方程,见 1.492.

$$y = \mp\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx =$$

$$= \pm\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} \mp \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1.90. $xy' + y = x\sin x$; 线性方程.

$$y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x}.$$

1.91. $xy'-y=\frac{x}{\ln|x|}$; 线性方程.

$$y=Cx+x\ln|\ln|x||.$$

1.92. $xy'-y=x^2\sin x$; 线性方程.

$$y=x(C-\cos x).$$

1.93. $xy'-y=\frac{x\cos\ln|\ln|x||}{\ln|x|}$; 线性方程.

$$y=Cx+x\sin\ln|\ln|x||.$$

1.94. $xy'+ay+bx^n=0$;线性方程.

$x<0$ 的情况可以归结为 $x>0$ 的情况. 当 $x>0$ 时, 则有

$$y=\begin{cases} Cx^{-a}-\dfrac{b}{n+a}x^n & \text{当 } a\neq -n \text{ 时}, \\ Cx^{-a}-bx^{-a}\ln x & \text{当 } a=-n \text{ 时}. \end{cases}$$

1.95. $xy'+y^2+x^2=0$; 黎卡提方程.

假设 $u'(x)=\frac{1}{x}y(x)u(x)$, 则得到线性方程

$$xu''+u'+xu=0;$$

关于这个方程, 见 2.162(9).

1.96. $xy'-y^2+1=0$; 可分离变量的方程.

$$y=\frac{1-Cx^2}{1+Cx^2} \text{ 和 } y=-1.$$

1.97. $xy'+ay^2-y+bx^2=0$; 第一部分 4.6 节(d)的类型.

假设 $y=xu(x)$, 则得到可分离变量的方程

$$u'=-au^2-b.$$

1.98. $xy'+ay^2-by+cx^{2b}=0$; 黎卡提方程.

假设 $y=\eta(\xi)$, $\xi=x^b$, 则得到方程 1.97

$$b(\xi\eta'-\eta)+a\eta^2+c\xi^2=0.$$

1.99. $xy'+ay^2-by=cx^{\beta}$.

经过变换 $y=\xi\eta(\xi), \xi=x^b$, 则将此方程化为特殊的黎卡提方程(第一部分,4.8 节)

$$\eta' + \frac{a}{b}\eta^2 = \frac{c}{b}\xi^\alpha, \text{ 其中 } \alpha = \frac{\beta}{b} - 2.$$

1.100. $xy' + xy^2 + a = 0$; 方程 1.24 的特殊情况。

1.101. $xy' + xy^2 - y = 0$; 伯努利方程.

$$y=0 \text{ 和 } y=\frac{2x}{x^2+C}.$$

1.102. $xy' + xy^2 - y - ax^3 = 0.$

见 1.201. 设 $\alpha=\sqrt{|a|}$.

当 $a>0$ 时, $y=\alpha x$ 和

$$y=\alpha x \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + C\right)$$

都是解; 当 $a<0$ 时, 则有

$$y=\alpha x \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + C\right).$$

1.103. $xy' - xy^2 - (2x^2+1)y - x^3 = 0$; 黎卡提方程.

根据第一部 4.9 节, 如果借助于变换 $u'(x) = -uy$ 将此方程化为线性方程, 则得到方程 2.123

$$xu'' - (2x^2+1)u' + x^3u = 0,$$

由此

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}(C_1 + C_2x^2), \quad y = -\frac{C_1x + C_2(x^3+2x)}{C_1 + C_2x^2}.$$

1.104. $xy' + axy^2 + 2y + bx = 0$; 黎卡提方程.

如果假设 $y=u(x)-\frac{1}{ax}$, 则得到

$$u' + au^2 + b = 0,$$

因而

$$x=-\int\frac{du}{au^2+b}+C.$$

特别是，如果 $b=-a$，则有

$$u=\pm 1,\quad \operatorname{th}(ax-C),\quad \operatorname{cth}(ax-C).$$

1.105. $xy'+axy^2+by+cx+d=0$；黎卡提方程。

假设 $\eta'(\xi)=\eta(\xi)y(x)$，$\xi=ax$，则得到线性方程 2.120

$$\xi\eta''+b\eta'+\left(\frac{c}{a}\xi+d\right)\eta=0.$$

1.106. $xy'+x^ay^2+\frac{a-b}{2}y+x^b=0$；黎卡提方程。

$$y=x^{\frac{1}{2}(b-a)}\operatorname{tg}\left[C-\frac{2}{a+b}x^{\frac{1}{2}(a+b)}\right].$$

1.107. $xy'+ax^\alpha y^2+by=cx^\beta$.

如果 $b\neq\alpha$，经过变换 $y=x^{-b}\eta(\xi)$，$\xi=x^{\alpha-b}$，此方程的解则可唯一地转变为特殊的黎卡提方程（第一部分 4.8 节）

$$(\alpha-b)\eta'+a\eta^2=cx^\gamma,\quad \gamma=\frac{2b+\beta-\alpha}{\alpha-b}$$

的解；原方程也称为黎卡提方程的罗森型。

Watson, p 91.

1.108. $xy'-y^2\ln x+y=0$；伯努利方程。

$$\frac{1}{y}=1+\ln x+Cx.$$

1.109. $xy'-y(2y\ln x-1)=0$；伯努利方程。

$$\frac{1}{y}-2(1+\ln x)=Cx.$$

1.110. $xy'+f(x)(y^2-x^2)-y=0$；黎卡提方程。

显然，$y=\pm x$ 是解。所以，根据第一部分 4.9 节，可以得到所有的解。

1.111. $xy' + y^3 + 3xy^2 = 0$；阿贝耳方程。

根据刘维尔的研究（R. Liouville. *Acta Math.* **27** (1903), p.60），此方程可用积分法求解。

1.112. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$；方程 1.113 的特殊情况。

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2.$$

1.113. $xy' + a\sqrt{y^2 + x^2} - y = 0$；齐次方程。

$$y = x\operatorname{sh}\left(a\ln\frac{C}{x}\right),$$

特别是，如果 $a=1$，则有 $y = \frac{C}{2} - \frac{x^2}{C}$.

1.114. $xy' - x\sqrt{y^2 + x^2} - y = 0$.

第一部分 4.6 节(d)中讨论过的类型。

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cxe^x,\ C \neq 0.$$

1.115. $xy' - x(y - x)\sqrt{y^2 - x^2} - y = 0$.

假设 $y = xu(x)$，则得到

$$u' = |x|(u-1)\sqrt{u^2 - 1},$$

假设 $u = \frac{1}{\cos v}$，由此得到

$$v' = \pm x(1 - \cos v);$$

因而

$$\frac{1}{2}x^2 = \pm\operatorname{ctg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}C,$$

即

$$(x^2 - C)^2 = 4\frac{y + x}{y - x}$$

最后，

$$y = x\frac{(x^2 - C)^2 + 4}{(x^2 - C)^2 - 4},\quad 其中\ \frac{x(x^2 - C)}{(x^2 - C)^2 - 4} < 0.$$

1.116. $xy' - x\sqrt{(y^2 - x^2)(y^2 - 4x^2)} - y = 0$.

假设 $y = xu(x)$，则得到

$$u' = x\sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - 4)},$$

$$\frac{1}{2}x^2+C=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2-4)}}.$$

关于积分的计算，见 1.72。

1.117. $xy'=x\exp\frac{y}{x}+y+x$；齐次方程.

假设 $xu(x)=y$，则得到

$$\frac{u'}{e^u+1}=\frac{1}{x},$$

因而

$$\exp\frac{y}{x}=\frac{Cx}{1-Cx}.$$

1.118. $xy'=y\ln y$；可分离变量的方程.

我们得到

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\ln\frac{x}{C},\quad 因而\quad y=\exp\frac{x}{C}.$$

1.119. $xy'-y(\ln xy-1)=0$.

假设 $u(x)=xy$，则得到

$$xu'=u\ln u,\quad 因而\quad xy=e^{Cx}.$$

1.120. $xy'-y\left(x\ln\frac{x^2}{y}+2\right)=0$.

$$x+\ln\ln\frac{x^2}{y}=C.$$

M O. Gonzalez, *Bol. mat.* 11(1938), p. 206—209.

1.121. $xy'+\sin(y-x)=0$.

假设 $u(x)=x\operatorname{tg}\frac{y-x}{2}$，则得到黎卡提方程

$$2xu'+u^2+x^2=0,$$

经过变换 $u=2x\frac{v'}{v}$，此方程则化为方程 2.162(4)

$$x^2v''+xv'+\frac{x^2}{4}v=0.$$

1.122. $xy'+(\sin y-3x^2\cos y)\cos y=0.$

除以 $\cos^2 y$，则得到全微分方程

$$x\operatorname{tg}y-x^3=C.$$

1.123. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$；齐次方程。

$$y=2x\operatorname{arctg}Cx.$$

1.124. $xy'+x\cos\frac{y}{x}-y+x=0$；齐次方程。

$$\cos\frac{y}{x}-(C+\ln x)\sin\frac{y}{x}=1.$$

1.125. $xy'+x\operatorname{tg}\frac{y}{x}-y=0$；齐次方程。

$$x\sin\frac{y}{x}=C.$$

1.126. $xy'=yf(xy).$

此方程属于第一部分 4.7 节中讨论过的那种类型。经过变换 $y=x^{-1}\eta(\xi)$，$\xi=\ln x$，可将其化为方程

$$\eta'=\eta[1+f(\eta)],$$

由此得到

$$x=\exp\int_C^{xy}\frac{d\eta}{\eta[1+f(\eta)]}.$$

1.127. $xy'=yf(x^a y^b).$

假设 $u(x)=x^a y^b$，则得到可分离变量的方程

$$xu'=buf(u)+au.$$

1.128. $xy'+ay=f(x)g(x^a y).$

假设 $u(x)=x^a y$，则得到可分离变量的方程

$$u'=x^{a-1}f(x)g(u).$$

1.129. $(x+1)y'+y(y-x)=0$；伯努利方程.

$$\frac{1}{y}=Cu-1+u\int\frac{dx}{u},\ \text{其中}\ u=(x+1)e^{-x}.$$

1.130. $2xy'+y=2x^3$；线性方程.

$$y=\frac{2}{7}x^3+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

1.130a. $2xy'=y^2+4ixy-1$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

$y=\dfrac{-iZ_0(x)+Z_1(x)}{iZ_0(x)+Z_1(x)}$. Z 是柱函数，对于 Z_0 和 Z_1 具有相同的任意常数.

L. Schwarz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23(1943), p. 125.

关于柱函数，见 Whittaker 和 Watson.

1.131. $(2x+1)y'-4e^{-y}+2=0$.

假设 $u(x)=e^y$，则得到线性方程

$$u'+\frac{2}{2x+1}u=\frac{4}{2x+1};\quad (2x+1)e^y=4x+C.$$

1.132. $3xy'-3x\ln x\cdot y^4-y=0$；　伯努利方程.

$$xy^{-3}+\frac{3}{4}x^2(2\ln x-1)=C.$$

1.133. $x^2y'+y-x=0$；线性方程.

$$y=\exp\frac{1}{x}\left[C+\int\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right].$$

此微分方程的意义在于：当试图求此方程在点 $x=0$ 的邻域内的幂级数形式的解时，将导致于发散的级数

$$y=x-x^2+2!x^3-3!x^4+\cdots,$$

当 $x>0$ 取小的值时，此级数是解的渐近展开式（见第一部分 4.4 节）.

1.134. $x^2y'-y=x^2e^{x-\frac{1}{x}}$；线性方程.

$$y=e^{-\frac{1}{x}}(e^x+C).$$

1.135. $x^2y'=(x-1)y$；可分离变量的方程.

$$y=Cx\exp\frac{1}{x}.$$

1.136. $x^2y'+y^2+xy+x^2=0$；齐次方程.

$$\frac{x}{y+x}=\ln|x|+C \text{ 和 } y=-x.$$

1.137. $x^2y'-y^2-xy=0$；齐次方程.

$$\frac{x}{y}=-\ln Cx \text{ 和 } y=0.$$

1.138. $x^2y'-y^2-xy=x^2$；齐次方程.

此外，当除以 $x(x^2+y^2)$ 时，此方程则变成全微分方程，

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln x=C.$$

1.139. $x^2(y'+y^2)+ax^k-b(b-1)=0$；黎卡提方程.

假设 $u'(x)=u(x)y(x)$，则得到方程 2.155，其中变量 x 换为变量 u.

1.140. $x^2(y'+y^2)+4xy+2=0$；黎卡提方程.

$$y=-\frac{2}{x} \quad \text{和} \quad y=-\frac{x-2C}{x(x-C)}.$$

1.141. $x^2(y'+y^2)+axy+b=0$；黎卡提方程.

假设 $u'(x)=u(x)y(x)$，则得到欧拉方程（见第一部分，22.3 节）

$$x^2u''+axu'+bu=0.$$

1.142. $x^2(y'-y^2)-ax^2y+ax+2=0$；黎卡提方程.

假设 $u(x)=xy-1$，则得到伯努利方程

$$xu' - (ax+3)u = u^2.$$

1.143. $\boldsymbol{x^2(y'+ay^2)=b}$;

黎卡提方程,同时也是 1.52 型的方程.

假设 $u(x)=xy$,则得到可分离变量的方程

$$xu' + au^2 - u - b = 0.$$

因而

$$\ln|x| = -\int \frac{du}{au^2-u-b} + C.$$

1.144. $\boldsymbol{x^2(y'+ay^2)+bx^\alpha+c=0}$;黎卡提方程.

假设 $u(x)=xy+A$,并且 $aA^2+A+c=0$,

则得到 1.99 型的方程

$$xu' + au^2 - (2aA+1)u + bx^\alpha = 0.$$

1.145. $\boldsymbol{x^2y'+ay^3-ax^2y^2=0}$;阿贝耳方程.

假设 $u(x)=\frac{1}{y}+ax$,则得到 1.36 型的方程

$$\frac{dx}{du} + x^3 - \frac{u}{a}x^2 = 0.$$

1.146. $\boldsymbol{x^2y'+xy^3+ay^2=0}$;方程 1.169 的特殊情况.

1.147. $\boldsymbol{x^2y'+ax^2y^3+by^2=0}$; 阿贝耳方程.

假设 $y(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{ab}}\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$, 则得到 1.145

型的方程

$$\xi^2\eta' = \eta^3 - \xi^2\eta^2.$$

1.148. $\boldsymbol{(x^2+1)y'+xy-1=0}$; 线性方程.

$$y\sqrt{x^2+1} = C + \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

1.149. $\boldsymbol{(x^2+1)y'+xy=x(x^2+1)}$; 线性方程.

$$y = \frac{x^2+1}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.150. $(x^2+1)y'+2xy=2x^2$；线性方程.

$$y=\frac{2}{3}\frac{x^3+C}{x^2+1}.$$

1.151. $(x^2+1)y'+(y^2+1)(2xy-1)=0$；阿贝耳方程.

借助于形如 $y=a(x)u(x)+b(x)$ 的变换，可以使得方程中既不包含常数项，也不包含含有 u 的项. 为此，这里需要假设

$$x^4y=(x^2+1)u+x^3.$$

于是得到形如1.185的方程，其中变量 y 换为变量u.

1.152. $(x^2+1)y'+x\sin y\cos y-x(x^2+1)\cos^2 y=0$.

假设 $u(x)=\mathrm{tg}y$，则得到1.149，其中变量 y 换为变量 u.

1.153. $(x^2-1)y'-xy+a=0$；线性方程.

$$y=ax+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.154. $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$；

线性方程，同时也是全微分方程.

$$(x^2-1)y-\sin x=C.$$

1.155. $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$；黎卡提方程.

此方程可以写为下列形式：

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(y-x)+(y-x)^2=0.$$

这是对于 $u=y-x$ 的可分离变量的方程. 于是得到

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C \text{ 和 } y=x.$$

1.156. $(x^2-1)y'-y(y-x)=0$；伯努利方程.

$$\frac{1}{y}=x+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.157. $(x^2-1)y'+a(y^2-2xy+1)=0$；黎卡提方程.

经过变换$y=\frac{2a-1}{a}x-\frac{a-1}{a}\frac{1}{u(x)}$,则化为方程

$$(x^2-1)u'+(a-1)(u^2-2xu+1)=0.$$

如果a是自然数，那么重复应用上述变换，此方程则可化为同样形式的方程,但是当$a=1$时，即化为形如1.155的方程。

1.158. $(x^2-1)y'+axy^2+xy=0$；伯努利方程.

$$\frac{1}{y}=-a+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.159. $(x^2-1)y'=2xy\ln y$；可分离变量的方程.

$$y=\exp C(x^2-1).$$

1.160. $(x^2-4)y'+(x+2)y^2-4y=0$；伯努利方程.

$$\frac{1}{y}=\frac{x+2}{x-2}(C+\ln|x+2|).$$

1.161. $(x^2-5x+6)y'+3xy-8y+x^2=0$；线性方程.

此外,乘以$x-2$,此方程则化为全微分方程.

$12y(x^2-5x+6)(x-2)+x^3(3x-8)=C.$

1.162. $(x-a)(x-b)y'+y^2+k(y+x-a)(y+x-b)=0$；黎卡提方程.

如果$k(k+1)\neq0$,那么借助于变换$ku(x)=y+k(y+x)$,此方程则化为方程

$$\frac{u'}{(u-a)(u-b)}+\frac{k}{(x-a)(x-b)}=0.$$

由此得到

$$\frac{u-a}{u-b}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^k=C \text{ 当 } a\neq b \text{ 时},$$

$$\frac{1}{u-a}+\frac{k}{x-a}=C \quad \text{当} a=b \text{ 时}.$$

如果 $k=0$，则得到

$$y\ln C\frac{x-a}{x-b}=a-b \quad 当\ a\neq b\ 时,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x-a}=C \qquad 当\ a=b\ 时.$$

最后，如果 $k=-1$，则此方程是线性的，于是得到

$$y=(x-a)(x-b)\left[C+\frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}\right] \quad 当\ a\neq b\ 时,$$

$$y=a-x+C(x-a)^2 \qquad 当\ a=b\ 时.$$

1.163. $2x^2y'-2y^2-xy+2a^2x=0$；黎卡提方程.

$y=a\sqrt{x}$ 是解；根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解.

1.164. $2x^2y'-2y^2-3xy+2a^2x=0$；黎卡提方程.

$y=a\sqrt{x}-\frac{x}{2}$ 是解；根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解.

1.165. $x(2x-1)y'+y^2-(4x+1)y+4x=0$；黎卡提方程.

$y=1$ 是解. 根据第一部分 4.9 节，由此得到

$$y=\frac{2x^2+C}{x+C}.$$

1.166. $2x(x-1)y'+(x-1)y^2-x=0$；见 1.176(1).

1.167. $3x^2y'-7y^2-3xy-x^2=0$；齐次方程.

$$3\operatorname{arctg}\sqrt{7}\frac{y}{x}=C+\sqrt{7}\ln x.$$

1.168. $3(x^2-4)y'+y^2-xy-3=0$；黎卡提方程.

如果 $y=y(x)$ 是代数方程

$$y^4-6y^2-4xy-3=0$$

的解，则函数 $y=y(x)$ 满足原来的黎卡提方程.

1.169. $(ax+b)^2y'+(ax+b)y^3+cy^2=0$；阿贝耳方程.

确定两个数 α,β，使得 $\alpha b-\beta a=c$。于是经过变换

$$u(x)=\frac{1}{y}-\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}$$

则化为方程

$$u'[(ax+b)u+\alpha x+\beta]=1,$$

只要 $u'\neq 0$，由线性方程

$$\frac{dx}{du}=x(au+\alpha)+bu+\beta$$

可以得到此方程的解。

1.170. $x^3y'-y^2-x^4=0$；方程1.187的特殊情况。

$$y=x^2-\frac{x^2}{\ln Cx}.$$

1.171. $x^3y'-y^2-x^2y=0$；伯努利方程。

除以 x^2y^2 以后，则得到全微分方程。

$$\frac{x}{y}-\frac{1}{x}=C.$$

1.172. $x^3y'-x^4y^2+x^2y+20=0$；黎卡提方程。

根据第一部分4.9节，如果借助于变换 $y=-\frac{u'}{xu}$ 将此方程化为线性方程，则得到形如2.14的方程

$$x^2u''=20u,$$

因而

$$u=C_1x^{-4}+C_2x^5,\qquad y=\frac{4C_1-5C_2x^9}{C_1x^2+C_2x^{11}}.$$

1.173. $x^3y'-x^6y^2-(2x-3)x^2y+3=0$；黎卡提方程。

根据第一部分4.9节，如果借助于变换 $y=-x^{-3}\frac{u'}{u}$ 将此方程化为线性方程，则得到形如2.35的方程

$$u''-2u'-3u=0,$$

因而

$$u=C_1e^{3x}+C_2e^{-x},\quad y=-\frac{1}{x^3}\frac{3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}}{C_1e^{3x}+C_2e^{-x}}.$$

1.174. $x(x^2+1)y'+x^2y=2$；线性方程.

$$y\sqrt{x^2+1}+2\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}=C.$$

1.175. $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+ax^3=0$；线性方程.

$$y=ax+Cx\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.176. $x(x^2-1)y'+(x^2-1)y^2-x^2=0$；黎卡提方程.

假设 $y(x)=\eta(\xi),\xi=x^2$, 则得到方程

$$2\xi(\xi-1)\eta'+(\xi-1)\eta^2-\xi=0,$$

根据第一部分 4.9 节，经过变换

$$u(\xi)=\exp\int\frac{\eta}{2\xi}\,d\xi$$

可将此方程化为超几何方程(见 2.260)

$$\xi(\xi-1)u''+(\xi-1)u'-\frac{1}{4}u=0.$$

关于超几何方程同椭圆函数之间的联系，见 Whittaker-Watson, p. 534.

1.177. $x^2(x-1)y'-y^2-x(x-2)y=0$；伯努利方程.

$$y=\frac{x^2}{(x-1)C+1}.$$

1.178. $2x(x^2-1)y'+2(x^2-1)y^2-(3x^2-5)y+x^2-3=0$；黎卡提方程.

$y=1$ 是解. 根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解：

$$y=1+\frac{1}{z},\ z=\sqrt{\left|\frac{x^2-1}{x}\right|}\left(C+\int\frac{1}{x}\sqrt{\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}dx\right).$$

1.179. $3x(x^2-1)y'+xy^2-(x^2+1)y-3x=0$;

黎卡提方程.

假设 $y(x)=\eta(\xi), \xi=x+\frac{1}{x}$, 则得到方程 1.168,其中变量$x, y$,换为变量 ξ, η.

也可参阅 E Pascal, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 36 (1903), p 329 以及以后.

1.180. $(ax^2+bx+c)(xy'-y)-y^2+x^2=0$; 黎卡提方程.

例如,函数 $y=\pm x$ 是解. 经过变换 $y=xu(x)$, 可将此方程化为可分离变量的方程. 由此得到

$$\ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right|=C+2\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

1.181. $x^4(y'+y^2)+a=0, a\neq 0$; 黎卡提方程.

假设 $u(x)=x^2y$, 则得到

$$x^2u'+u^2-2xu+a=0,$$

借助于变换 $v(x)=u-x$, 由此得到可分离变量的方程

$$x^2v'+v^2+a=0.$$

如果 $a=\alpha^2>0$,则由此得到

$$y=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{x}+C\right).$$

1.182. $x(x^3-1)y'-2xy^2+y+x^2=0$; 黎卡提方程.

$y=x^2$ 是解. 根据第一部分 4.9 节可以得到其余的解.

1.183. $(2x^4-x)y'-2(x^3-1)y=0$; 可分离变量的方程.

$$(2x^3-1)y^3=Cx^6.$$

1.184. $(ax^2+bx+c)^2(y'+y^2)+A=0$; 黎卡提方程.

假设 $u(x)=\exp\int y\,dx$, 则得到形如 2.396 的线性方

程

$$(ax^2+bx+c)^2u''+Au=0.$$

1.185. $x^7y'+2(x^2+1)y^3+5x^3y^2=0$; 阿贝耳方程.

经过变换 $u(x)=y^{-1}$,则得到

$$x^7uu'=5x^3u+2(x^2+1),$$

然后,经过变换 $xv(x)=x^3u+1$, 可化为线性方程

$$\frac{dx}{dv}-\frac{xv}{2(v^2+1)}+\frac{1}{2(v^2+1)}=0.$$

1.186. $x^ny'+y^2-(n-1)x^{n-1}y+x^{2n-2}=0$; 黎卡提方程.

$$y=x^{n-1}\mathrm{tg}(C-\ln x).$$

1.187. $x^ny'=ay^2+bx^{2n-2}$;

黎卡提方程, 同时也是方程1.189的特殊情况.

$$y=\sqrt{\frac{b}{a}}x^{n-1}u(x),$$

其中 $u(x)$ 由下列等式来确定:

$$\sqrt{ab}\ln x=\int\frac{du}{u^2-\alpha u+1}+C,\qquad 其中\ \alpha=\frac{n-1}{\sqrt{ab}}.$$

1.188. $x^{2n+1}y'=ay^3+bx^{3n}$;

阿贝耳方程, 同时也是方程1.189的特殊情况.

1.189. $x^{m(n-1)+n}y'=ay^n+bx^{(m+1)n}$;

方程 1.53 的特殊情况.可以得到

$$y=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}x^{m+1}u(x),$$

其中 u 由下列等式来确定:

$$\int\frac{du}{u^n-\alpha u+1}+C=b\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ \ln|x|,\ 其中\alpha=\frac{m+1}{b}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

1.190. $\sqrt{x^2-1}\,y'=\pm\sqrt{y^2-1}$; 见 1.60.

1.191. $\sqrt{1-x^2}\,y'=\pm y\sqrt{y^2-1}$, $|x|<1$, $|y|>1$.

$y=\pm 1$, 以及 $x\sqrt{y^2-1}\pm\sqrt{1-x^2}=Cy$.

1.192. $y'\sqrt{x^2+a^2}+y-\sqrt{x^2+a^2}+x=0$; 线性方程.

$$y=(\sqrt{x^2+a^2}-x)\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+$$

$$+\frac{C}{a^2}(\sqrt{x^2+a^2}-x).$$

1.193. $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$; 线性方程.

$$y=ax+\frac{C}{\ln x}.$$

1.194. $xy'\ln x-y^2\ln x-(2\ln^2 x+1)y-\ln^3 x=0$;

黎卡提方程.

经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$. 则化为方程1.103, 其中变量 x, y 换为变量 ξ, η. 所以

$$(C_1+C_2\ln^2 x)\ y=-C_1\ln x-C_2(\ln^3 x+2\ln x).$$

1.195. $y'\sin x-y^2\sin^2 x+(\cos x-3\sin x)y+4=0$;

黎卡提方程.

经过变换 $u(x)=y\sin x$, 则化为方程 1.17, 其中变量 y 换为变量 u.

1.196. $y'\cos x+y+(1+\sin x)\cos x=0$; 线性方程.

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}y=C+\sin x-2\ln\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}.$$

1.197. $y'\cos x-y^4-y\sin x=0$; 伯努利方程.

$$y^{-3}=C\cos^3 x+2\sin^3 x-3\sin x.$$

1.198. $y'\sin x\cos x-y-\sin^3 x=0$; 线性方程.

$$y=-\sin x+C\operatorname{tg}x.$$

1.199. $y'\sin 2x+\sin 2y=0$.

除以 $\cos^2 x\cos^2 y$, 则得到全微分方程.

$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x = C.$$

1.200. $(a\sin^2 x + b)\, y' + ay\sin 2x + Ax\,(a\sin^2 x + c) = 0$;

线性方程.

$$(a\sin^2 x + b)\, y =$$

$$= C + \frac{1}{8}A[a\cos 2x + 2ax\sin 2x - (2a + 4c)x^2].$$

1.201. $2fy' + 2fy^2 - f'y - 2f^2 = 0$, $f = f(x)$；黎卡提方程.

如果 $f > 0$，则 $y = \sqrt{f}$ 是解，因此，根据第一部分 4.9 节可以解此方程. 经过变换

$$u(x) = \exp\int y(x)\, dx$$

可化为方程 2.79，其中变量 y 换为变量 u，并且 $a = \frac{1}{2}$，$b = -1$.

1.202. $f(x)y' + g(x)\operatorname{tg} y + h(x) = 0$.

经过变换 $u(x) = \operatorname{tg} y$，则化为阿贝耳 方 程（见第一部分 4.10 节）

$$fu' + gu^3 + hu^2 + gu + h = 0.$$

H Lemke, *Publications math. Belgrabe* 4(1935), p 201—212

1.203. $yy' + y + x^3 = 0$； 见 6.74(6).

1.204. $yy' + ay + x = 0$.

$$\ln|y^2 + axy + x^2| - \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{2y + ax}{x\sqrt{4 - a^2}} = C.$$

当 $|a| < 2$ 时，

$$(x \pm y)\exp\frac{x}{x \pm y} = C \qquad \text{当 } a = \pm 2 \text{ 时，}$$

$$C_1|y - \alpha x|^{\alpha} = C_2|y - \beta x|^{\beta} \qquad \text{当 } |a| > 2 \text{ 时，}$$

其中 $|C_1|+|C_2|>0$,　　$\alpha,\beta=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4}$.

1.205. $yy'+ay+\frac{a^2-1}{4}x+bx^n=0$.

如果等式

$$t=\int\frac{dx}{y(x)},$$

其中 $y(x)$是此方程的解,将 t 定义为 x 的函数,因而也就将 x 定义为 t 的函数,则有

$$x'(t)=\frac{1}{t'(x)}=y(x),$$

由给定的微分方程得到

$$x''+ax'+\frac{a^2-1}{4}x+bx^n=0.$$

关于这个方程见 6.26;当$a=-7$, $n=\frac{3}{2}$时,也可参阅 6.100(2)。

1.206. $yy'+ay+be^x=2a$; 见 6.76(4)。

1.207. $yy'+y^2+4x(x+1)=0$; 伯努利方程。

经过变换 $u(x)=y^2$, 则化为线性方程

$$u'+2u=-8x(x+1),$$

因此,

$$y^2+4x^2=Ce^{-2x}.$$

1.208. $yy'+ay^2-b\cos(x+c)=0$;

伯努利方程,或者对于 y^2 的线性方程。

$$y^2=\frac{2b}{4a^2+1}[2a\cos(x+c)+\sin(x+c)]+$$
$$+C\exp(-2ax).$$

1.209. $yy'=\pm\sqrt{ay^2+b}$; 可分离变量的方程.

经过变换 $u(x)=y^2$, 则化为容易求解的方程

$$u' = \pm 2\sqrt{au+b}.$$

1.210. $yy' + xy^2 - 4x = 0.$

经过变换 $u(x) = y^2$，则化为线性方程

$$u' + 2xu = 8x,$$

因此，

$$y^2 = 4 + Ce^{-x^2}.$$

1.211. $yy' = x\exp\left(\frac{x}{y}\right).$

如果将 y 取作为自变量，并且假设 $x = yu(y)$，则得到可分离变量的方程

$$ye^u uu' = 1 - u^2 e^u;$$

因而

$$\ln|y| = \int \frac{ue^u}{1-u^2e^u} du + C.$$

1.212. $yy' + f(y^2 \pm x^2)g(x) \pm x = 0.$

假设 $u(x) = y^2 \pm x^2$，则得到可分离变量的方程

$$u' + 2f(u)g(x) = 0.$$

1.213. $(y+1)y' = y + x;$

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型。

1.214. $(y+x-1)y' - y + 2x + 3 = 0;$

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型。

$$\ln[(3y-5)^2 + 2(3x+2)^2] + $$
$$+ \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3y-5}{(3x+2)\sqrt{2}} = C.$$

1.215. $(y+2x-2)y' - y + x + 1 = 0;$

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型。

$$\ln\left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + \frac{7}{3}\right) + $$
$$+ 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2y-3}{3x-1}\sqrt{3} = C.$$

1.216. $(y-2x+1)y'+y+x=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$y^2+x^2-xy+y-x+\frac{1}{3}=$$

$$=C\exp\left(2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{3}\frac{2y-x+1}{3x-1}\right]\right).$$

1.217. $(y-x^2)y'=x$.

如果将 y 取作为自变量，则对于 $u(y)=x^2$ 得到线性方程

$$u'+2u=2y,$$

因此

$$x^2=y-\frac{1}{2}+Ce^{-2y}.$$

1.218. $(y-x^2)y'+4xy=0$.

经过变换 $y=x^2u(x)$, 则化为可分离变量的方程

$$x(u-1)u'+2u(u+1)=0,$$

由此方程得到

$$(y+x^2)^2=Cy.$$

1.219. $[y+g(x)]y'=f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x)$;

见阿贝耳方程(第一部分 4.11 节).

1.220. $2yy'-xy^2-x^3=0$.

假设 $u(x)=y^2$, 则得到线性方程

$$u'-xu=x^3.$$

1.221. $(2y+x+1)y'-(2y+x-1)=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$2\ln|6y+3x-1|=3(x-y)+C.$$

1.222. $(2y+x+7)y'-y+2x+4=0$;

见第一部分 4.6节(c).

$$\ln|x^2+y^2+6x+4y+13|+\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x+3}=C.$$

1.223. $(2y-x)y'-y-2x=0$; 齐次方程.

$$y^2-xy-x^2=C.$$

1.224. $(2y-6x)y'-y+3x+2=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$4\ln|5y-15x+2|=10y-5x+C.$$

1.225. $(4y+2x+3)y'-2y-x-1=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$8y+4x+5=C\exp(4x-8y-4).$$

1.226. $(4y-2x-3)y'+2y-x-1=0$.

如果将 y 换为 $-y$,则与 1.225 相同.

1.227. $(4y-3x-5)y'-3y+7x+2=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型,同时也是全微分方程.

$$4y^2-6xy+7x^2-10y+4x=C.$$

1.228. $(4y+11x-11)y'-25y-8x+62=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$(y-4x-2)^3=C(2y+x-5).$$

1.229. $(12y-5x-8)y'-5y+2x+3=0$;

第一部分 4.6 节(c)中讨论过的那种类型.

$$(3y-x-1)(2y-x-2)=C.$$

1.230. $ayy'+by^2+f(x)=0$.

假设 $u(x)=y^2$, 则得到线性方程

$$au'+2bu+2f(x)=0.$$

1.231. $(ay+bx+c)y'+\alpha y+\beta x+\gamma=0$;

见第一部分 4.6节(c).

1.232. $xyy'+y^2+x^2=0$; 齐次方程.

$$(2y^2+x^2)x^2=C.$$

1.233. $xyy'-y^2+ax^3\cos x=0.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程

$$xu'-2u+2ax^3\cos x=0,$$

因此

$$y^2=x^2(C-2a\sin x).$$

1.234. $xyy'-y^2+xy+x^3-2x^2=0$；见 6.172(3)。

1.235. $(xy+a)y'+by=0,\quad b\neq 0.$

如果将 y 取作为自变量，则得到线性方程

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{b}=-\frac{a}{by},$$

因此

$$x=e^{-\frac{y}{b}}\left(C-\frac{a}{b}\int\frac{1}{y}e^{\frac{y}{b}}dy\right).$$

1.236. $x(y+4)y'-y^2-2y-2x=0.$

此方程属于第一部分 4.6 节(e)中讨论过的那种类型，其中 $\alpha=1,\ f=4,\ g=2\frac{y}{x}+2,\ h=\frac{y}{x}$；可以得到

$$(y-x)^2=Cx(2y-x+4).$$

1.237. $x(y+a)y'+by+cx=0.$

将 y 取作为自变量，并且假设

$$u(y)=(by+cx)^{-1},$$

则得到阿贝耳方程(第一部分 4.10 节)

$$u'+by(y+a)u^3-(y+a-b)u^2=0.$$

经过变换 $y(x)=\frac{1}{2}a\xi\eta'(\xi),\ x=\xi^2e^{\eta(\xi)}$，可将此方程化为下列形式：

$$\xi\eta''+\left(1+\frac{2b}{a}\right)\eta'+\frac{4c}{a^2}\xi e^{\eta}=0.$$

关于这个方程，见6.76.

1.238. $[x(y+x)+a]y'=y(y+x)+b.$

此方程属于第一部分4.6节(e)中讨论过的那种类型，其中 $a=2, f=a, g=b, h=\frac{y}{x}+1$. 也可按如下途径求解：假设

$$u(x)+v(x)=x,\quad \frac{b}{a}u(x)-v(x)=y(x),$$

则得到

$$\frac{(a+b)uu'}{(a+b)u^2+a^2}=\frac{v'}{v},$$

因而

$$(a+b)u^2+a^2=Cv^2.$$

1.239. $(xy-x^2)y'+y^2-3xy-2x^2=0.$

乘以 $2x$，则得到全微分方程，由此得到

$$x^2y^2-2x^3y-x^4=C.$$

1.240. $2xyy'-y^2+ax=0$；伯努利方程.

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程.

$$y^2+ax\ln x=Cx.$$

1.241. $2xyy'-y^2+ax^2=0.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程

$$xu'-u+ax^2=0,$$

因而

$$y^2+ax^2=Cx.$$

1.242. $2xyy'+2y^2+1=0.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程

$$xu'+2u+1=0,$$

因而

$$(2y^2+1)x^2=C.$$

1.243. $x(2y+x-1)y'-y(y+2x+1)=0$.

乘以$(xy)^{-4/3}$，则得到全微分方程，由此得到

$$(y-x+1)^3=Cxy.$$

〔原方程还具有$(y-x+1)^{-4}$作为积分因子，同1.244相比较.

D. Mitrinovitch, *Universitet u Beogradu Publikacije elektrotehnickog faculteta, ser. mat. i jiz.*, 27 (1959), p 1—4.

——俄译本编者注.〕

1.244. $x(2y-x-1)y'+y(2x-y-1)=0$.

乘以$(y+x+1)^{-4}$，则得到全微分方程，由此得到

$$(y+x+1)^3=Cxy;$$

此外，$y=0$也是解.

1.245. $(2xy+4x^3)y'+y^2+12x^2y=0$.

可将此方程写为下列形式：

$$(4x^3y)'+(xy^2)'=0,$$

因而

$$4x^3y+xy^2=C.$$

1.246. $x(3y+2x)y'+3(y+x)^2=0$.

乘以x，则得到全微分方程.

$$6x^2y^2+8x^3y+3x^4=C.$$

1.247. $(3x+2)(y-2x-1)y'=y^2-xy+7x^2+9x+3$.

经过变换$x=u-\frac{2}{3}$，$y=v(u)-\frac{1}{3}$，则化为齐次方程

$$3u(v-2u)v'=v^2-uv+7u^2.$$

由此得到

$$(x+y+1)^2(2y-7x-4)=C(3x+2).$$

原方程也可以写为下列形式：

$$y'=w+\frac{1}{w}+1,\quad 其中\ w=\frac{3x+2}{y-2x-1},$$

因而是第一部分 4.6 节(c) 中讨论过的那种类型的方程.

1.248. $(6xy+x^2+3)y+3y^2+2xy+2x=0$.

全微分方程.

$$3xy^2+x^2y+3y+x^2=C.$$

1.249. $(axy+bx^n)y'+\alpha y^3+\beta y^2=0$.

假设 $u(x)=\frac{1}{y}$,则得到伯努利方程

$$\frac{dx}{du}-\frac{bu}{\beta u+\alpha}x^n-\frac{a}{\beta u+\alpha}x=0.$$

1.250. $Bxy+Ax^2+ax+by+c)y'=$

$$=(By^2+Axy+\alpha x+\beta y+\gamma);$$ 雅可比方程.

如果 $c=\gamma=0$,则为第一部分 4.6 节(e) 中讨论过的类型,其中 $\alpha=1, f=a+b\frac{y}{x}$, $g=\alpha+\beta\frac{y}{x}, h=A+B\frac{y}{x}$.

如果条件 $c=\gamma=0$ 不成立,则选择形如

$$x=\xi+p,\ y=\eta+q$$

的变换,以满足这个条件. 为此,需要选择 λ,使得等式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & A & B \\ c & a+\lambda & b \\ \gamma & \alpha & \beta+\lambda \end{vmatrix}=0$$

成立,并且由方程

$$Ap+Bq-\lambda=0,\ (a+\lambda)p+bq+c=0,\ \alpha p+(\beta+\lambda)q+\gamma=0$$

出发.

在一般情况下,在给定微分方程的解当中,总是至少有一个线性函数; 所以在任何情况下最好是求形如 $y=\gamma x+s$ 的解.

给定的方程也可以写为下列形式:

$$(xy'-y)(a_3x+b_3y+c_3)-y'(a_1x+b_1y+c_1)+$$

$$+a_2x+b_2y+c_2=0.$$

此方程参数形式的解，可以由下列常系数线性方程组的解得到：

$$x_\nu'(t)=a_\nu x_1+b_\nu x_2+c_\nu x_3 \quad (\nu=1,2,3)$$

（关于这个方程组，见第一部分 13.1 节），只要假设

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}.$$

[关于雅可比方程，详见下列著作：Степанов; Матвеев; Sansone.——俄译本编者注.]

1.251. $(x^2y-1)y'+xy^2-1=0$;

全微分方程.

$$x^2y^2-2(x+y)=C.$$

1.252. $(x^2y-1)y'-(xy^2-1)=0.$

如果假设 $xt(x)=y(x)$，然后将 t 取作为自变量，而将 x 取作为未知函数，则得到伯努利方程

$$x'+\frac{1}{t-1}x=\frac{t}{t-1}x^4.$$

G. Lampariello, *Atti Accad. Lincei*(6), 19(1934), p.387 以及以后.

[如果注意到表达式

$$(x^2y-1)dy-(xy^2-1)dx$$

具有积分因子 $(x-y)^{-4}$，则可以指出原方积的另一种积分方法.

D. Mitrinovitch, *Universitet u Beogradu Publikacije elektrotehnickog fakulteta, ser. mat. i fiz.*, 27 (1959), p.1—4.——俄译本编者注.]

1.253. $(x^2y-1)y'+8(xy^2-1)=0$;

方程 1.265 的特殊情况.

1.254. $x(xy-2)y'+x^2y^3+xy^2-2y=0.$

假设 $u(x)=xy$，则得到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{x}=0,$$

因而

$$\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln x=C.$$

1.255. $x(xy-3)y'+xy^2-y=0.$

除以 xy，则得到全微分方程.

$$xy-\ln xy^3=C.$$

1.256. $x^2(y-1)y'+(x-1)y=0;$

可分离变量的方程.

$$y=Cxe^{y+\frac{1}{x}}.$$

1.257. $x(xy+x^4-1)y'=y(xy-x^4-1).$

$$(xy-1)\exp\left(xy+\frac{y^2}{2x^2}\right)=C.$$

S. Sispánov, *Bol. mat.* 11(1938), p. 200—206.

1.258. $2x^2yy'+y^2=2x^3+x^2.$

假设 $u(x)=y^2-x^2$，则得到可分离变量的方程

$$x^2u'+u=0, \qquad 因而 \quad u=Ce^{\frac{1}{x}}.$$

1.259. $2x^2yy'-y^2=x^2e^{x-\frac{1}{x}}.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程 1.134，其中变量 y 换为变量 u.

1.260. $(2x^2y+x)y'-x^2y^3+2xy^2+y=0.$

除以 x^3y^3，则得到全微分方程.

$$\frac{1}{x^2y^2}+\frac{4}{xy}+2\ln x=C.$$

1.261. $(2x^2y-x)y'-2xy^2-y=0.$

此方程可以写为下列形式：

$$2\frac{d}{dx}\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{(xy)'}{x^2y^2}.$$

因此得到

$$2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{1}{xy}=C \quad 和 \quad y=0.$$

1.262. $(2x^2y-x^3)y'+y^3-4xy^2+2x^3=0$；齐次方程.

$$C_1(y-2x)^2x^2+C_2(y^2-x^2)=0,$$

其中 $|C_1|+|C_2|>0$.

1.263. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$；全微分方程.

$$x^3y^2+7x=C.$$

1.264. $2x(x^3y+1)y'+(3x^3y-1)y=0$；

方程1.328的特殊情况.

$$3x^{\frac{21}{8}}y^{\frac{7}{4}}+7x^{-\frac{3}{8}}y^{-\frac{3}{4}}=C.$$

1.265. $(x^{n(n+1)}y-1)y'+2(n+1)^2x^{n-1}(x^{n^2}y^2-1)=0$；

见6.102(4).

1.266. $(y-x)\sqrt{x^2+1}\,y'=a\sqrt{(y^2+1)^3}$.

假设 $y=\dfrac{x+\mathrm{tg}u}{1-x\mathrm{tg}u}$，则得到

$$u+\mathrm{arctg}x+a\int\frac{du}{\sin u-a}=C.$$

1.267. $yy'\sin^2x+y^2\cos x\sin x=1$.

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程

$$u'+2u\,\mathrm{ctg}x=\frac{2}{\sin^2x}, \quad 因而\ y^2=\frac{2x+C}{\sin^2x}.$$

1.268. $f(x)yy'+g(x)y^2+h(x)=0$.

假设 $u(x)=y^2$，则得到线性方程

$$fu'+2gu+2h=0.$$

1.269. $[g_1(x)y+g_0(x)]y'=\sum_{\nu=0}^{3}f_\nu(x)y^\nu$；

见第一部分4.11节.

1.270. $(y^2-x)y'-y+x^2=0$;

全微分方程.

$$y^3+x^3-3xy=C.$$

1.271. $(y^2+x^2)y'+2x(y+2x)=0$;

全微分方程和齐次方程.

$$y^3+4x^3+3x^2y=C.$$

1.272. $(y^2+x^2)y'-y^2=0$;齐次方程.

$$\ln y+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=C.$$

1.273. $(y^2+x^2+a)y'+2xy=0$;

全微分方程.

$$y^3+3x^2y+3ay=C.$$

1.274. $(y^2+x^2+a)y'+2xy+x^2+b=0$;

全微分方程.

$$y^3+x^3+3(x^2y+ay+bx)=C.$$

1.275. $(y^2+x^2+x)y'-y=0$.

除以 x^2+y^2,则得到全微分方程.

$$y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C.$$

1.276. $(y^2-x^2)y'+2xy=0$;齐次方程.

$$y=C(x^2+y^2).$$

1.277. $(y^2+x^4)y'-4x^3y=0$.

假设 $y=\pm u^2(x)$,则得到齐次方程.由此求得

$$y^2-x^4=Cy \text{ 和 } y=0.$$

1.278. $(y^2+4\sin x)y'=\cos x$.

如果将 y 取作为自变量,然后假设 $u(y)=\sin x$,则得到线性方程

$$u'-4u=y^2,$$

由此得到

$$\sin x=Ce^{4y}-\frac{y^2}{4}-\frac{y}{8}-\frac{1}{32}.$$

1.279. $(y^2+2y+x)y'+(y+x)^2y^2+y(y+1)=0.$

假设 $u(x)=-y\dfrac{y+x}{y+1}$,则得到 $u'=u^2$,因而

$$y+1=y(y+x)(x+C).$$

1.280. $(y+x)^2y'=a^2.$

假设 $u(x)=y+x$,则得到

$$y+x=a\operatorname{tg}\frac{y+C}{a}.$$

1.281. $(y^2\pm2xy-x^2)y'\mp y^2+2xy\pm x^2=0$; 齐次方程。

$$y\pm x=C(y^2+x^2).$$

1.282. $(y+3x-1)^2y'-(2y-1)(4y+6x-3)=0.$

如果假设 $y=v(u)+\dfrac{1}{2}, x=u+\dfrac{1}{6}$, 则括号中的常数项消失;于是,得到齐次方程

$$(v+3u)^2v'=4v(2v+3u),$$

由此

$$\left(y+x-\frac{2}{3}\right)(y-3x)^3=C\left(y-\frac{1}{2}\right)^3.$$

1.283.3 $(y^2-x^2)y'+2y^3-6x(x+1)y-3e^x=0.$

假设 $u(x)=y^3-3x^2y$,则得到线性方程

$$u'+2u=3e^x,$$

由此

$$(y^3-3x^2y)e^{2x}-e^{3x}=C.$$

1.284. $(4y^2+x^2)y'=xy$; 齐次方程。

假设 $y=xu(x)$,则得到

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{4u^3}\right)u'+\frac{1}{x}=0;\quad \ln|y|=\frac{x^2}{8y^2}+C.$$

1.285. $(4y^2+2xy+3x^2)y'+y^2+6xy+2x^2=0$;

全微分方程和齐次方程.

$$4y^3+3xy^2+9x^2y+2x^3=C.$$

1.286. $(2y-3x+1)^2y'-(3y-2x-4)^2=0$;

第一部分4.6节(c)中讨论过的那种类型.

$$(y-4x+6)^5(4y-x-9)^5=C(5y-5x-3).$$

1.287. $(2y-4x+1)^2y'-(y-2x)^2=0$;

第一部分4.6节(c)中讨论过的那种类型.

$$7x-28y+2\ln|7(2x-y)^2-8(2x-y)+2|+$$

$$+\frac{9}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{14x-7y-4-\sqrt{2}}{14x-7y-4+\sqrt{2}}\right|=C.$$

1.288. $(6y^2-3x^2y+1)y'-3xy^2+x^2=0$;

全微分方程.

$$12y^3-9x^2y^2+6y+2x^3=C.$$

1.289. $(6y-x)^2y'-6y^2+2xy+a=0$.

此方程可以写为下列形式:

$$\frac{d}{dx}[(6y-x)^3+x^3+18ax]=0;$$

因而

$$(6y-x)^3+x^3+18ax=C.$$

1.290. $(ay^2+2bxy+cx^2)y'+by^2+2cxy+dx^2=0$;

全微分方程和齐次方程.

$$ay^3+3bxy^2+3cx^2y+dx^3=C.$$

1.291. $[b(\beta y+\alpha x)^2-\beta(by+ax)]y'+a(\beta y+\alpha x)^2-$

$$-\alpha(by+ax)=0,\quad \alpha\beta-b\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0.$$

$y=-\frac{\alpha}{\beta}x$是解．假设$y=-\frac{\alpha}{\beta}x+u(x)$，则得到线性方程

$$\beta(a\beta-b\alpha)u^2\frac{dx}{du}-(a\beta-b\alpha)x=b\beta u-b\beta^2u^2.$$

1.292. $(ay+bx+c)^2y'+(ay+\beta x+\gamma)^2=0$;

见第一部分4.6节(c)．

1.293. $x(y^2-3x)y'+2y^3-5xy=0$.

除以$x^{27}y^{16}$,则得到全微分方程.

$$13x^{-25}y^{-15}-5x^{-26}y^{-13}=C.$$

1.294. $x(y^2+x^2-a)y'-y(y^2+x^2+a)=0$.

假设$u(x)=xy,v(x)=\frac{y}{x}$,则得到

$$(1+v^{-2})v'=au^{-2}u';$$

因而

$$y^2-x^2+a=Cxy.$$

1.295. $x(y^2+xy-x^2)y'-y^3+xy^2+x^2y=0$.

除以x^2y^2，则得到全微分方程．

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\ln xy=C.$$

1.296. $x(y^2+x^2y+x^2)y'=2y^3+2x^2y^2-x^4$.

$y=-\frac{x^2}{2}$是解．假设$u(x)=\frac{1}{2}+\frac{y}{x^2}$并且将$u$取作为自变量,则得到伯努利方程

$$\frac{dx}{du}+\frac{x}{2u}+\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{8u}\right)x^3=0.$$

1.297. $2x(y^2+5x^2)y'+y^3-x^2y=0$;齐次方程.

$$x^{\frac{3}{2}}y^5=C(3x^2+y^2).$$

1.298. $3xy^2y'+y^3-2x=0$.

假设 $u(x)=y^3$,则得到线性方程

$$xu'+u=2x, \text{因而 } y^3=x+\frac{C}{x}.$$

1.299. $(3xy^2-x^2)y'+y^3-2xy=0$;全微分方程。

$$y^3x-x^2y=C.$$

1.300. $6xy^2y'+2y^3+x=0$.

假设 $u(x)=y^3$,则得到线性方程

$2xu'+2u+x=0$, 因而 $4xy^3+x^2=C$.

1.301. $(6xy^2+x^2)y'-y(3y^2-x)=0$.

除以 x^2y,则得到全微分方程。

$$3y^2+x\ln xy=Cx.$$

1.302. $(x^2y^2+x)y'+y=0$.

除以 x^2y^2,则得到全微分方程。

$$xy^2-1=Cxy.$$

1.303. $(xy-1)^2xy'+(x^2y^2+1)y=0$.

假设 $u(x)=xy$, 则得到可分离变量的方程,由此求

$$y^2=C\exp\left(xy-\frac{1}{xy}\right).$$

1.304. $(10x^3y^2+x^2y+2x)y'+5x^2y^3+xy^2-3y=0$.

这是形如 $xh_1(x\cdot y)y'+yg_1(x\cdot y)=0$ 的方程。

所以,根据第一部分4.13节,给定的方程具有积分因子

$$M=\frac{1}{xy(g_1-h_1)}=-\frac{1}{5xy(x^2y^2+1)}.$$

因此,得到

$$4\ln(x^2y^2+1)+\operatorname{arctg}(xy)+2\ln y-3\ln x=C.$$

1.305. $(y^3-3x)y'-3y+x^2=0$; 全微分方程。

$$3y^4-36xy+4x^3=C.$$

1.306. $(y^3-x^3)y'-x^2y=0$；齐次方程。

$$y^3(y^3-2x^3)=C.$$

1.307. $(y^2+x^2+a)yy'+(y^2+x^2-a)x=0.$

全微分方程.此外,还可以利用变换 $u(x)=x^2+y^2$,其解由下列公式给出:

$$(x^2+y^2)^2-2a(x^2-y^2)=C,$$

这是柯文卵形线族的方程.

1.308. $2y^3y'+xy^2-x^3=0$；齐次方程.

乘以 x^2+y^2,则得到全微分方程.

$$(x^2+y^2)^2(2y^2-x^2)=C.$$

1.309. $(2y^3+y)y'-2x^3-x=0.$

全微分方程,同时也是可分离变量的方程。

$$y^4+y^2=x^4+x^2+C.$$

1.310. $(2y^3+5x^2y)y'+5xy^2+x^3=0$；

全微分方程和齐次方程.

$$2y^4+10x^2y^2+x^4=C.$$

1.311. $(20y^3-3xy^2+6x^2y+3x^3)y'-$

$$-y^3+6xy^2+9x^2y+4x^3=0;$$

全微分方程。

$$5y^4-xy^3+3x^2y^2+3x^3y+x^4=C.$$

1.312. $\left(\frac{y^2}{b}+\frac{x^2}{a}\right)(yy'+x)+\frac{a-b}{a+b}(yy'-x)=0.$

假设 $u(x)=x^2,v(x)=y^2(x)$,则得到

$$\frac{\frac{u'}{a}+\frac{v'}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}-1}+\frac{a+b}{2ab}(u'+v')=0;$$

因而

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=C\exp\left[-\frac{a+b}{2ab}(x^2+y^2)\right].$$

1.313. $(2ay^3+3axy^2-bx^3+cx^2)y'-$

$$-ay^3+cy^2+3bx^2y+2bx^3=0.$$

$$ay^3+bx^3+cxy=C(x+y).$$

1.314. $xy^3y'+y^4-x\sin x=0$; 伯努利方程.

$$y^4=\left(\frac{16}{x}-\frac{96}{x^3}\right)\sin x-\left(4-\frac{48}{x^2}+\frac{96}{x^4}\right)\cos x+\frac{C}{x^4}.$$

1.315. $(2xy^3-x^4)y'-y^4+2x^3y=0.$

除以 x^2y^2,则得到全微分方程,由此求得

$$y^3+x^3=Cxy \quad 和 \quad y=0.$$

1.316. $(2xy^3+y)y'+2y^2-4=0.$

将 y 取作为自变量,则得到线性方程

$$\frac{dx}{dy}+\frac{y^3}{y^2-2}x=-\frac{y}{2(y^2-2)};$$

因此

$$2xy^2-4x+1=C\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

1.317. $(2xy^3+xy+x^2)y'+y^2-xy=0.$

除以 xy^2,则得到全微分方程.

$$y^2+\ln|xy|-\frac{x}{y}=C.$$

1.318. $(3xy^3-4xy+y)y'+y^2(y^2-2)=0.$

乘以 $1+xy^2$,则得到全微分方程.

$$x^2y^6-2x^2y^4+2xy^4-4xy^2+y^2=C.$$

1.319. $(7xy^3+y-5x)y'+y^4-5y=0.$

乘以 y^3-5,则得到全微分方程.

$$10xy(y^3-5)^2+2y^5-25y^2=C.$$

1.320. $(x^2y^3+xy)y'=1$.

如果将 y 取作为自变量来代替 x，则得到伯努利方程：

$$\frac{dx}{dy}-yx-y^3x^2=0,$$

因此

$$\frac{1}{x}=2-y^2+C\ \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right).$$

1.321. $(2x^2y^3+x^2y^2-2x)y'=2y+1$.

将 y 取作为自变量，则得到伯努利方程：

$$(2y+1)\frac{dx}{dy}=x^2y^2(2y+1)-2x,$$

因此

$$2y^2-2y+\ln|2y+1|=C-\frac{8}{x(2y+1)}.$$

1.322. $(10x^2y^3-3y^2-2)y'+5xy^4+x=0$； 全微分方程.

$$5x^2y^4-2y^3+x^2-4y=C.$$

1.323. $(axy^3+c)xy'+(bx^3y+c)y=0$.

$$ay^2+bx^2-\frac{2c}{xy}=C.$$

1.324. $(2x^3y^3-x)y'+2x^3y^3-y=0$.

除以 x^3y^3，则得到全微分方程.

$$4(x+y)+\frac{1}{x^2y^2}=C.$$

1.325. $y(y^3-2x^3)y'+(2y^3-x^3)x=0$； 齐次方程.

经过变换 $y=x\,u(x)$，则化为可分离变量的方程，由此得到

$$\ln|x|=-\ln|u-1|+$$
$$+\int\frac{(u+1)^3du}{(u-1)(u^4+u^3+3u^2+u+1)}+C.$$

右端的积分可以借助于变换 $v=u+\frac{1}{u}$来计算；它等于

$$\frac{2}{7}\ln\frac{(v-2)^2}{v^2+v+1}-\frac{2}{7}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2v+1}{\sqrt{3}}.$$

1.326. $y[(ay+bx)^3+bx^3]y'+x[(ay+bx)^3+ay^3]=0.$

除以$(ay+bx)^3$，则得到全微分方程.

$$(ay+bx)^2(x^2+y^2-C)+x^2y^2=0.$$

1.327. $(xy^4+2x^2y^3+2y+x)y'+y^5+y=0.$

除以$(xy^3-1)^2$，则得到全微分方程.

$$y^2+xy=C(xy^3-1).$$

1.328. $ax^2y^ny'-2xy'+y=0.$

将y取作为自变量，则得到伯努利方程.

$$x\left(C+\frac{a}{n+2}y^{n+2}\right)=y^2.$$

1.329. $y^mx^n(axy'+by)+\alpha xy'+\beta y=0$，并且$a\beta-b\alpha\neq0.$

假设

$$A=\frac{m\beta-n\alpha}{a\beta-b\alpha},B=\frac{mb-na}{a\beta-b\alpha},$$

则可得知，当$x>0$和$y>0$时，$u(x)=y^ax^b$和$v(x)=y^\alpha x^\beta$满足下列微分方程：

$$u^{A-1}u'+v^{B-1}v'=0,$$

由此得到

$$\frac{u^A}{A}+\frac{v^B}{B}=C.$$

1.330. $[a(y+x)^b+1]y'+a(y+x)^b=0.$

$$(b+1)y+a(y+x)^{b+1}=C \qquad 当\ b\neq-1\ 时,$$

$$y+a\ln|y+x|=C \qquad 当\ b=-1\ 时.$$

1.330a. $[f(x+y)+1]y'+f(x+y)=0.$

$$y+F(x+y)=C,\ 其中\ F(u)=\int f(u)\,du.$$

1.331. $y'\sum_{\nu=0}^{p} f_\nu(x)\,y^\nu=\sum_{\nu=0}^{q} g_\nu(x)\,y^\nu.$

此方程的分析，见 P Appell, *Journ. de Math.* (4), 5 (1889), p 361—423.

1.332. $(\sqrt{xy}-1)xy'-(\sqrt{xy}+1)y=0.$

此方程可以写为下列形式：

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y}{x}=\frac{(xy)'}{\sqrt{(xy)^3}}.$$

由此得到

$$\ln\frac{y}{x}+\frac{2}{\sqrt{xy}}=C.$$

1.333. $\left(2x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}+x^2y-x\right)y'-x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}+xy^2-y=0.$

除以 $(xy)^{\frac{5}{2}}$，则得到全微分方程。

$$6(xy)^{-\frac{1}{2}}-2(xy)^{-\frac{3}{2}}+3\ln(xy^{-2})=C.$$

1.334. $(\sqrt{y+x}+1)y'+1=0.$

$$y=-x\quad 和\quad y+2\sqrt{y+x}=C.$$

1.335. $\sqrt{y^2-1}\,y'=\pm\sqrt{x^2-1}$；见 1.61.

1.336. $(\sqrt{y^2+1}+ax)\,y'+\sqrt{x^2+1}+ay=0.$

此微分方程可以写为下列形式：

$$\sqrt{y^2+1}\,y'+(axy)'+\sqrt{x^2+1}=0.$$

逐项积分，则得到

$$y\sqrt{y^2+1}+\ln(y+\sqrt{y^2+1})+2axy+x\sqrt{x^2+1}+$$
$$+\ln(x+\sqrt{x^2+1})=C.$$

1.337. $(\sqrt{y^2+x^2}+x)y'=y$；齐次方程.

假设 $\operatorname{sh} u(x)=\frac{x}{y}$，则得到可分离变量的方程

$$(\operatorname{sign} ux+\operatorname{cth} u)u'=\frac{1}{x},$$

因而

$$\operatorname{Arsh}\frac{x}{|y|}-\ln|y|=C.$$

1.338. $[y\sqrt{y^2+x^2}+(y^2-x^2)\sin\alpha-2xy\cos\alpha]y'+$
$$+x\sqrt{y^2+x^2}+2xy\sin\alpha+(y^2-x^2)\cos\alpha=0.$$

假设 $x=r(t)\cos t$，$y=r(t)\sin t$，则由此方程得到

$$[\cos(t+\alpha)+1]r'=-r\sin(t+\alpha),$$

因而

$$r=C[1+\cos(t+\alpha)],$$

或者

$$C(x^2+y^2)=\sqrt{y^2+x^2}-x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

1.339. $[x\sqrt{x^2+y^2+1}-y(x^2+y^2)]y'-$
$$-y\sqrt{x^2+y^2+1}-x(x^2+y^2)=0.$$

除以 $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}$，则得到全微分方程.

$$\sqrt{x^2+y^2+1}+\operatorname{arctg}(x/y)=C.$$

1.340. $\left(e_1\frac{x+a}{r_1^3}+e_2\frac{x-a}{r_2^3}\right)y'-y\left(\frac{e_1}{r_1^3}+\frac{e_2}{r_2^3}\right)=0$；

$$r_1^2=(x+a)^2+y^2,\ r_2^2=(x-a)^2+y^2.$$

这是相应于库伦 (Coulomb) 定律的电力线的方程.

乘以 y，则得到全微分方程. 其通解具有下列形式：

$$e_1\frac{x+a}{r_1}+e_2\frac{x-a}{r_2}=C.$$

1.341. $(xe^y+e^x)y'+e^y+ye^x=0$；全微分方程.

$$xe^y+ye^x=C.$$

1.342. $x(3e^{xy}+2e^{-xy})(xy'+y)+1=0.$

除以 x，则得到

$$(3e^{xy}+2e^{-xy})(xy)'+\frac{1}{x}=0,$$

因而

$$3e^{xy}-2e^{-xy}+\ln|x|=C.$$

1.343. $(\ln y+x)y'=1.$

将 y 取作为自变量，则得到线性方程

$$\frac{dx}{dy}-x=\ln y,$$

因而

$$x=e^y\left(C+\int e^{-y}\ln y\,dy\right).$$

1.344. $(\ln y+2x-1)y'=2y.$

除以 y^2，则得到全微分方程.

$$2x+\ln y=Cy.$$

1.345. $x(2x^2y\ln y+1)y'=2y.$

将 y 取作为自变量，则得到伯努利方程

$$2y\frac{dx}{dy}=2x^3y\ln y+x;$$

$$2y+x^2y^2(2\ln y-1)=Cx^2.$$

1.346. $x(y\ln xy+y-ax)y'=y(ax\ln xy-y+ax).$

$$y=ax+\frac{C}{\ln xy}.$$

1.347. $y'(1+\operatorname{sh}x)\operatorname{sh}y+\operatorname{ch}x(\operatorname{ch}y-1)=0$；全微分方程

$$(\operatorname{sh}x+1)\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x=C.$$

1.348. $(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x)y'+y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y=0$；全微分方程.

$$y\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}y=C.$$

1.349. $xy'\operatorname{ch}\frac{y}{x}+2x\operatorname{sh}\frac{y}{x}-y\operatorname{ch}\frac{y}{x}=0$； 齐次方程.

令 $xu(x)=y$，则得到

$$u'\operatorname{cth}u=-\frac{2}{x},$$

因而

$$x^2\operatorname{sh}\frac{y}{x}=C.$$

1.350. $y'\cos y-\cos x\sin^2y-\sin y=0.$

假设 $u(x)=\sin y$，则得到伯努利方程

$$u'-u^2\cos x-u=0;\ \frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}.$$

1.351. $y'\cos y+x\sin y\cos^2y-\sin^3y=0.$

假设 $u(x)=\operatorname{tg}y$，则得到伯努利方程

$$u'+xu-u^3=0,$$

因此

$$\operatorname{ctg}^2y=e^{x^2}\left(C-2\int e^{-x^2}dx\right).$$

1.352. $y'(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y+$

$$+(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x=0;$$

全微分方程.

$$2(y+x)+\sin 2y+\sin 2x-4\sin\alpha\sin y\sin x=C;$$

因此，例如，$y=\alpha-x$ 是解。

1.353. $xy'\cos y+\sin y=0$；全微分方程。

$$x\sin y=C.$$

1.354. $(x\sin y-1)y'+\cos y=0$.

将 y 取作为自变量，则得到线性方程

$$\cos y\frac{dx}{dy}+x\sin y=1,\text{因此 } x=\sin y+C\cos y.$$

1.355. $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$；全微分方程。

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

1.356. $(x^2\cos y+2y\sin x)y'+2x\sin y+y^2\cos x=0$；全微分方程。

$$x^2\sin y+y^2\sin x=C.$$

1.357. $xy'\ln x\cdot\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$.

假设 $u(x)=\cos y$，则得到伯努利方程

$$xu'\ln x+u(xu-1)=0,$$

假设 $v(x)=\frac{1}{u}$，则由此得到线性方程

$$xv'\ln x+v=x,$$

由此方程求得

$$(x+C)\cos y=\ln x.$$

1.358. $y'\sin y\cos x+\cos y\sin x=0$；可分离变量的方程。

$$\cos x\cos y=C.$$

1.359. $3y'\sin x\sin y+5\cos x\cos^3 y=0$；可分离变量的方程。

$$\frac{1}{\cos^2 y}=C-\frac{10}{3}\ln\sin x.$$

1.360. $y'\cos^2 ay=$

$$=b(1-c\cos ay)\sqrt{\cos^2 ay-(1-c\cos ay)^2}.$$

假设 $u(x)=(\cos ay)^{-1}-c$，则得到

$$u'=\pm abu(u+c)\sqrt{(1-u^2)[(u+c)^2-1]}.$$

此方程的解可以通过椭圆函数来表示，关于这些解的研究，见W Müller, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 10 (1930), p 241以及以后.

1.360a. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+a\right)y'=y\left(\cos^2\frac{x}{2}-y+a+1\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

假设 $y(x)=\frac{\xi}{\eta(\xi)}$，$\xi=\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}$，则得到线性方程

$$(a\xi+1)\eta'+\eta=\xi;$$

其解为：

$$\eta=\frac{\xi-1}{a+1}+C\,(a\xi+1)^{-\frac{1}{a}}.$$

1.361. $[x\sin xy+\cos(x+y)-\sin y]y'+$

$$+y\sin xy+\cos(x+y)+\cos x=0;$$

全微分方程.

$$\cos xy-\sin(x+y)-\cos y-\sin x=C.$$

1.362. $(x^2y\sin xy-4x)y'+xy^2\sin xy-y=0.$

假设 $u(x)=xy$，则得到

$$\frac{d}{dx}(\cos u+\ln u^4)=\frac{3}{x},$$

因此

$$\cos xy+\ln xy^4=C.$$

1.363. $(xy'-y)\cos^2\frac{y}{x}+x=0$；齐次方程.

假设 $xu(x)=y$，则得到

$$u'\cos^2 u = -\frac{1}{x},$$

因而

$$\sin\frac{2y}{x}+\frac{2y}{x}+4\ln x = C.$$

1.364. $\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)xy'-$

$$-\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y=0;$$

齐次方程.

$$xy\cos\frac{y}{x}=C.$$

1.365. $[yf(r)-x]y'+y+xf(r)=0$, 其中 $r=x^2+y^2$.

$$\int\frac{f(r)}{r}dr=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

1.366. $f(x^2+ay^2)(ayy'+x)=y-xy'$.

假设 $u(x)=x^2+ay^2$, $v(x)=\frac{x}{y}$, 则得到可分离变量的方程

$$\frac{v'}{v^2+a}=\frac{f(u)}{2u}u',$$

因此

$$\int\frac{dv}{v^2+a}=\int\frac{f(u)}{2u}du.$$

1.367. $f(x^c y)(bxy'-a)=x^a y^b(xy'+cy)$.

假设 $u(x)=x^{-a}y^b$, $v(x)=x^c y$, 则得到可分离变量的方程

$$u^{-\frac{2bc}{a+bc}}u'=v^{\frac{2ab}{a+bc}-1}\frac{v'}{f(v)}.$$

368—517. 对于 y' 的二次微分方程

1.368. $y'^2+ay+bx^2=0$.

为了解此方程，将其改写为下列形式：

$$y=\alpha y'^2+\beta x^2,$$

并对这个方程采用第一部分4.15节(a)的方法.这时，得到方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\alpha t}{t-2\beta x}.$$

这个方程是齐次的，其解可以由初等函数来表示.解出这个方程以后，我们便得到原方程的参数形式的解.

1.369. $y'^2+y^2=a^2$.

由此方程解出 y'，则得到两个可分离变量的方程.由这两个方程求出

$$y=a\frac{1-C^2}{1+C^2}\sin x+a\frac{2C}{1+C^2}\cos x,$$

此外还有 $y=\pm a$, $y=-a\sin x$.

1.369a. $y'^2=ay^2+b$, $a\neq0$, $b\neq0$.

由此方程解出 y'，则得到两个可分离变量的方程.由这两个方程得到下列解：

如果 $a=\alpha^2$, $b=\alpha^2\beta^2$, 则有 $y=\beta\operatorname{sh}\alpha(x+C)$,

如果 $a=\alpha^2$, $b=-\alpha^2\beta^2$, 则有 $y=\beta\operatorname{ch}\alpha(x+C)$,

如果 $a=-\alpha^2$, $b=\alpha^2\beta^2$, 则有 $y=\beta\cos\alpha(x+C)$.

1.370. $y'^2+y^2=f^2(x)$.

此方程可以化为阿贝耳方程. 假设 $y=f\sin u(x)$，则得到1.202型的方程

$$fu'+f'\operatorname{tg}u=\pm f.$$

1.371. $y'^2=y^3-y^2$.

由此方程解出 y'，则得到可分离变量的方程，由这个方程求出 y 的下列可能的解：

$$0;\ 1;\ \left(\cos\frac{x+c}{2}\right)^{-2}.$$

1.372. $y'^2-4y^3+ay+b=0$.

$$x=C+\int\frac{dy}{\sqrt{4y^3-ay-b}},$$

即$y=\mathscr{P}(x+C)$, 其中$\mathscr{P}(x)$是具有不变量$g_2=a$, $g_3=b$的外尔斯特拉斯函数.

Whittaker 和 Watson, 437,491 以及以后.

1.373. $y'^2+a^2y^2(\ln^2y-1)=0$.

假设$u(x)=\ln y$, 则得到可分离变量的方程

$$u'^2=a^2(1-u^2),$$

因此

$$y=\exp\sin a(x+C)，以及 y=e 和 y=\frac{1}{e}.$$

1.374. $y'^2-2y'-y^2=0$.

由此方程解出y'，则得到可分离变量的方程，并且

$$1\mp\sqrt{y^2+1}+y\ln(\sqrt{y^2+1}\pm y)=y(x+C).$$

1.375. $y'^2+ay'+bx=0$, $b\neq0$.

由此方程解出x， 并且采用第一部分4.15节的结果,则得到参数形式的解

$$bx=-t^2-at,\quad by=C-\frac{2}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2.$$

1.376. $y'^2+ay'+by=0$, $b\neq0$.

由此方程解出y， 并且应用第一部分4.15节的结果,则得到参数形式的解

$$bx=-2t-a\ln t+C,\quad by=-t^2-at.$$

也可由此方程解出y',于是得到两个可分离变量的方程.

1.377. $y'^2+(x-2)y'-y+1=0$；克莱罗方程.

$$y=C(x-2)+C^2+1 \text{ 和 } y=x-\frac{x^2}{4}.$$

1.378. $y'^2+(x+a)y'-y=0$；克莱罗方程.

$$y=C(x+a)+C^2 \text{ 和 } 4y=-(x+a)^2.$$

1.379. $y'^2-(x+1)y'+y=0$.

由此方程解出 y，则得到第一部分 4.18 节的克莱罗方程，由这个方程得到

$$y=Cx+C(1-C) \text{ 和 } y=\frac{1}{4}(x+1)^2.$$

1.380. $y'^2+2xy'-y=0$.

以 $-y_1(x)$ 代替 $y(x)$，则得到方程 1.381.

1.381. $y'^2-2xy'+y=0$；

拉格朗日 达兰贝尔方程（第一部分 4.19 节）.

$y=0$，$y=\frac{3}{4}x^2$，以及参数表达式

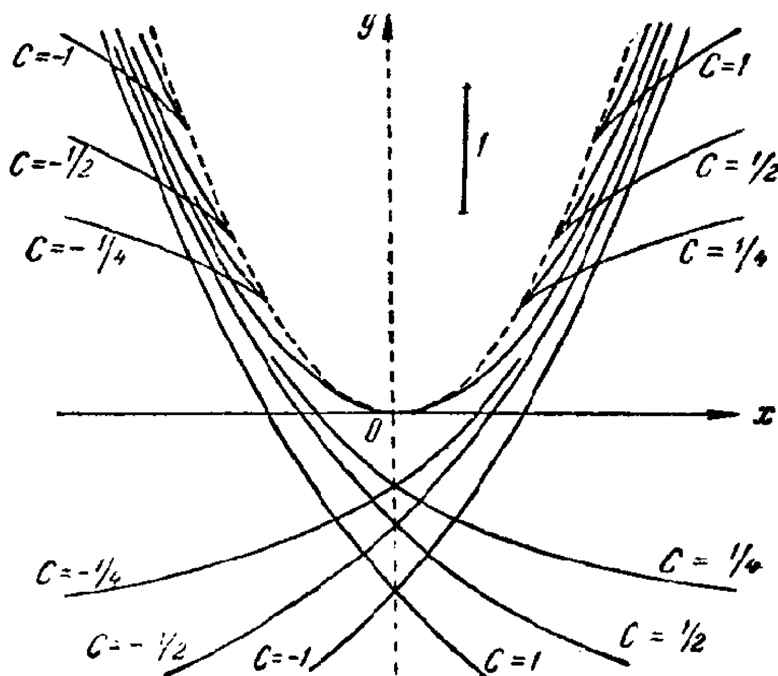


图 29

$$x=\frac{2}{3}t+\frac{C}{t^2},\quad y=2xt-t^2.$$

见图 29.

1.382. $y'^2+axy'=bx^2+c.$

由此方程解出 y'. 当 $a^2+4b>0$ 时，得到

$$y=C-\frac{a}{4}x^2+\frac{x}{4}\sqrt{(a^2+4b)x^2+4c}+$$

$$+\sqrt{\frac{c}{4a^2+b}}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{4c}{a^2+4b}}\right).$$

当 $a^2+4b<0$ 时，此方程可类似地求解.

1.383. $y'^2+axy'+by+cx^2=0.$

此方程可以写为下列形式：

$$\left(y'+\frac{a}{2}x\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-c\right)x^2-by.$$

如果 $b=0$，这个方程不难求解. 如果 $b\neq0$，经过变换 $y=x^2u(x)$，则可化为方程

$$\left(xu'+2u+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-c-bu,$$

假设 $v^2=\frac{a^2}{4}-c-bu$，由此得到可分离变量的方程.

1.384. $y'^2+(ax+b)y'-ay+c=0$, $a\neq0$；克莱罗方程.

$$y=(ax+b)C+aC^2+\frac{c}{a}\ \text{和}\ 4ay=4c-(ax+b)^2.$$

1.385. $y'^2-2x^2y'+2xy=0$；见 1.404.

1.386. $y'^2+ax^3y'-2ax^2y=0$；广义齐次方程.

假设 $y=\eta(\xi)$, $\xi=x^2$，则得到克莱罗方程

$$\eta=\xi\eta'+2\frac{\eta'^2}{a}.$$

由此得到

$$y=aCx^2+2aC^2 \text{ 和 } 8y=-ax^4.$$

1.387. $y'^2+(y'-y)e^x=0.$

经过变换 $y=e^x u(x)$, 则化为可分离变量的方程

$$u'=-\frac{1}{2}(2u+1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4u+1}.$$

1.388. $y'^2-2yy'-2x=0$; 方程 1.390 的特殊情况.

由此方程解出 x ,并且应用第一部分 4.15 节 (b)的结果,则得到解的参数表达式

$$x=\frac{t^2}{2}-yt, \quad y=\frac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(C-\frac{1}{2}\operatorname{Arch}\sqrt{t^2+1}\right).$$

1.389. $y'^2-(4y+1)y'+(4y+1)y=0.$

积分曲线只在半平面 $y\geqslant-\frac{1}{4}$内存在. 假设$2u^2(x)=4y+1$,并且将所得方程对 u' 求解,则得到

$$y=C^2e^{2x}+Ce^x \text{ 和 } y=-\frac{1}{4}.$$

也可由原方程解出 y'; 这时得到可分离变量的方程.

1.390. $y'^2+ayy'=bx+c.$

对 x 微分,将 y 取作为自变量, 并且假设 $y'(x)=p(y)$, 则得到

$$(ay+2p)pp'+ap^2-b=0,$$

由此得到线性方程

$$(ap^2-b)\frac{dy}{dp}+apy+2p^2=0.$$

$c=0$ 的情况,见 1.405.

1.391. $y'^2+(ay+bx)y'+abxy=0.$

此方程可以写为下列形式:

$$(y'+ay)(y'+bx)=0;$$

因而，可以分解为两个方程.

1.392. $y'^2 - xyy' + y^2 \ln ay = 0.$

由此方程解出 x，并且应用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$ay = \exp(Cx - C^2) \quad \text{和} \quad ay = \exp\frac{1}{4}x^2.$$

1.393. $y'^2 + 2yy'\operatorname{ctg}x - y^2 = 0.$

解出 y'，则得到可分离变量的方程，由此方程求出

$$y(1 \pm \cos x) = C.$$

1.394. $$y'^2 + 2fyy' + gy^2 = (g - f^2)\exp\left(-2\int_a^x f dx\right),$$

$f = f(x)$, $g = g(x)$；方程 1.395 的特殊情况.

$$y = U\exp\left(-\int_a^x f dx\right);$$

这时

$$U = \begin{cases} \sin\left(\int_a^x \sqrt{g - f^2}\, dx + C\right) & \text{当 } g > f^2 \text{ 时，} \\ C & \text{当 } g \equiv f^2 \text{ 时，} \\ \operatorname{ch}\left(\int_a^x \sqrt{f^2 - g}\, dx + C\right) & \text{当 } g < f^2 \text{ 时.} \end{cases}$$

1.395. $y'^2 + 2f(x)yy' + g(x)y^2 + h(x) = 0.$

经过变换

$$y(x) = \eta(\xi)\exp\left(-\int f dx\right), \quad \xi = \int \sqrt{\pm(g - f^2)}\, dx$$

则得到

$$\eta'^2 \pm \eta^2 = \frac{\pm h}{f^2 - g}\exp\left(2\int f dx\right);$$

只是在右端 x 还应通过 ξ 来表示.

D Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* 3 (1934), p 172; *Acad Serbe* 1 (1933), p 107—117; 2 (1935), p 61—65.

对于此方程的解 $y(x)$, 如果假设 $\lambda(x)=\frac{y}{y'}$, 则由方程得到

$$y'=\left(\frac{-h}{1+2f\lambda+g\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad y=\lambda\left(\frac{-h}{1+2f\lambda+g\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

第一个等式右端应当是第二个等式右端的导数. 这就得到对于 λ 的阿贝耳方程(第一部分, 4.11 节)

$$(1+f\lambda)\lambda'=\sum_{\nu=0}^{3}g(x)\lambda^{\nu}.$$

T Peyovitch. *Publications math Belgrade* 5 (1936), p 39—43. D S Mitrinovitch. *C. R. Paris* 204 (1937), p 1706—1708.

也可参阅 1.461.

1.396. $y'^2+y(y-x)y'-xy^3=0.$

解出 y', 则得到方程

$$y'=xy \quad 和 \quad y'=-y^2,$$

由这些方程求出

$$y=C\exp\frac{1}{2}x^2 \quad 和 \quad y=\frac{1}{x+C}.$$

1.397. $y'^2-2x^3y^2y'-4x^2y^3=0.$

经过变换 $y^{-1}=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{2}x^2$, 则化为克莱罗方程

$$\eta=\xi\eta'+\frac{1}{4}\eta'^2.$$

因此，得到

$$y=0,\quad yx^4+4=0,\quad (Cx^2+C^2)y=1.$$

1.398. $y'^2-3xy^{\frac{2}{3}}y'+9y^{\frac{5}{3}}=0.$

可由此方程解出 x，然后利用第一部分4.15节(b)的结果. 但是，采用变换 $y=u^3$ 则更为简单. 这时得到克莱罗方程

$$u=xu'-u'^2,$$

由此求出

$$y=(Cx-C^2)^3,\quad 以及\quad y=\left(\frac{x}{2}\right)^6.$$

1.399. $2y'^2+(x-1)y'=y$；克莱罗方程.

$$y=Cx+C(2C-1)\quad 和\quad 8y=-(x-1)^2.$$

1.400. $2y'^2-2x^2y'+3xy=0$；广义齐次方程.

假设 $y=x^3\eta(\xi)$，$\xi=\ln|x|$，以及 $u(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt{1-6\eta}$，则得到可分离变量的方程

$$4uu'+6u^2\pm3u=0,$$

因此

$$(3y+C)^2=2Cx^3\quad 和\quad y=\frac{x^3}{6}.$$

1.401. $3y'^2-2xy'+y=0.$

解出 y'，则得到

$$3y'=x\pm\sqrt{x^2-3y};$$

乘以 $3(x\pm\sqrt{x^2-3y})$，则得到全微分方程

$$x(2x^2-9y)\pm2(x^2-3y)^{\frac{3}{2}}=C.$$

1.402. $3y'^2+4xy'-y+x^2=0.$

假设 $3y=x^2(u^2-1)$，则得到

$$4(xu'+u)^2=1,$$

因而

$$y=-\left(\frac{1}{2}x+C\right)^2+4C^2.$$

1.403. $ay'^2+by'-y=0.$

解出 y，并且利用第一部分4.15节中指出的方法，则得到解的参数表示式

$$x=2at+b\ln t+C,\quad y=at^2+bt.$$

1.404. $ay'^2+bx^2y'+cxy=0$；广义齐次方程.

假设 $y=x^3\eta(\xi)$，$\xi=\ln|x|$，则得到

$$a\eta'^2+(6a\eta+b)\eta'+9a\eta^2+3b\eta+c\eta=0.$$

由此方程解出 η'. 以后，采用积分法便可得到解.

例.

$$y'^2-2x^2y'+2xy=0,$$

$$(3y^2-C)^2=4x^3y^3+4Cx^3(x^3-3y).$$

1.405. $ay'^2+yy'-x=0.$

解出 y，对 x 微分，并且将 $t=y'$ 取作为自变量，则得到线性方程

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t(t^2-1)}+\frac{at}{t^2-1}=0,$$

由此求出参数形式的解：

$$x=\begin{cases}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}(C+a\arcsin t) & \text{当 } |t|<1 \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}(C\mp a\operatorname{arch}(\pm t)) & \text{当 } t\begin{cases}>1\\<-1\end{cases}\text{时},\end{cases}$$

$$y=\frac{x}{t}-at,$$

此外还有

$$y=\pm(x-a).$$

1.406. $ay'^2-yy'-x=0.$

解出 y，对 x 微分，并且将 $t=y'$ 取作为自变量，则得到线性方程

$$\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t(t^2+1)}-\frac{at}{t^2+1}=0,$$

由此求出参数形式的解

$$x=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}[C+a\ln(t+\sqrt{t^2+1})]=$$

$$=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}[C+a\ \mathrm{Arsh}\ t],\quad y=at-\frac{x}{t}.$$

1.407. $xy'^2=y.$

解出 y'，则得到可分离变量的方程.

$y=0$ 和 $(y-x)^2-2C(y+x)+C^2=0.$

1.408. $xy'^2-2y+x=0.$

解出 y，并且利用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=\frac{C}{(t-1)^2}\exp\frac{2}{t-1},\quad y=\frac{x}{2}(t^2+1),$$

此外还有 $$y=x.$$

1.409. $xy'^2-2y'-y=0$; 拉格朗日-达兰贝尔方程.

$$x=\frac{2t-2\ln|t|+C}{(t-1)^2},\ y=xt^2-2t;$$

此外还有，$y=0$, $y=x+2$.

1.410. $xy'^2+4y'-2y=0.$

可以采用第一部分 4.15 节中指出的方法，得到参数形式的解：

$$y=\left(\frac{t}{t-2}\right)^2\left(C+4\ln|t|+\frac{8}{t}\right),\quad x=\frac{2y-4t}{t^2},$$

此外还有 $y=2x+4$.

1.411. $xy'^2+xy'-y=0.$

解出 y，并且利用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$y=0,\text{以及 } x=Ct^2e^t,\ y=C(t+1)e^t.$$

1.412. $xy'^2+yy'+a=0.$

解出 y，则得到拉格朗日-达兰贝尔方程。

$$x=\frac{C}{\sqrt{t}}-\frac{a}{3t^2},\ y=-C\sqrt{t}-\frac{2a}{3t}.$$

1.413. $xy'^2+yy'-x^2=0.$

假设 $y=\sqrt{|x|^3}u(x)$，则得到可分离变量的方程

$$xu'=-2u\pm\frac{1}{2}\sqrt{u^2+4\operatorname{sign}x}.$$

1.414. $xy'^2+yy'+x^3=0.$

假设 $y=x^2u(x)$，则得到可分离变量的方程

$$2xu'=-5u\pm\sqrt{u^2-4},$$

由此

$$(3v^2+8)^5x^{12}=Cv^6,\ \text{其中 } v=-u\pm\sqrt{u^2-4}.$$

1.415. $xy'^2+yy'-y^4=0.$

解出 x，并且利用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$y(x-C^2)=C.$$

1.416. $xy'^2+(y-3x)y'+y=0.$

此方程既可看作齐次方程，又可看作为拉格朗日-达兰贝尔方程．可以求得 $y=0$ 和 $y=x$，以及其余的参数形式的解：

$$xt^{\frac{3}{2}}=C(t+1),\ yt^{\frac{3}{2}}=C(3t-t^2).$$

1.417. $xy'^2-yy'+a=0.$

除以 y'，则得到克莱罗方程

$$y=xy'+\frac{a}{y'},$$

由此

$$y=Cx+\frac{a}{C} \text{ 和 } y^2=4ax.$$

1.418. $xy'^2-yy'+ay=0$.

解出 x，并且利用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到 $y=0$，以及其余的参数形式的解：

$$x=C(t-a)e^{-\frac{t}{a}}, \quad y=Ct^2e^{-\frac{t}{a}}.$$

1.419. $xy'^2+2yy'-x=0$.

假设 $y=xu(x)$，则得到 $xu'+2u=\pm\sqrt{u^2+1}$，然后经过变换 $v(x)=-u\pm\sqrt{u^2+1}$，给出

$$x^3(3v^2-1)^2=Cv^3,$$

因而

$$x^2(x^2+3y^2\pm3y\sqrt{y^2+x^2})^2+C(y\pm\sqrt{y^2+x^2})^3=0$$

或者，等价地，

$$x^2(x^2-3y^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)-C^2=0.$$

1.420. $xy'^2-2yy'+a=0$, $a\neq0$.

解出 y，则得到拉格朗日-达兰贝尔方程。其解可以表示为参数形式

$$x=Ct+\frac{a}{3t^2}, \quad y=\frac{xt}{2}+\frac{a}{2t}$$

或者表示为下列形式：

$$16ax^3-12x^2y^2-12Caxy+8Cy^3+C^2a^2=0;$$

此外还有，$y=\pm2\sqrt{ax}$.

1.421. $xy'^2-2yy'-x=0$；齐次方程。

积分曲线是抛物线

$$y=\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{2C}.$$

1.422. $xy'^2-2yy'+4x=0.$

假设 $y=2xu(x)$，则得到

$$x^2u'^2=u^2-1,$$

因而

$$y=Cx^2+C^{-1}\ 和\ y=\pm 2x.$$

1.423. $xy'^2-2yy'+2y+x=0.$

对 x 微分，将所得到的方程乘以 x，减去原方程，则得到

$$2(xy''-y'+1)(xy'-y)=0.$$

此方程可以分解为两个方程，其中每一个都不难求解。于是得到

$$y=\frac{1}{2}Cx^2+x+\frac{1}{C}\ 和\ y=x(1\pm\sqrt{2}).$$

1.424. $xy'^2+ayy'+bx=0$；齐次方程。

由此方程解 y，并且利用第一部分 4.15 节(a)中指出的方法。如果 $a\neq -1$，则有

$$x=Ct|(a+1)t^2+b|^{-\frac{a+2}{2(a+1)}},\quad y=-\frac{x}{at}(t^2+b);$$

这时还可能有另外一些解，为了可以采用上述方法，作了一些必要的假设，从而失去了这一些解（见第一部分 4.14 节）。特别是，如果 $a=-2$，则得到

$$y=Cx^2+\frac{1}{4C},此外,当\ b>0\ 时还有\ y=\pm x\sqrt{b}.$$

当 $a=-1$ 时，

$$x=Ct\exp\left(-\frac{t^2}{2b}\right),\qquad y=x\left(t+\frac{b}{t}\right).$$

1.425. $(x+1)y'^2-(y+x)y'+y=0.$

解出 y，则得到克莱罗方程. 于是求得

$$y=Cx+\frac{C^2}{C-1},$$

以及参数形式的解：

$$x=\frac{2t-t^2}{(t-1)^2},\qquad y=\left(\frac{t}{t-1}\right)^2.$$

1.426. $(3x+1)y'^2-3(y+2)y'+9=0.$

解出 y，则得到克莱罗方程

$$y=xy'+\frac{(y'-3)^2}{3y'};$$

其解为：

$$3Cy=3C^2x+(C-3)^2 \text{ 和 } y^2+4y=12x.$$

1.427. $(3x+5)y'^2-(3y+x)y'+y=0.$

解出 y，则得到克莱罗方程

$$y=xy'+\frac{5y'^2}{3y'-1};$$

其解为：

$$x=-5t\frac{3t-2}{(3t-1)^2},\quad y=\frac{5t^2}{(3t-1)^2},$$

以及

$$y=Cx+\frac{5C^2}{3C-1}.$$

1.428. $axy'^2+(bx-ay+c)y'-by=0.$

解出 y，则得到克莱罗方程

$$y=xy'+\frac{cy'}{ay'+b};$$

其解为：

$$y=Cx+\frac{cC}{aC+b}$$

和

$$x=-\frac{bc}{(at+b)^2},\quad y=xt+\frac{ct}{at+b}.$$

1.429. $axy'^2-(ay+bx-a-b)y'+by=0.$

对于 x 微分，则得到方程

$$(2axy'-ay-bx+a+b)y''=0,$$

此方程可以分解为两个方程，因此，

$$y=Cx+\frac{C(a+b)}{aC-b}, \text{以及}(ay+bx-a-b)^2-4abxy=0.$$

1.430. $(a_2x+c_2)y'^2+(a_1x+b_1y+c_1)y'+$
$+a_0x+b_0y+c_0=0;$

见 1.479.

1.431. $x^2y'^2-y^4+y^2=0.$

解出 y'，则得到可分离变量的方程.

$$\frac{1}{y}=\sin\ln Cx.$$

1.432. $(xy'+a)^2-2ay+x^2=0;a\neq 0.$

可由此方程解出 y，然后利用第一部分 4.15 节的结果. 另一种方法是：经过变换 $2ay-x^2=u^2$，得到

$$xuu'-a(u-a)+x^2=0,$$

然后假设 $u-a=xv(x)$，得到

$$(xv+a)v'+v^2+1=0.$$

将 v 取作为自变量，则得到线性方程，其解为：

$$x=(v^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left[C-a\ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)\right].$$

1.433. $(xy'+y+2x)^2=4(xy+x^2+a)$.

假设 $u=xy+x^2+a$，则得到 $u'=\pm 2\sqrt{u}$.

1.434. $x^2y'^2-2xyy'-x^2=0$；齐次方程.

$$2Cy+x^2=C^2.$$

1.435. $x^2y'^2-2xyy'+y(y+1)-x=0$.

假设 $y=xu(x)$，则得到可分离变量的方程

$$u'=\pm\sqrt{\frac{1-u}{x^3}}.$$

1.436. $x^2y'^2-2xyy'+y^2(1-x^2)-x^4=0$.

假设 $y=xu(x)$，则得到不难求解的方程.

$$y=\pm x\operatorname{sh}(x+C).$$

1.437. $x^2y'^2-(2xy+a)y'+y^2=0$.

此方程是克莱罗方程：

$$(xy'-y)^2=ay'.$$

$$y=Cx\pm\sqrt{aC}\ (aC>0) \qquad 和 \qquad y=-\frac{a}{4x}.$$

1.438. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$；齐次方程.

$$xy=C,\quad x^2y=C.$$

1.439. $x^2y'^2+3xyy'+3y^2=0$.

此方程可以写为下列形式：

$$\left(xy'+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0,$$

所以它只有唯一的解 $y=0$.

1.440. $x^2y'^2+4xyy'-5y^2=0$.

此方程是可分解的方程：

$$(xy'+5y)(xy'-y)=0;$$

其解为：

$$y=C_1x^{-5} \text{ 和 } y=C_2x.$$

1.441. $x^2y'^2-4x(y+2)y'+4y(y+2)=0.$

解出 y'，则得到可分离变量的方程.

$$y=\frac{1}{2}C^2x^2-2Cx \quad \text{和} \quad y=-2.$$

1.442. $x^2y'^2+(x^2y-2xy+x^3)y'+(y^2-x^2y)(1-x)=0.$

假设 $y=xu(x)$，则得到可分解的方程

$$(u'+u)(u'+1)=0,$$

因而，其解为曲线

$$y=0,\ y=-x^2+Cx,\ y=Cxe^{-x}$$

以及可由这些曲线组成的光滑曲线.

1.443. $x(xy'-y)^2=y'.$

利用勒让德变换（第一部分 4.20 节），得到 $Y^2Y'=X$，由此得到参数形式的解：

$$x=Y'=X\left(\frac{3}{2}X^2-C\right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y=XY'-Y=\left(C-\frac{1}{2}X^2\right)\left(\frac{3}{2}X^2-C\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

1.444. $x^2y'^2-y(y-2x)y'+y^2=0.$

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$y(C-x)=C^2,\ \ y=4x,\ \ y=0.$$

1.445. $x^2y'^2+(ax^2y^3+b)y'+aby^3=0.$

此方程是可分解的方程：

$$(y'+ay^3)(x^2y'+b)=0;$$

其解为：

$$\frac{1}{y^2}=2ax+C \quad \text{和} \quad y=\frac{b}{x}+C.$$

1.446. $(x^2+1)y'^2-2xyy'+y^2-1=0$.

解出 y，则得到克莱罗方程.

$$(y-Cx)^2=1-C^2 \quad 和 \quad y^2-x^2=1.$$

1.447. $(x^2-1)y'^2=1$.

由此方程解出 y'.

$$y=\pm \operatorname{Arch} x+C.$$

1.448. $(x^2-1)y'^2=y^2-1$；也可参阅 1.60.

$$x^2+y^2-2Cxy+C^2=1 \quad 和 \quad y=\pm 1.$$

1.449. $(x^2-a^2)y'^2+2xyy'+y^2=0$.

此方程是可分解的方程：

$$(xy'+y+ay')(xy'+y-ay')=0;$$

其解为：

$$(x\pm a)y=C.$$

1.450. $(x^2-a^2)y'^2-2xyy'-x^2=0$.

解出 y，对 x 微分，并且假设 $p(x)=y'$，则得到可分解的方程

$$(xp'-p)(x^2p^2+x^2-a^2p^2)=0,$$

最后求得

$$y=\frac{1}{2C}(x^2-a^2-C^2), \quad 以及 \quad y^2+x^2=a^2 \quad (y\neq 0).$$

1.451. $(x^2+a)y'^2-2xyy'+y^2+b=0$.

对 x 微分，则得到可分解的方程

$$[(x^2+a)y'-xy]y''=0;$$

因而

$$bx^2+ay^2+ab=0 \quad 和 \quad y=C_1x+C_2,$$

$$其中 \ aC_1^2+C_2^2+b=0.$$

1.452. $(2x^2+1)y'^2+(y^2+2xy+x^2+2)y'+2y^2+1=0$.

假设 $u(x)=x+y, v(x)=xy$，则得到

$$v'^2+uu'v'+(1-v)u'^2=0;$$

因而

$$\left(\frac{v'}{u'}\right)^2+u\frac{v'}{u'}+1-v=0.$$

然后进行微分，则有

$$(2v'+uu')(u''v'-u'v'')=0,$$

由此最后得到

$$xy+C(x+y)=C^2+1, \text{ 以及 } x^2+y^2+6xy=4.$$

1.453. $(a^2-1)x^2y'^2+2xyy'-y^2+a^2x^2=0.$

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中的方法，则得到参数形式的解：

$$x=C(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(t+\sqrt{t^2+1})^{-\frac{1}{a}}, y=xt+ax\sqrt{t^2+1}.$$

1.454. $ax^2y'^2-2axyy'+y^2-a(a-1)x^2=0$；齐次方程。

此方程可以写为下列形式：

$$a(xy'-y)^2=a(a-1)x^2+(a-1)y^2.$$

假设 $y=xu(x)$，则得到可分离变量的方程，由此方程求出

$$y\pm\sqrt{y^2+ax^2}=Cx^{1+\alpha}, \quad \text{其中 } \alpha=\sqrt{\frac{a-1}{a}}.$$

1.455. $x^3y'^2+x^2yy'+a=0.$

由此方程解出 y，并对 x 微分。假设 $p(x)=y'$，则得到可分解的方程

$$(x^3p^2-a)(p'x^2+2px)=0,$$

最后得到

$$Cxy=C^2x+a, \text{ 以及 } xy^2=4a.$$

1.456. $x(x^2-1)y'^2+2(1-x^2)yy'+xy^2-x=0.$

假设 $y=xu(x)$，则得到可分离变量的方程

$$x^2(x^2-1)u'^2=1-u^2,$$

由此

$$(y-C)^2=(x^2-1)(1-C^2).$$

1.457. $x^4y'^2-xy'-y=0$; 广义齐次方程.

$$xy=C^2x+C \text{ 和 } 4x^2y=-1.$$

1.458. $x^2(x^2-a^2)y'^2=1$.

由此方程解出 y'.

$$ay=\pm\arccos\frac{a}{x}+C.$$

1.458a. $[(ax+b)^2+c^2]^2(y'^2-n^2a^2)+a^2c^2y^2=0$.

假设

$$y(x)=nc\sqrt{\xi^2+1}\,\eta(\xi),\quad \xi=\frac{ax+b}{c},$$

则得到

$$(\xi^2+1)\eta'^2+2\xi\eta\eta'+\eta^2=1.$$

解出 η，则得到拉格朗日-达兰贝尔方程

$$\eta=-\xi\eta'\pm\sqrt{1-\eta'^2}.$$

例如，此方程具有解 $\eta=\pm1$. 由此得到原方程的两个解:

$$y=\pm n\sqrt{(ax+b)^2+c^2}.$$

1.459. $e^{-2x}y'^2-(y'-1)^2+e^{-2y}=0$.

对于 x 微分并且消去 y. 假设 $p(x)=y'$，则得到可分解的方程

$$[p'+p(p-1)](e^{-2x}p-p+1)=0,$$

由此

$$e^y=Ce^x\pm\sqrt{1+C^2}, \text{ 以及 } e^{2y}+e^{2x}=1.$$

1.460. $(y'^2+y^2)\cos^4x=a^2$.

$y=a(\cos x)^{-1}$ 是解. 借助于等式 $y'=y\operatorname{ctg}u$ 引入

新函数 $u(x)$，则由给定的微分方程得到

$$y\cos^2 x = \pm a\sin u.$$

由此，进行微分，并且借助于上述关系式消去 y 和 y'，则得到方程 1.81，其中变量 y 换为变量 u。

在 Ch E Wilder, *Americ. Math. Monthly* 38(1931), p 17—25，一文中，包有此方程的运动学解释，以及积分曲线的分析．当 a 为自然数时的积分解法，见 J Zbornik, *Akad. Wien* 166(1957), p 42 以及以后．

1.461. $\boldsymbol{Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0}$;

$$A = A(x),\ B = B(x),\ \cdots$$

当 $A=0$ 时，则为阿贝耳方程．

如果行列式

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \equiv 0,$$

则给定的方程可以分解为两个线性方程．

(a) 如果 $A\neq 0,\ \Delta = B^2 - AC \neq 0$，则给定的方程可以写为下列形式：

$$(y' + ay + b)(y' + \alpha y + \beta) = c \quad (c \neq 0).$$

以 $\lambda(x)$ 表示第一个括号．这时，如果 $\lambda\neq 0$，对于给定的方程的每一个解，则有

$$y' + ay + b = \lambda,\quad y' + \alpha y + \beta = \frac{c}{\lambda};$$

因而

$$y = \frac{\lambda^2 - (b-\beta)\lambda - c}{(a-\alpha)\lambda},\quad y' = \frac{\alpha\lambda^2 + (a\beta - \alpha b)\lambda - ac}{(\alpha - a)\lambda}. \tag{1}$$

第一个表达式右端的导数，应当等于第二个表达式

的右端．因此，得到对于函数 $\lambda(x)$ 的阿贝耳方程（第一部分，4.11 节）

$$(\lambda^2+Q)\frac{d\lambda}{dx}=(M\lambda^2+N\lambda+P)\lambda.$$

如果解出此方程，则(1)给出原方程的解，假设对于这个解，采用该方法时所提出的条件成立．

(b)如果 $A\neq 0, \Delta\equiv 0$，则给定的方程具有下列形式：

$(Ay'+By)^2+A(2Dy'+2Ey+F)=0.$

假设

$$\lambda(x)=Ay'+By,$$

则得到

$$y=-\frac{A\lambda^2+2D\lambda+F}{2(AE-BD)}A,\quad y'=\frac{AB\lambda^2+2AE\lambda+BF}{2(AE-BD)},$$

以后同情况(a)一样．

D. S. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* **5**(1936), p. 10—22; *C. R. Paris* **206**(1938), p. 568—570.

1.462. $yy'^2=1.$

由此方程解出 y'．最后得到

$$4y^3=9(x+C)^2.$$

1.463. $yy'^2=e^{2x}.$

假设 $u(x)=y^{\frac{3}{2}}$，则得到 $u'=\pm\frac{3}{2}e^x$，由此求出

$$4y^3=9(e^x+C)^2.$$

1.464. $yy'^2+2xy'-y=0.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到克莱罗方程．

$$y^2=2Cx+C^2.$$

1.465. $yy'^2+2xy'-9y=0$；方程 1.469 的特殊情况．

假设 $u(x)=y^2$，则得到拉格朗日-达兰贝尔方程（第一部分，4.19 节）

$$u=\frac{x}{9}u'+\frac{1}{36}u'^2,$$

由此求出参数形式的解：

$$x=\frac{t}{14}+Ct^{\frac{1}{8}},\quad y^2=\frac{t}{9}x+\frac{t^2}{36}.$$

1.466. $yy'^2-2xy'+y=0$.

解出 y，采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$y^2=2Cx-C^2\ \text{和}\ y=\pm x.$$

另一种方法是：假设 $u(x)=x^2-y^2$；则得到不难求解的方程 $u'^2=4u$。此外，还可以象 1.464 中那样来求解.

1.467. $yy'^2-4xy'+y=0$.

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$y^3=\frac{C}{t(t^2-3)},\quad x=y\frac{t^2+1}{4t},$$

或者，等价地，

$$y^6-3x^2y^4+2Cx(3y^2-8x^2)+C^2=0.$$

1.468. $yy'^2-4a^2xy'+a^2y=0, a\neq0$;

方程 1.469 的特殊情况.

解出 y'，则得到齐次方程；其通解为：

$$y^6-3a^2x^2y^4+6Caxy^2-16Ca^3x^3+C^2=0.$$

1.469. $yy'^2+axy'+by=0$.

由此方程解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法. 如果 $a+b\neq0$，则得到参数形式的解：

$$x^{-2(a+b)}=Ct^{2a}(t^2+b)^{-2(a+b)}(t^2+a+b)^{a+2b},$$

$$(t^2+b)y=-axt.$$

如果 $2a+b=0, a\geqslant0$，则 $y=\pm x\sqrt{a}$ 也是解.

经过变换 $u(x)=y^2$，则化为拉格朗日-达兰贝尔方程(第一部分，4.19 节)

$$u'^2+2axu'+4bu=0.$$

1.470. $yy'^2+x^3y'-x^2y=0$.

采用借助于微分的积分法(第一部分，4.14 节)，则得到

$$y^2+Cx^2=C^2.$$

1.471. $yy'^2-(y-x)y'-x=0$.

此方程可以写为下列可分解的方程的形式：

$$(y'-1)(yy'+x)=0.$$

因此，得到的解是：半圆 $x^2+y^2=C^2(y\neq 0)$ 和直线 $y=x+C$，以及可以由这两种类型的曲线的一些部分所组成的曲线。

1.472. $(y+x)y'^2+2xy'-y=0$.

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到 $y=0$，以及参数形式的解：

$$x=C(t^2-1),\quad y=C(2t-1).$$

1.473. $(y-2x)y'^2-2(x-1)y'+y-2=0$.

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到 $y=2$，以及参数形式的解：

$$x=-\frac{1}{t^2}+C\frac{t^2+1}{t^2},\quad y=2\frac{xt(t+1)-t+1}{t^2+1}.$$

1.474. $2yy'^2-(4x-5)y'+2y=0$.

由此方程解出 y，并且采用第一部分 4.15 节(a)中指出的方法。

$$4y^2=(4x-5-C)C \quad 和 \quad y=\pm\left(x-\frac{5}{4}\right).$$

1.475. $4yy'^2+2xy'-y=0$；方程 1.469 的特殊情况。

假设 $u(x)=y^2$，则得到克莱罗方程

$$u=xu'+u'^2,$$

由此得到

$$y^2=Cx+C^2.$$

原方程的任何解，都不对应于克莱罗方程的解$4u=-x^2$.

1.476. $9yy'^2+4x^3y'-4x^2y=0$.

假设 $y^2=\eta(\xi)$，$\xi=x^2$，则得到克莱罗方程

$$\eta=\xi\eta'+\frac{9}{4}\eta'^2.$$

由此求得

$$y^2=2Cx^2+9C^2.$$

1.477. $ayy'^2+(2x-b)y'-y=0$.

作变换 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=2x-b$，然后将 η 看作为自变量，并且假设 $\xi=\eta u(\eta)$，则得到可分离变量的方程

$$\eta^2u'^2=u^2+4a,$$

由此，

$$y^2=C(2x-b+aC);$$

此外还有

$$\pm 2\sqrt{-a}\ y=2x-b \quad 当\ a<0\ 时.$$

1.478. $(ay+b)(y'^2+1)=c, c\neq 0$.

对于每一个解，显然有

$$0\leqslant\frac{ay+b}{c}\leqslant 1.$$

所以，可以选择 $u(x)$，使得

$$ay+b=c\sin^2 u. \tag{1}$$

这时得到

$$2cu'\sin^2 u = \pm a;$$

因而

$$c(u - \sin u \cos u) = \pm ax + C. \qquad (2)$$

(1)和(2)给出参数形式的解(摆线). 此外,如果 $c = k\pi$,则 $y = -\frac{b}{a} + k\pi$ 也是解,其中 k 为整数.

1.479. $(b_2y + a_2x + c_2)y'^2 + (a_1x + b_1y + c_1)y' + a_0x + b_0y + c_0 = 0.$

经过勒让德变换(第一部分 4.20 节),则将此方程化为线性方程

$$[A(X) + XB(X)]Y' - B(X)Y + C(X) = 0,$$

其中

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0,$$
$$C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

J. Hofmann, *Nova Acta Halle* 110(1928); 在这篇文章中详细地研究了奇点附近积分曲线的性质. 也可参阅 W v Dyck, *Abhandlungen München* 26(1914), 第 10 卷 P 36 以及以后.
J Weigel, *Nova Acta Halle* 96(1912), p. 277—343.

1.480. $(ay - x^2)y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0.$

如果 $y'(x) \neq 0$,则可以将 x 看作为 y 的函数.

假设 $x = yu(y)$,则得到

$$(Cy + x)^2 = 4ay.$$

1.481. $xyy'^2 + (y^2 + x^2)y' + xy = 0$; 齐次方程.

由此方程解出 y'. 于是得到

$$y = 0, \quad xy = C, \quad x^2 + y^2 = C^2,$$

以及可由所得曲线组成的光滑曲线.

1.482. $xyy'^2 + (x^2 - y^2 + a)y' - xy = 0.$

假设 $\eta(\xi) = y^2, \xi = x^2$,则得到克莱罗方程

$$\eta=\xi\eta'+a\frac{\eta'}{1+\eta'},$$

而如果 $a\neq0$，则得到共焦点的二次曲线

$$\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{C+a}=1\quad(y\neq0)$$

和坐标轴 $y=0$；当 $a=0$ 时，则得到半圆

$$x^2+y^2=C^2\quad(y\neq0)$$

以及直线

$$y=Cx.$$

1.483. $(2xy-x^2)y'^2+2xyy'+2xy-y^2=0$；齐次方程.

借助于变换 $y=xu(x)$，得到

$$x^2+y^2+2C(x+y)+C^2=0.$$

1.484. $(2xy-x^2)y'^2-6xyy'-y^2+2xy=0$；齐次方程.

此方程可以像方程 1.483 那样来求解. 也可以利用变换 $xy=u(x)$，$y-x=v(x)$. 这时得到

$u'=\pm v'\sqrt{2u}$，而由此

$$2xy=(y-x+C)^2,\ \text{以及}\ y=0.$$

1.485. $axyy'^2-(ay^2+bx^2+c)y'+bxy=0.$

此微分方程是曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

的曲率线的方程，其中

$$a=AB(C-B),\quad b=AB(A-C),\quad c=C(B-A).$$

经过变换 $\eta(\xi)=y^2$，$\xi=x^2$，则化为克莱罗方程

$$(\xi\eta'-\eta)(a\eta'-b)=c\eta'.$$

由此得到

$$(aC-b)y^2=C(aC-b)x^2-cC,$$

以及

$$ay^2=bx^2\pm2x\sqrt{-bc}-c.$$

1.486. $y^2y'^2+y^2-a^2=0$.

由此方程解出 y.

积分曲线是 $y=\pm a$, 圆

$$(x-C)^2+y^2=a^2$$

同水平直径和铅垂直径相交而成的四分之一圆，以及可以由这些曲线组成的可微曲线.

1.487. $y^2y'^2-6x^3y'+4x^2y=0$.

经过变换 $\eta(\xi)=y^3$, $\xi=x^2$, 则化为克莱罗方程

$$\eta=\xi\eta'-\frac{1}{9}\eta'^2.$$

由此方程得到

$$y^3=3Cx^2-C^2,\ \text{以及}\ 4y^3=9x^4.$$

1.488. $y^2y'^2-4ayy'+y^2-4ax+4a^2=0$.

假设 $u(x)=4ax-y^2$, 则得到 $u'^2=4u$, 由此,

$$4ax-y^2=(x+C)^2, \text{以及}\ y^2=4ax.$$

1.489. $y^2y'^2+2xyy'+ay^2+bx+c=0$.

假设 $u(x)=y^2$, 对 x 微分，然后假设 $v(x)=u'$, 则得到对于$\dfrac{dx}{dv}$的线性方程.

1.490. $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2+a=0$.

假设 $u(x)=y^2-x^2$, 则得到不难求解的方程

$$u'^2+8u+4a=0,$$

因而

$$y^2=\frac{1}{2}(C^2-a)-(x+C)^2;$$

此外，当 $a=0$ 时，直线 $y=\pm x$ 也是解.

1.491. $y^2y'^2+2axyy'+(1-a)y^2+ax^2+(a-1)b=0$.

假设 $u(x)=y^2+ax^2-b$, 则得到不难求解的方程

$u'^2=4(a-1)u$, 由此方程求得

$$y^2+ax^2-b=(a-1)(x+C)^2,$$

以及 $y^2+ax^2-b=0$,

如果最后这个方程具有实解.

1.492. $(y^2-a^2)y'^2+y^2=0$;

以 x 轴作为准线的曳物线(追逐线)方程.

由此方程解出 y'. 这时则得到可分离变量的方程,由此方程求出

$$a\ln\left|\frac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C.$$

1.492a. $(y^2-b)y'^2+2(xy-c)y'+x^2-a=0$.

旋转坐标轴,可以使得 c 等于零. 所以考虑方程

$$(y^2-b)y'^2+2xyy'+x^2-a=0. \qquad (1)$$

当 $a=0$, $b>0$ 时,则得到圆 $x^2+(y\pm\sqrt{b})^2=C^2$. 如果 $a>0$, $b=0$, 交换 x 和 y 的位置,则得到圆 $(x\pm\sqrt{a})^2+y^2=C^2$.

当 $a=b=c^2$ 时,则得到圆的渐伸线:

$$x=c[\cos t+(t-t_0)\sin t],\quad y=c[\sin t-(t-t_0)\cos t].$$

当 $a>0$, $b>0$ 时,则得到椭圆的渐伸线:

$$x=\sqrt{a}\left(\cos t+\frac{\sin t}{s}\int s\,dt\right),$$

$$y=\sqrt{b}\left(\sin t-\frac{\cos t}{s}\int s\,dt\right),$$

其中

$$s^2=a\sin^2 t+b\cos^2 t$$

且两个积分中的积分常数相等. 而当 $a>0$, $b<0$ 时, 则得到双曲线的渐伸线:

$$x=\pm\sqrt{a}\left(\operatorname{ch}t-\frac{\operatorname{sh}t}{s}\int s\,dt\right),$$

$$y=\sqrt{-b}\left(\operatorname{sh}t-\frac{\operatorname{ch}t}{s}\int s\,dt\right),$$

其中

$$s^2=a\operatorname{sh}^2t-b\operatorname{ch}^2t.$$

当 $a<0, b>0$ 时，同上面一样，交换 x 和 y 的位置．相应的渐伸线可以利用椭圆积分表逐点建立．

W Heybey, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech* 23 (1943), p. 123 以及以后．

1.493. $(y^2-2ax+a^2)y'^2+2ayy'+y^2=0.$

同与抛物线 $y^2=2ax$ 相切而中心在 x 轴上的圆族正交的轨线的方程．第一个解法是，将此方程看作为方程 1.501 的特殊情况．第二个解法是，将 y 取作为自变量，这时得到方程 1.432，其中变量 x, y 分别换为 y, x．

1.494. $(y^2-a^2x^2)y'^2+2xyy'+(1-a^2)x^2=0.$

由此方程解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=\frac{Ct}{\sqrt{t^2+1}},\quad y=aC-\frac{C}{\sqrt{t^2+1}}.$$

1.495. $[y^2+(1-a)x^2]y'^2+2axyy'+(1-a)y^2+x^2=0.$

假设 $x=r(x)\cos\varphi(x), y=r(x)\sin\varphi(x)$．于是得到

$$\ln r=C\pm\varphi\sqrt{a-1},$$

如果 $a>1$，以及 $r=C$，如果 $a=1$；当 $a<1$ 时，不存在(实的)解．

1.496. $(y-x)^2(y'^2+1)-a^2(y'+1)^2=0.$

解出 $y-x$，并且假设$y'=\operatorname{tg}u(x)$，其中$|u|<\frac{1}{2}\pi$.

于是得到

$$x=\pm a\sin u+C,\ y=\mp a\cos u+C,$$

因而

$(x-C)^2+(y-C)^2=a^2$，此外还有 $y=x\pm a\sqrt{2}$.

1.497. $\boldsymbol{3y^2y'^2-2xyy'+4y^2-x^2=0}$;

方程 1.491 当 $a=-\frac{1}{3}, b=0$ 时的特殊情况.

1.498. $\boldsymbol{(3y-2)^2y'^2+4(y-1)=0}$.

解出 y'. 可以得到

$$y^2-y^3=(x-C)^2.$$

1.499. $\boldsymbol{(1-a^2)y^2y'^2-2a^2xyy'+y^2-a^2x^2=0}$.

此方程可以化为 1.559. 其解是:

$y^2+(x-C)^2=a^2C^2$ 和 $(1-a^2)y^2=a^2x^2$, 其中$|a|<1$.

1.500. $\boldsymbol{(a-b)y^2y'^2-2bxyy'+ay^2-bx^2-ab=0}$.

假设 $u(x)=x^2+y^2$, 则得到克莱罗方程. 由此方程求出

$$x^2+y^2=Cx+b-\frac{a-b}{4a}C^2$$

和 $(a-b)y^2-bx^2=(a-b)b$.

1.501. $\boldsymbol{(ay^2+bx+c)y'^2-byy'+dy^2=0}$.

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法. 从而，给定的方程化为线性方程.

1.502. $\boldsymbol{(ay-bx)^2(a^2y'^2+b^2)-c^2(ay'+b)^2=0}$.

由此方程解出 $ay-bx$，并且对 x 微分；假设 $p(x)=y'$，则得到可分解的方程

$$(ap-b)[(a^2p^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\pm abcp']=0,$$

因此，其解是：直线 $ay-bx=\pm C\sqrt{2}$，以及全等的椭圆族

$$(bx-C)^2+(ay-C)^2=c^2,$$

其中心处于直线 $ay-bx=0$ 上。

1.503. $(b_2y+a_2x+c_2)^2y'^2+(b_1y+a_1x+c_1)y'+$
$$+b_0y+a_0x+c_0=0.$$

利用勒让德变换（第一部分 4.20 节），由此方程得到

$$(b_2X+a_2)^2X^2Y'^2+[2(b_2X+a_2)(c_2-b_2Y)X^2+$$
$$+(b_1X+a_1)X+b_0X+a_0]Y'+$$
$$+(b_2Y-c_2)^2X^2+(c_1-b_1Y)X+c_0-b_0Y=0.$$

1.504. $xy^2y'^2-(y^3+x^3-a)y'+x^2y=0,\ a\neq 0.$

假设 $\eta(\xi)=y^3,\ \xi=x^3$，则得到克莱罗方程。由此方程求出：

$$y^3=C\left(x^3+\frac{a}{C-1}\right),$$

以及 $x^3=\dfrac{a}{(t-1)^2},\ y^3=tx^3+\dfrac{at}{t-1}$.

1.505. $xy^2y'^2-2y^3y'+2xy^2-x^3=0.$

假设 $u(x)=y^2$，则得到可分解的方程

$$(u'-2x)(xu'-4u+2x^2)=0;$$
$$y^2=x^2+C,\ y^2=x^2+Cx^4.$$

1.506. $x^2(xy^2-1)y'^2+2x^2y^2(y-x)y'-y^2(x^2y-1)=0.$

例如函数 $y=x,\ x^{-2},\ x^{-\frac{1}{2}}$ 都是解。假设 $u(x)=x+$

$+y+\dfrac{1}{xy},\ v(x)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，则得到

$$3v'^2-2uu'v'+vu'^2=0.$$

根据 1.401,此方程具有通解

$$u(2u^2-9v)\pm 2(u^2-3v)^{\frac{3}{2}}=C$$

或者

$$3v^2(2u^2+v)+2Cu(2u^2-9v)+9C^2=0.$$

1.507. $(y^4-a^2x^2)y'^2+2a^2xyy'+y^2(y^2-a^2)=0.$

显然,$y=\pm a$ 是解. 为了求出通积分,由此方程解出 x:

$$x=\frac{y}{y'}\pm\frac{y^2}{ay'}\sqrt{y'^2+1},$$

然后采用第一部分 4.15 节中指出的方法,则得到线性方程

$$2p(p^2+1)\frac{dy}{dp}-y=\pm a\sqrt{p^2+1},\text{ 其中 } p(y)=y'(x).$$

此问题的运动学解释,以及按方程本身对积分曲线性质的研究,见Ch. E. Wilder, *Americ. Math. Monthly* 38(1931),p. 17—25

1.508. $(y^4+x^2y^2-x^2)y'^2+2xyy'-y^2=0.$

假设 $y=xu(x)$, 则得到

$$\frac{u'}{u\sqrt{u^2+1}}=\pm y',$$

因此,

$$x=\pm y\,\mathrm{sh}(y+C),\text{ 以及 } y=0.$$

1.509. $9y^4(x^2-1)y'^2-6xy^5y'-4x^2=0.$

假设 $u(x)=y^3$, 则得到

$$(x^2-1)u'^2-2xuu'-4x^2=0.$$

由此方程解出 u,并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法,则得到

$$y^3=C(x^2-1)-\frac{1}{C}.$$

1.510. $x^2(x^2y^4-1)y'^2+2x^3y^3(y^2-x^2)y'-$
$$-y^2(x^4y^2-1)=0.$$

假设 $\eta(\xi)=y^2, \xi=x^2$, 则得到方程 1.506,其中变量 x, y 分别换为变量 ξ, η.

1.511. $(a^2\sqrt{y^2+x^2}-x^2)y'^2+2xyy'+$
$$+a^2\sqrt{y^2+x^2}-y^2=0.$$

假设 $x=r(t)\cos t, y=r(t)\sin t$, 则得到
$$a^2r'^2=r^3-a^2r^2,$$
由此求出
$$r\cos^2\frac{t+C}{2}=a^2.$$

1.512. $[a(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-x^2]y'^2+2xyy'+$
$$+a(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-y^2=0.$$

此方程可以写为下列形式:
$$a(y'^2+1)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=(xy'-y)^2.$$
根据 1.515 ,可以得到心脏线
$$2ar=1+\sin(t+C),$$
其中 $x=r\cos t, y=r\sin t$.

1.513. $y'^2\sin y+2xy'\cos^3 y-\sin y\cos^4 y=0.$

假设 $u(x)=\mathrm{tg}y$, 则得到克莱罗方程 1.464,其中未知函数 y 换为 u.

1.514. $y'^2(a\cos y+b)=c\cos y+d;$

可分离变量的方程.
$$x=\int\left(\frac{a\cos y+b}{c\cos y+d}\right)^{\frac{1}{2}}dy.$$

关于这个积分的计算, 见 Denizot, *Zeitschrift f. Math.*

Phys. 46(1901), p. 471—479.

1.515. $f(x^2+y^2)(y'^2+1)=(xy'-y)^2$.

假设 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 其中 r 和 φ 可以认为是某一个变量 t 的函数，则得到

$$f(r^2)(r'^2+r^2\varphi'^2)=r^4\varphi'^2,$$

因而，当 $t=r$ 时，

$$\varphi=\pm\int\frac{1}{r}\left[\frac{f(r^2)}{r^2-f(r^2)}\right]^{\frac{1}{2}}dr+C.$$

1.516. $(x^2+y^2)f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(y'^2+1)=(xy'-y)^2$.

借助于 1.515 中指出的变换，则可得到

$$\ln r=\pm\int\left[\frac{1-f(\cos\varphi)}{f(\cos\varphi)}\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi+C.$$

1.517. $(x^2+y^2)f\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(y'^2+1)=(xy'-y)^2$.

此方程可以像 1.516 那样来求解。

518—544. 对于 y' 的三次微分方程

1.518. $y'^3=(y-a)^2(y-b)^2$.

经过变换 $u^3(x)=(y-a)(y-b)$, 则化为方程

$$u'^2=\frac{4}{9}\left[u^3+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right].$$

关于这个方程，见 1.72.

1.519. $y'^3=f(x)(ay^2+by+c)^2$.

解出 y'，则得到可分离变量的方程. 也可以假设 $u^3(x)=ay^2+by+c$, 于是得到

$$9u'^2=(4au^3+b^2-4ac)f^{\frac{2}{3}},$$

即仍然是可分离变量的方程. 当进行积分时，将出现椭圆函数.

Ince, 341.

1.520. $y'^3+y'-y=0$.

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=C+\frac{3}{2}t^2+\ln|t|,\quad y=t^3+t.$$

1.521. $y'^3+xy'-y=0$；克莱罗方程.

$$y=Cx+C^3 \text{ 和 } y=2\left(-\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (x<0).$$

1.522. $y'^3-(x+5)y'+y=0$.

此方程可以写为下列形式：

$$y=xy'+y'(5-y'^2),$$

因而是克莱罗方程.

$$y=Cx+C(5-C^2) \text{ 和 } 27y^2=4(x+5)^3.$$

1.523. $y'^3-axy'+x^3=0$, $a\neq 0$.

当 $xy''-y'\neq 0$ 时，表达式$u(x)=\frac{y'}{x}$是 x 的单调函数，所以可以把 x 表示为 u 的函数. 当 $u\neq -1$ 时，得到

$$x=\frac{au}{u^3+1}.$$

因此

$$\frac{dy}{du}=y'(x)\frac{dx}{du}=a^2\frac{u^2(1-2u^3)}{(u^3+1)^3}.$$

于是得到参数形式的解

$$x=\frac{au}{u^3+1},\quad y=C+\frac{a^2}{6}\frac{4u^3+1}{(u^3+1)^2}.$$

不存在其他的解.

1.524. $y'^3-2yy'+y^2=0$.

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=C\pm3\sqrt{1-t}+2\ln(1\mp\sqrt{1-t}),$$

$$y=t(1\pm\sqrt{1-t}).$$

1.525. $y'^3-axyy'+2ay^2=0$.

对 x 微分，并且消去 y, 则得到对于 $p(x)=y'$的可分解的方程

$$(2p'^2-axp'+ap)(9p-ax^2)=0.$$

由第一个因子得到克莱罗方程. 最后得到

$$y=\frac{a}{4}C(x-C)^2,\ \text{以及}\ y=\frac{a}{27}x^3.$$

1.526. $y'^3-(y^2+xy+x^2)y'^2+(y^3x+y^2x^2+yx^3)y'-$
$-x^3y^3=0$.

此方程可以写为可分解的方程

$$(y'-x^2)(y'-y^2)(y'-xy)=0.$$

由此得到

$$y=\frac{1}{3}x^3+C,\quad y=-\frac{1}{x+C},\quad y=C\exp\frac{x^2}{2}.$$

1.527. $y'^3-xy^4y'-y^5=0$.

假设 $u(x)=\frac{1}{y}$,对 x 微分。然后，假设 $v(x)=u'$,

则得到方程

$$(3v^2-x)v'=0;$$

最后求得

$$y=\frac{C^3}{C^2x-1}, 4x^3y^2=27, y=0.$$

1.528. $y'^3+ay'^2+by+abx=0$.

解出 y 或解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$2bx=-3t^2+2at-2a^2\ln(t+a)+C,$$
$$by=-abx-t^3-at^2;$$

此外，$y=-ax$ 也是解。

1.529. $y'^3+xy'^2-y=0$；拉格朗日-达兰贝尔方程。

$$x=-\frac{1}{2}-t+\frac{C}{(t-1)^2}, \quad y=-\frac{1}{2}t^2+\frac{Ct^2}{(t-1)^2};$$

此外，$y=0$ 和 $y=x+1$ 也是解。

1.530. $y'^3-yy'^2+y^2=0$.

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$x=t\pm r\mp\ln|r+t-2|+C, y=\frac{1}{2}t^2\pm\frac{1}{2}rt,$$

其中 $r^2=\sqrt{t^2-4t}$.

1.531. $y'^3-(y^4+xy^2+x^2)y'^2+$
$+(xy^6+x^2y^4+x^3y^2)y'-x^3y^6=0$.

此方程可以写为下列形式：

$$(y'-x^2)(y'-xy^2)(y'-y^4)=0.$$

由此得到

$$3y-x^3=C; \quad x^2y+2=Cy; \quad 3xy^3+1=Cy^3.$$

1.532. $ay'^3+by'^2+cy'=y+d$.

利用第一部分 4.17 节(a)中指出的方法，则可得到参数形式的解：

$$x=C+\frac{3a}{2}t^2+2bt+c\ln|t|,\quad y=at^3+bt^2+ct-d.$$

1.533. $xy'^3-yy'^2+a=0.$

此方程可以写为克莱罗方程

$$y=xy'+\frac{a}{y'^2},$$

而具有解

$$y=Cx+\frac{a}{C^2},\quad 4y^3=27ax^2.$$

1.534. $4xy'^3-6yy'^2+3y-x=0.$

解出 y，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$x=C(2t^2-1),\quad 3y=C(4t^3-1).$$

1.535. $8xy'^3-12yy'^2+9y=0.$

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到

$$3Cy^2=(x+C)^3,\text{ 以及 } y=0 \text{ 和 } y=\pm\frac{3}{2}x.$$

1.536. $(x^2-a^2)y'^3+bx(x^2-a^2)y'^2+y'+bx=0.$

此方程可以写为可分解方程的形式：

$$(y'+bx)[y'^2(x^2-a^2)+1]=0.$$

由此得到

$$y=-\frac{1}{2}bx^2+C \text{ 和 } y=\pm\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

1.537. $x^3y'^3-3x^2yy'^2+(3xy^2+x^6)y'-y^3-2x^5y=0.$

此方程可以写为下列形式：

$$(xy'-y)^3=x^5(2y-xy').$$

假设 $y=xu(x)$，则得到克莱罗方程

$$u=xu'+u'^3.$$

1.538. $2(xy'+y)^3-yy'=0$.

假设 $u(x)=xy$, 由所得到的方程解出 u，然后假设 $v(x)=xu'$, 则得到

$$u=\frac{1}{2}v\pm\frac{1}{2}v\sqrt{1-8v}. \tag{1}$$

对 x 微分，求出

$$\frac{2v}{x}=v'\pm\frac{1-12v}{\sqrt{1-8v}}v',$$

因而

$$v(\sqrt{1-8v}-1)\exp 3\sqrt{1-8v}=Cx^2(\sqrt{1-8v}+1). \tag{2}$$

(1)和(2)是参数形式的解.

1.539. $y'^3\sin x-(y\sin x-\cos^2x)y'^2-$

$-(y\cos^2x+\sin x)y'+y\sin x=0$.

此方程是可分解的方程

$$(y'-y)(y'-\sin x)(y'\sin x+1)=0;$$

其解为：

$$y=Ce^x,\quad y=C-\cos x,\quad y=\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

1.540. $2yy'^3-yy'^2+2xy'-x=0$.

此方程可以写为可分解方程的形式：

$$(2y'-1)(yy'^2+x)=0.$$

于是得到

$$y=\frac{1}{2}x+C \text{ 和 } |y|^{\frac{3}{2}}\pm|x|^{\frac{3}{2}}=C,\quad \text{其中 } xy<0.$$

1.541. $y^2y'^3+2xy'-y=0$.

解出 x，假设 $u(y)=\frac{1}{y'}$，并且对 y 微分，则得到

$$(yu'-u)(2y+u^3)=0,$$

因此

$$y^2=2Cx+C^3,\ \ 以及\ 32x^3+27y^4=0.$$

1.542. $\boldsymbol{16y^2y'^3+2xy'-y=0.}$

假设 $u(x)=y^2$, 则得到克莱罗方程

$$u=xu'+2u'^3,$$

由此方程求得

$$y^2=Cx+2C^3\ 和\ 27y^4+2x^3=0.$$

1.543. $\boldsymbol{xy^2y'^3-y^3y'^2+x(x^2+1)y'-x^2y=0.}$

假设 $\eta(\xi)=y^2$, $\xi=x^2$, 则得到克莱罗方程，由此方程求得

$$x^2=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2},\quad y=x^2t+\frac{t}{t^2+1},$$

以及

$$y^2=Cx^2+\frac{C}{C^2+1}.$$

1.544. $\boldsymbol{x^7y^2y'^3-(3x^6y^3-1)y'^2+3x^5y^4y'-x^4y^5=0.}$

假设 $\eta(\xi)=y^3$, $\xi=x^3$, 则得到克莱罗方程，由此方程求得

$$y^3=C^3x^3+C^2\quad 和\quad 3x^2y=\sqrt[3]{4}.$$

545—576．更一般形式的微分方程

1.545. $\boldsymbol{y'^4=(y-a)^3(y-b)^2.}$

假设 $y-a=u^2(x)$, 则得到

$$4u'^2=\pm u(u^2+a-b).$$

关于这个方程，见 1.72.

1.546. $\boldsymbol{y'^4+3(x-1)y'^2-3(2y-1)y'+3x=0.}$

解出 y，则得到拉格朗日-达兰贝尔方程.

1.547. $y'^4-4y(xy'-2y)^2=0$.

解出 x，并且对 x 微分，则得到

$$(2yy''-y'^2)(y'^2-4y^{\frac{3}{2}})=0,$$

由此

$$y=C^2(x-C)^2,\quad 以及\ 16y=x^4.$$

1.548. $y'^6=(y-a)^4(y-b)^3$.

假设 $y-a=u^3(x)$，则得到

$$9u'^2=u^3+a-b.$$

关于这个方程，见 1.72.

1.549. $x^2(y'^2+1)^3=a^2$.

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=aT,\quad y=C-at^3T,\quad T=(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

1.550. $y'^r=ay^s+bx^{\frac{rs}{r-s}}$.

假设 $u(x)=y^{1-\frac{s}{r}}$ 则得到齐次方程

$$\left(\frac{r}{r-s}\right)^r u'^r=a+b\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{rs}{r-s}}.$$

1.551. $y'^n=f^n(x)(y-a)^{n+1}(y-b)^{n-1}$.

借助于等式 $u^n=\pm\dfrac{y-b}{y-a}$ 引入新函数 $u(x)$，则不难得到

$$\frac{y-b}{y-a}=\left(\frac{b-a}{n}\int f\,dx\right)^n.$$

1.552. $y'^n=f(x)g(y)$.

解出 y'，则得到可分离变量的方程. 或者用另一种方法，亦有同样的结果，即作变换

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \xi=\int f^{\frac{1}{n}}dx$$

而得到方程 $\eta'^n=g(\eta)$。

1.553. $ay'^m+by'^n=y$;

第一部分 4.17 节(a)中讨论过的那种类型。

当 $m\neq1, n\neq1$ 时，可得到参数形式的解：

$$x=C+\frac{am}{m-1}t^{m-1}+\frac{bn}{n-1}t^{n-1},\quad y=at^m+bt^n.$$

1.554. $x^{n-1}y'^n-nxy'+y=0$.

对于 x 微分，则得到对于 $p(x)=y'$ 的方程

$$[nxp'+(n-1)p](x^{n-2}p^{n-1}-1)=0$$

由此

$$y=Cnx^{\frac{1}{n}}-C^n,\text{ 以及 }y=(n-1)x^{\frac{1}{n-1}}.$$

J. Rose, *Mathesis* 44(1930), p. 33—36.

1.555. $\sqrt{y'^2+1}+xy'-y=0$; 克莱罗方程。

对于非线性的解，可得到参数方程

$$x=-t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},\ y=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

即此解是半圆 $y=+\sqrt{1-x^2}$, 因为这里 $xt<0$.

1.556. $\sqrt{y'^2+1}-xy'^2+y=0$; 拉格朗日-达兰贝尔方程.

$$x=\frac{\sqrt{t^2+1}-\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C}{(t-1)^2},\quad y=xt^2-\sqrt{t^2+1}.$$

1.557. $x(\sqrt{y'^2+1}+y')-y=0$.

假设 $y=xu(x)$, 则得到

$$2xuu'+u^2+1=0,$$

由此

$$y=+\sqrt{Cx-x^2}.$$

1.558. $ax\sqrt{y'^2+1}+xy'-y=0$.

对 x 微分，并且将 $t=y'$ 取作为自变量，则得到

$$-\frac{a}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{at+\sqrt{t^2+1}}{t^2+1}.$$

给定的方程参数形式的解由方程

$$x^a(t^2+1)^{\frac{1}{2}a}(t+\sqrt{t^2+1})=C,\quad y=xt+ax\sqrt{t^2+1}$$

来确定。

1.559. $y\sqrt{y'^2+1}-ayy'-ax=0.$

由此方程解出 y，对 x 微分，并且借助于原方程消去 x，则得到

$$\frac{d^2}{dx^2}y^2+2=0,$$

由此

$$y=\text{sign}(aC)\sqrt{a^2C^2-(x-C)^2},$$

以及 $y\sqrt{1-a^2}=ax$，当 $|a|<1$ 时。

1.560. $ay\sqrt{y'^2+1}=2xyy'-y^2+x^2.$

假设 $u(x)=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v(x)=\frac{x^2+y^2}{y}$，由此方程得到

$$v'(u)=\frac{v'(x)}{u'(x)}=\pm\frac{v^2}{a}\sqrt{v^2-a^2},$$

因而

$$(u+C)^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{v^2}.$$

其次，由此可知，所有的解满足方程

$$a^2[x+C(x^2+y^2)]^2=(x^2+y^2)^2-a^2y^2$$

或者

$$x^2+y^2=\pm ay.$$

这两个方程中某一个的解是否也满足原微分方程，对于每一种个别情况都应当特别地加以检验.

1.561. $f(x^2+y^2)\sqrt{y'^2+1}=xy'-y$.

假设 $x=r(t)\cos t$, $y=r(t)\sin t$, 则得到

$$t=\int\frac{f(r^2)}{r\sqrt{r^2-f^2(r^2)}}dr.$$

1.562. $a\sqrt[3]{y'^3+1}+bxy'-y=0$;

拉格朗日-达兰贝尔方程.

当 $b\neq1$ 时，得到参数形式的解：

$$x=t^{\frac{b}{1-b}}\left[C+\frac{a}{1-b}\int t^{\frac{2b-1}{b-1}}(1+t^3)^{-\frac{2}{3}}dt\right],$$

$$y=bxt+a\sqrt[3]{1+t^3}.$$

此外，$y=a$ 也是解. 当 $b=1$时，得到克莱罗 方程(第一部分，4.18 节).

1.563. $\ln y'+xy'+ay+b=0$.

如果 $a\neq0$，$a\neq-1$，则由此方程解出 y，并且采用第一部分 4.15 节(a)中指出的方法，得到参数形式的解：

$$x=\frac{1}{at}+Ct^{-\frac{1}{a+1}},\quad y=-\frac{1}{a}(xt+\ln t+b).$$

当 $a=-1$ 时，得到克莱罗方程；此方程具有解

$$y=Cx+\ln C+b \quad 和 \quad y=\ln\left(-\frac{1}{x}\right)+b-1\ (x<0).$$

当 $a=0$ 时，由此方程解出 x，并且采用第一部分 4.17 节(b)中指出的方法，得到参数形式的解：

$$x=-\frac{\ln t+b}{t},\quad y=C+(b-1)\ln t+\frac{1}{2}(\ln t)^2.$$

1.564. $\ln y'+a(xy'-y)=0$; 克莱罗方程.

$$y=Cx+\frac{1}{a}\ln C \text{ 和 } ay+1+\ln(-ax)=0。$$

1.565. $y\ln y'+y'-y\ln y-xy=0.$

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节 (b)中讨论过的方法，则得到参数形式的解：

$$x=\ln\frac{t}{y}+\frac{t}{y}, \quad \ln y-\frac{t^2}{2y^2}-\frac{t}{y}=C.$$

1.566. $\sin y'+y'=x;$

第一部分 4.17 节(b)中讨论过的那种类型。

$$x=t+\sin t, \quad y=\frac{t^2}{2}+t\sin t+\cos t+C.$$

1.567. $a\cos y'+by'+x=0.$

解出 x，并且采用第一部分 4.17 节(b)中指出的方法，则得到参数形式的解：

$$x=-a\cos t-bt, \quad y=C-at\cos t+a\sin t-\frac{b}{2}t^2.$$

1.568. $y'^2\sin y'=y;$

第一部分 4.17 节(a)中讨论过的那种类型。

$$y=t^2\sin t, \quad x=t\sin t-\cos t+C.$$

1.569. $(y'^2+1)\sin^2(xy'-y)=1.$

此方程是克莱罗方程：

$$y=xy'\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{y'^2+1}};$$

其解为：

$$y=Cx\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{C^2+1}} \text{ 和 } x=\frac{1}{t^2+1}, \quad y=xt+\operatorname{arcctg}t.$$

1.570. $(y'^2+1)(\operatorname{arctg}y'+ax)+y'=0, \; a\neq0.$

解出 x，并且采用第一部分 4.15 节中讨论过的方

法，则得到参数形式的解：

$$-ax=\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg}t,\quad -ay=C-\frac{1}{t^2+1}.$$

1.570a. $f(y')=yy'+x.$

关于一个解法，见 W. Heybey, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23(1943), p. 124.

1.571. $ax^nf(y')+xy'-y=0.$

对 x 微分，则得到对于 $p(x)=y'$ 的方程

$$anx^{n-1}f(p)+ax^nf'(p)p'+xp'=0;$$

如果将 p 取作为自变量，则得到伯努利方程

$$\frac{dx}{dp}+\frac{1}{n}\frac{f'(p)}{f(p)}x+\frac{1}{anf(p)}x^{2-n}=0.$$

D. S. Mitrinovitch, *Acad. Serbe* 1 (1933), p. 113 以及以后.

1.572. $(xy'-y)^nf(y')+yg(y')+xh(y')=0.$

借助于勒让德变换

$$y'(x)=X,\ x=Y'(X),\ y(x)=XY'(X)-Y(X),$$

则得到(见第一部分 4.20 节)伯努利方程

$$[Xg(X)+h(X)]Y'-g(X)Y+f(X)Y^n=0.$$

D. S. Mitrinovitch, *Acad. Serbe* 2(1935), p. 62.

1.573. $f(xy'^2)+2xy'-y=0.$

由 1.576 给出解 $[y-f(c)]^2=4Cx.$

1.573a. $f(yy'+x)=y^2(y'^2+1).$

如果 $f(u)$ 连续可微，而 $y(x)$ 二次连续可微，那么对 x 微分，则得到

$$[f'(u)-2yy']u'(x)=0,\ \text{其中}\ u(x)=yy'+x. \quad (1)$$

如果方程(1)中的第一个因子在某一点不等于零，那么这个因子在此点的某一个邻域内也不等于零，因而第二个因子在此邻域内等于零，这意味着：

$u=a$, 即 $2yy'=-2x+2a$, 由此 $y^2=-(x-a)^2+b$. 将得到的表达式代入原方程，可以看出，当 $b=f(a)$时，此表达式是解. 于是,得到解

$$y^2=f(a)-(x-a)^2.$$

如果在某一点 $u'\neq 0$, 则在此点的某一个邻域内,(1)中的第一个因子等于零,因而 $y^2=\int f'(u)\,dx$. 其次，由等式 $f'(u)=2yy'=2(u-x)$得到 $(f''-2)u'=-2$. 所以

$$y^2=\int f'(u)\left[1-\frac{1}{2}f''(u)\right]du=f(u)-\frac{1}{4}f'^2(u)+C.$$

将此函数代入方程，求出 $C=0$. 因此，得到参数形式的解

$$x=u-\frac{1}{2}f'(u),$$

$$y^2=f(u)-\frac{1}{4}f'^2(u),$$

如果$f''(u)\neq 2$.

Maria di Bello. *Rendiconti Napoli* (4),10(1940), p. 111—114.

1.574. $f\left(x-\frac{3}{2}y'^2\right)+y'^3=y.$

经过微分,则得到

$$(1-3y'y'')\left[y'-f'\left(x-\frac{3}{2}y'^2\right)\right]=0.$$

所以

$$y=\left(\frac{2}{3}x-C\right)^{\frac{3}{2}}+f\left(\frac{3}{2}C\right),$$

还可能有

$$y=t^3+f\left(x-\frac{3}{2}t^2\right),\quad f'\left(x-\frac{3}{2}t^2\right)=t.$$

1.575. $y'f(xyy'-y^2)-x^2y'+xy=0$.

不难验证，其解由下列公式给出：

$$(y^2+C)f(C)=Cx^2.$$

由此等式能否得到所有的解，这在每一次都应当单独加以检验。

1.575a. $\Phi(f_x+f_y y', f-x(f_x+f_y y'))=0$, $f=f(x, y)$.

当$f=y$时，得到克莱罗方程；当$f=x^2+y^2$时，得到方程1.573 a。为了得到一般情况下的解，将此方程对x微分。如果Φ_u, Φ_v是函数$\Phi(u, v)$的偏导数，则有

$$(f_x+y'f_y)'(\Phi_u-x\Phi_v)=0.$$

假设第一个因子等于零，则可由方程

$$f(x, y)=Ax+B,\quad 其中\ \Phi(A, B)=0,$$

得到解。进一步还要考察方程

$$\Phi_u(\,.\,.\,)-x\Phi_v(\,.\,.\,)=0$$

是否具有某些解，以及其中那一些满足原方程。

Maria di Bello, *Rendiconti Napoli*(4), 10(1940), p. 281—287.

1.576. $\Phi[f(x, y, y'), g(x, y, y')]=0$.

如果数a, b使得$\Phi(a, b)=0$，并且如果由等式

$$f(x, y, y')=a,\quad g(x, y, y')=b$$

消去y'，便可以得到满足这两个方程的可微函数$y=y(x)$，则$y(x)$显然是方程$\Phi=0$的解。

第二章　二阶线性微分方程

含有代数无理式的方程：61，62，142，263，276.

含有指数函数的方程：7，17—20，33，34，49，51，61，63，90
99，100，109，156，158，283，344.

含有对数函数的方程：127， 156，174，183，279，283， 286，
308，412，413.

含有双曲函数的方程：21，64，65，414，415.

含有三角函数的方程：3—5，8，22—25，66—71，88，91，175，
177，178，217，218，416—438.

含有椭圆函数的方程：26—28，72—74，439—441.

含有任意函数的方程：29，30—32，36，38，75—85，128，163，
180，205，219—221，236，278，303，442—445.

1—90. $ay''+\cdots$

2.1. $y''=0$.

$y=C_1+C_2x$. 基本解：$\frac{1}{2}|x-\xi|$. 所以，对于每一个齐次边值问题，格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=C_1(\xi)+xC_2(\xi)+\frac{1}{2}|x-\xi|,$$

只要格林函数存在，即如果边值问题只有解 $y\equiv 0$.

对于具有斯图姆型条件

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0$$

的边值问题，当 $x\leqslant\xi$ 时，则有

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{(\alpha x-a\alpha-\beta)(\gamma\xi-b\gamma-\delta)}{(b-a)\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma};$$

当 $x\geqslant\xi$ 时，应交换右端分式中的 x,ξ 的位置。

对于具有条件 $y'(a)=0,\ y'(b)=0$ 的边值问题，不存在格林函数，因为 $y=C$ 是此边值问题的非零解。

对于具有条件

$$\alpha y(a)+\beta y(b)=0,\quad \gamma y'(a)+\delta y'(b)=0$$

的边值问题，一般说来，只要格林函数存在，则格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\beta(\gamma+\delta)\xi-\delta(\alpha+\beta)x+a\alpha\delta-b\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{\gamma(\alpha+\beta)x-\alpha(\gamma+\delta)\xi+a\alpha\delta-b\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}.\end{cases}$$

对于具有周期条件

$$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b)$$

的边值问题，$y=C$ 是非零解。所以，对此问题不存在通常意义下的格林函数。广义格林函数具有下列形式：

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi)=\frac{1}{2}|x-\xi|-\frac{(x-\xi)^2}{2(b-a)}-\frac{b-a}{12}.$$

2.2. $y''+y=0$.

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.\ \text{基本解：}\ \frac{1}{2}\sin|x-\xi|.$$

2.3. $y''+y=\sin nx$.

$$y=\begin{cases}y_0-\dfrac{\sin nx}{n^2-1} & \text{当 } n^2\neq 1 \text{ 时},\\[2ex] y_0\mp\dfrac{1}{2}x\cos x & \text{当 } n=\pm 1 \text{ 时},\end{cases}$$

其中

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x=A\sin(x-B).$$

2.4. $y''+y=a\cos bx$.

$$y=\begin{cases}\dfrac{a}{1-b^2}\cos bx+C_1\sin x+C_2\cos x & \text{当 } b^2\neq 1 \text{ 时},\\ \left(\dfrac{1}{2}ax+C_1\right)\sin x+C_2\cos x & \text{当 } b=\pm 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.5. $y''+y=\sin ax\sin bx$.

此方程的右端等于$\frac{1}{2}\Re[e^{(a-b)ix}-e^{(a+b)ix}]$，所以根据第一部分22.2节，求得

$$y=\frac{\cos(a-b)x}{2-2(a-b)^2}-\frac{\cos(a+b)x}{2-2(a+b)^2}+C_1\cos x+C_2\sin x,$$

如果 $|a+b|\neq 1$ 和$|a-b|\neq 1$；当$|a-b|=1$时第一个分式，当$|a+b|=1$时第二个分式，必须换为表达式$\frac{1}{4}x\sin x$.

2.6. $y''-y=0$.

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}=C_1^*\operatorname{ch}x+C_2^*\operatorname{sh}x.$$

基本解：$\frac{1}{2}\operatorname{sh}|x-\xi|$. 所以，对于每一个线性边值问题，一般，只要格林函数存在，即如果齐次边值问题具有唯一解 $y\equiv 0$，则格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=C_1(\xi)e^x+C_2(\xi)e^{-x}+\frac{1}{2}\operatorname{sh}|x-\xi|.$$

例如，当边界条件为 $y'(a)=y'(b)=0$ 时，则有

$$\Gamma(x,\xi)=-\frac{\operatorname{ch}(x-a)\operatorname{ch}(\xi-b)}{\operatorname{sh}(b-a)},\quad \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},$$

而当边界条件为 $y(a)=y(b)$，$y'(a)=y'(b)$时，则有

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{e^{x-\xi+b}+e^{\xi-x+a}}{2(e^a-e^b)}，\text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时.}$$

因为这两个边值问题是自共轭的，所以在两种情况下，交换上述表达式中 x 和 ξ 的位置，即可得到 $x\geqslant\xi$ 时的 $\Gamma(x,\xi)$。

2.7. $y''-2y=4x^2\exp x^2$.

$$y=\exp x^2+C_1\exp x\sqrt{2}+C_2\exp(-x\sqrt{2}).$$

2.8. $y''+a^2y=\operatorname{ctg}ax$.

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{\sin ax}{a^2}\ln\left|\frac{1-\cos ax}{\sin ax}\right|.$$

2.9. $y''+\lambda y=0$.

$$y=\begin{cases} C_1\operatorname{ch}x\sqrt{|\lambda|}+C_2\operatorname{sh}x\sqrt{|\lambda|} & \text{当 } \lambda<0 \text{ 时,}\\ C_1+C_2x & \text{当 } \lambda=0 \text{ 时,}\\ C_1\cos x\sqrt{\lambda}+C_2\sin x\sqrt{\lambda} & \text{当 } \lambda>0 \text{ 时.}\end{cases}$$

在第二部分 9.2 节(a_1)中，有第三类齐次边值问题的特征值和特征函数的近似表达式。

在一些个别的情况下，对于特征值和特征函数，不难求得明显的表达式。

(a) $$y(a)=y(b)=0.$$

$$\text{特征值 } \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 (n=1,2,3,\cdots),$$

特征函数(规范化的)

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin n\pi\frac{x-a}{b-a}.$$

(b) $$y'(a)=y'(b)=0.$$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

特征函数(规范化的)

$$\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{b-a}},\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos n\pi\frac{x-a}{b-a}\quad \text{当 } n\geqslant 1 \text{ 时}.$$

(c) $$y'(a)=\alpha y(a),\quad y'(b)=\alpha y(b)\quad (\alpha\neq 0).$$

λ_n 同(a)中的一样，

$$\varphi_n=\cos n\pi\frac{x-a}{b-a}+\alpha\frac{b-a}{n\pi}\sin n\pi\frac{x-a}{b-a}.$$

(d) $$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b).$$

$$\lambda_n=\left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^2,$$

$$\varphi_n=C_1\cos x\sqrt{\lambda_n}+C_2\sin x\sqrt{\lambda_n}\,(n=0,1,2,\cdots).$$

除 λ_0 以外，所有特征值都是二重的.

(e) $$y(b)=-y(a),\quad y'(b)=-y'(a).$$

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n-1)\pi}{b-a}\right]^2\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\varphi_n=C_1\cos x\sqrt{\lambda_n}+C_2\sin x\sqrt{\lambda_n}.$$

特征值是二重的.

(f) $$y(a)=y(b),\quad y'(a)=-y'(b).$$

此特征值问题不是自共轭的，并且也不是正则的. 每一个 λ 都是特征值，并且是简单的. 特征函数:

$$\varphi=\begin{cases}\cos k\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right) & \text{当}\quad \lambda=k^2 \text{ 时},\\ 1 & \text{当}\quad \lambda=0 \text{ 时},\\ \operatorname{ch}k\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right) & \text{当 } \lambda=-k^2 \text{ 时}.\end{cases}$$

(g) $$cy(0)=y(\pi),\quad y'(0)=cy'(\pi)\quad (c\neq 0,\ \pm 1).$$

所有特征值都是正的，并且由条件

$$\cos\pi\sqrt{\lambda}=\frac{2c}{c^2+1}$$

来确定. 规范化的特征函数:

$$\varphi_{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos[(2n+p)x+\alpha]\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\varphi_{2n-1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos[(2n-p)x-\alpha]\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

其中 α 由条件

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{c^2+1}},\ \sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\operatorname{sign}(1-c),\ -\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$$

来确定,而 p 则由条件

$$\cos p\pi=\frac{2c}{c^2+1},\ (0<p<1)$$

来确定.

(h)边界条件: 当 $|x|\to\infty$ 时函数 $y(x)$ 是有界的. 谱是连续的,每一个正的特征值都是二重的,特征函数是

$C_1\cos x\sqrt{\lambda}+C_2\sin x\sqrt{\lambda}$ 当 $\lambda\geqslant0$ 时.

(i)如果给定微分方程

$$y''-a^2y=0,\quad a>0,$$

具有边界条件"当 $-\infty<x<+\infty$ 时, $y(x)$ 是有界的",则相应的格林函数具有下列形式:

$$\Gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2a}\exp(-a|x-\xi|).$$

2.10. $y''+(ax+b)y=0,\quad a\neq0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=ax+b$, 则得到

$$a^2\eta''+\xi\eta=0.$$

关于此方程的解法,见 2.14 和 2.162(10).

2.11. $y''-(x^2+1)y=0$.

$$y=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_1+C_2\int e^{-x^2}dx\right).$$

在边界条件为"当$|x|\to\infty$时，$y(x)\to 0$"的情况下，格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}I(-\infty,x)I(\xi,\infty)\exp\frac{1}{2}(x^2+\xi^2) & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},\\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}}I(x,\infty)I(-\infty,\xi)\exp\frac{1}{2}(x^2+\xi^2) & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}.\end{cases}$$

其中

$$I(u,v)=\int_u^v e^{-t^2}dt.$$

2.11 a. $y''-(x^2+3)y=0$.

$$y=xe^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_1+C_2\int\frac{1}{x^2}e^{-x^2}dx\right).$$

2.12. $y''-(x^2+a)y=0$.

退化的超几何方程2.273 (11) 的特殊情况，方程2.46的标准形式．假设$y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=x\sqrt{2}$，则得到韦伯方程2.87

$$4\eta''=(\xi^2+2a)\eta,$$

而假设$u(x)=y\exp\frac{x}{2}$，则得到方程2.46

$$u''-2xu'-(a+1)u=0.$$

对于方程

$$y''-(x^2+1)y+\lambda y=0,$$

具有边界条件

$$y\to 0\quad 当|x|\to\infty时,$$

特征值等于 $\lambda_n=2n+2(n=0,1,2,\cdots)$，而规范化的特征函数等于

$$\varphi_n(x)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x),$$

其中H_n是契比雪夫-埃尔米特多项式(见2.46)。

关于上述特征值问题的格林函数，见2.11。

见 Courant-Hilbert, p. 324.

2.13. $y''-(a^2x^2+a)y=0$.

$$y=e^{\frac{1}{2}ax^2}\left[C_1+C_2\int e^{-ax^2}dx\right].$$

2.14. $y''=cx^a y$.

此方程同特殊的黎卡提方程（第一部分，4.8节）以及同贝塞耳方程2.162密切相关. 同方程2.60和方程2.105也很类似.

经过变换 $y(x)=x\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$,此方程化为下列形式:

$$\eta''=c\xi^{-a-4}\eta.$$

当 $a=-2$时,原方程是欧拉方程;其解为:

$$y=\begin{cases} C_1x^{\frac{1}{2}+s}+C_2x^{\frac{1}{2}-s} & 当4c+1>0时, \\ C_1\sqrt{x}+C_2\sqrt{x}\ln x & 当4c+1=0时, \\ C_1\sqrt{x}\cos(s\ln x)+C_2\sqrt{x}\sin(s\ln x) & 当4c+1<0时, \end{cases}$$

其中 $2s=\sqrt{|4c+1|}$.

当 $a\neq -2$时,假设$q=\frac{1}{2}a+1$, 并且设（上面的符号是对于 a_ν 的,下面的符号是对于 b_ν 的；不包含任何因子的乘积认为等于1）

$$a_\nu, b_\nu=\prod_{k=1}^{\nu}\frac{(2k-1)q\mp1}{kq\mp1}\qquad 当\ \nu=0,1,2,\cdots时,$$

如果$\pm\frac{1}{q}$不等于任何自然数；

$$a_\nu, b_\nu=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{\nu}\frac{(2k-1)q\mp1}{kq\mp1} & 当\ 0\leqslant\nu\leqslant n\ 时,\\ 0 & 当\ \nu>n\ 时,\end{cases}$$

如果$\pm\frac{1}{q}=2n+1$是奇自然数；

$$a_\nu, b_\nu=\begin{cases}0 & 当\ \nu<2n\ 时,\\ \prod\limits_{k=2n+1}^{\nu}\frac{(2k-1)q\mp1}{kq\mp1} & 当\ \nu\geqslant2n\ 时,\end{cases}$$

如果$\pm\frac{1}{q}=2n$是偶自然数；最后，假设

$$U_{1,2}=a_0\mp\frac{a_1}{1!}X+\frac{a_2}{2!}X^2\mp\frac{a_3}{3!}X^3+\cdots,$$

$$V_{1,2}=b_0\pm\frac{b_1}{1!}X+\frac{b_2}{2!}X^2\pm\frac{b_3}{3!}X^3+\cdots,$$

其中$X=\frac{x^q\sqrt{c}}{q}$。这时

$$U_1^*=e^XU_1,\quad U_2^*=e^{-X}U_2,$$

$$V_1^*=e^{-X}V_1,\quad V_2^*=e^XV_2$$

是给定的微分方程的解(凯莱的解)。如果$\frac{1}{q}=2n+1$，则通解是$C_1U_1^*+C_2U_2^*$，而级数U_1, U_2中断；如果$\frac{1}{q}=-(2n+1)$，则通解是$C_1V_1^*+C_2V_2^*$，而级数V_1, V_2中断。如果第一个条件不成立，则$U_1^*=U_2^*$；如果第二个条

件不成立，则 $V_1^* = V_2^*$；在这两种情况下，通解是 $C_1U_1^* + C_2V_2^*$.

如果$\frac{1}{q}=2n+1$，而 n 是整数，那么经过变换 $y(x)=\eta(\xi)\xi^n$, $q\xi=x^q$, 则将给定的方程化为2.153型的方程，于是得到

$$y=x(x^{1-2q}D)^{n+1}\left[C_1\exp\left(\frac{\sqrt{c}}{q}x^q\right)+C_2\exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{q}x^q\right)\right]$$

当 $n\geqslant0$ 时，

$$y=(x^{1-2q}D)^{-n}\left[C_1\exp\left(\frac{\sqrt{c}}{q}x^q\right)+C_2\exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{q}x^q\right)\right]$$

当 $n<0$ 时，

其中 $D=\frac{d}{dx}$.

因为原方程是 2.162(10) 型的方程，所以其解也可以直接通过贝塞耳函数来表示。这一点很重要，因为贝塞耳函数已被很好地研究过并且编制成表。

如果考虑特征值问题

$$y''+\lambda x^\nu y=0,\quad y(a)=y(b)=0,\quad (a\leqslant0,\ b>0),$$

则对此问题存在无穷多个特征值，在一般情况下，这些特征值渐近地趋于复 λ 平面上的两条直线。特征值和特征函数可以通过贝塞耳函数渐近地表示。其次，关于任意函数按特征函数展开的定理成立。

详见 R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **31** (1929), p. 1—24.

对于边值问题

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = 0,\ y(a) = y(a+1) = 0\ (a>0),$$

当 $x \leqslant \xi$ 时．格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi) = \sqrt{x\xi}\ln\frac{x}{a}\ln\frac{\xi}{a+1}\left[\ln\frac{a+1}{a}\right]^{-1};$$

当 $x \geqslant \xi$ 时，在此公式中 x 和 ξ 应当交换位置。

Watson.〔定性结果可以在 Bellman 一书的第六章中找到．——俄译本编者注．〕

2.15. $\boldsymbol{y'' = (a^2x^{2n} - 1)y}$．其解未知。

A C Banerji, P L Bhatnagar, Proc Acad Allahabad 8(1938), p.85-87 一文中指出的解和求解方法并不正确。

2.16. $\boldsymbol{y'' + (ax^{2c} + bx^{c-1})y = 0}$；见 2.273(12)。

2.17. $\boldsymbol{y'' + (e^{2x} - \nu^2)y = 0}$；见 2.162(23)．

2.18. $\boldsymbol{y'' + ae^{bx}y = 0}$；也可参阅 2.162(23)。

假设 $y(x) = \eta(\xi), \xi = \exp bx$, 则得到 2.104。

$$b^2\xi\eta'' + b^2\eta' + a\eta = 0.$$

2.19. $\boldsymbol{y'' = (4a^2b^2x^2e^{2bx^2} - 1)y}$．其解未知．

A C Banerji, P L Bhatnagar, *Proc Acad Allahabad* 8 (1938), p. 87—91 一文中指出的解及求解方法并不正确．

2.20. $\boldsymbol{y'' + (ae^{2x} + be^x + c)y = 0}$。

这是具有虚周期 $2\pi i$ 的希尔方程 2.30；假设 $y(x) = \eta(\xi), \xi = ix$, 则得到具有实周期 2π 的方程 2.30。假设 $y = \eta(\xi)e^{-\frac{1}{2}x}, \xi = e^x$, 则得到方程 2.154

$$\xi^2\eta'' + \left(a\xi^2 + b\xi + c + \frac{1}{4}\right)\eta = 0.$$

也可参阅 2.273(14)。

2.20a. $\boldsymbol{y'' = (a^2e^{2x} + a(2b+1)e^x + b^2)y}$；

方程 2.29 的特殊情况。

$$y=E\left(C_1+C_2\int\frac{dx}{E^2}\right), \text{其中 } E=\exp(ae^x+bx).$$

2.21. $y''+(a\,\mathrm{ch}^2x+b)y=0$.

经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=ix$, 则化为2.22型的方程. 也可参阅2.268和2.348.

2.22. $y''+(a\cos 2x+b)y=0$; 马提厄方程.

[文献: Whittaker 和 Watson,第19章; Янке, Эмде и Лёш; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах, 1953; М. Д. О. Стрэтт, функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Ince; Sansone, 第Ⅵ章, §4; Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi. ——俄译本编者注.]

此方程也可以写为下列形式:

$$y''+(2a\cos^2x+b-a)y=0,$$

所以经过变换 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=\cos^2x$, 可将其化为方程

$$2\xi(\xi-1)\eta''+(2\xi-1)\eta'-\left(a\xi+\frac{b-a}{2}\right)\eta=0,$$

即2.268型的方程. 所以2.268也给出求解这里所研究的马提厄方程的方法.

关于其他形式的马提厄方程,也可参阅2.268.

其次,如果将给定的方程写为下列形式:

$$y''+(a\cos 2x+\lambda)y=0, \tag{1}$$

则可将其看作希尔方程2.30的特殊情况,并且应当注意到, y 的系数的周期是 π,而不是 2π. 有关希尔方程的一些概念和问题,在应用于马提厄方程时也起着重要的作用. 特别是,由2.30得知, 对于给定的数 a, λ, 存在解 $y(x)$以及特征指数 μ, 使得

$$y(x+\pi)=e^{2\pi\mu}y(x). \tag{2}$$

如果 $y_1(x)$是方程(1)满足条件$y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$的解,那么,根据第一部分 18.7 节,特征指数μ 由方程

$$\operatorname{ch} 2\pi\mu=y_1(\pi) \tag{3}$$

来确定.

因为利用第一部分第八章的近似方法可以求出$y_1(x)$而达到任意的精确度,所以也可以求出 μ,并达到任意的精确度.

另一种方法归结如下. 为了求出方程 (1) 满足边界条件(2)的解,将 y 写为级数的形式:

$$y=e^{2\mu x}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{2kix}$$

并且将此级数代入方程(1). 这时,对于 c_k 得到无穷齐次线性方程组.为了使得这个方程组具有非平凡解,特征指数 μ 应当这样选择,即使得条件

$$\operatorname{ch}\pi\mu=1+2\Delta(0)\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}$$

成立,其中 $\Delta(0)$表示希尔行列式

$$\Delta(0)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{a}{\lambda-4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \frac{a}{\lambda-1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{a}{\lambda} & 1 & \frac{a}{\lambda} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{a}{\lambda-1} & 1 & \frac{a}{\lambda-1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{a}{\lambda-4} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

对于小的 a, 可以由下列方程求出 μ 的近似值:

$$\operatorname{ch}\pi\mu = 1 + 2\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} + \frac{\pi a^2}{4(1-\lambda)\sqrt{\lambda}}\sin\pi\sqrt{\lambda} + O(a^4).$$

借助于上面引入的函数 $y_1(x)$, 以及由方程(3)确定的数 μ,可以得到关于方程(1)全体解的下列结果:

(a) 如果 $y_1(\pi)>1$, 则

$$y = C_1 e^{2\mu x}\varphi_1(x) + C_2 e^{-2\mu x}\varphi_2(x),$$

φ_1, φ_2 是周期函数,其周期为 π;

(b) 如果 $y_1(\pi)<-1$, 则 $\mu=\rho+\frac{i}{2}$, ρ 为实数,

$$y = C_1 e^{2\rho x}\varphi_1(x) + C_2 e^{-2\rho x}\varphi_2(x),$$

φ_1, φ_2 是周期函数, 其周期为 2π;

(c) 如果 $|y_1(\pi)|<1$, 则 $\mu=i\nu$ 是纯虚数, $\cos 2\pi\nu = y_1(\pi)$,

$$y = (C_1\cos\nu x + C_2\sin\nu x)\varphi_1(x) + (C_2\cos\nu x - C_1\sin\nu x)\varphi_2(x),$$

φ_1, φ_2 是周期函数,其周期为 π;

(d) 如果 $y_1(\pi)=\pm 1$, 则 y 是周期函数同乘以 x 的周期函数之和。

研究一下对于确定的数值 a, λ 而得到的所论方程的周期解 (这样的 λ 值称为特征值[1]), 首先是周期为 2π 的解. 周期为 2π 的解称为**第一类马提厄函数**; 对于给

---

1) 关于特征值的计算,在实数 a 的情况下见: Ince, *Proceedings Edinburgh* **45**(1926), p. 20—29, 316—322; **47**(1927), p. 294—301; 在虚数 a 的情况下, 见: H. P. Miltholland, S. Goldstein, *Philos. Magazine*(7), 8(1929), p. 834—840. 关于方程

$$y'' + 2i\nu y' + (\lambda - \nu^2 + a\cos 2x)y = 0$$

的特征值的估值, 见 D. H. Weinstein, *Philos. Magazine* (7), 20(1935), p. 288—294.

定的 a，这些函数只是对于 $\lambda\geqslant -a$ 才能存在. 如果对于某一对数 a,λ，存在这样的一个函数，则在给定方程的、与此函数线性无关的解之中，不能有第一类马提厄函数（$\lambda=n^2$, $a=0$ 的情况除外）；这些解称为第二类马提厄函数. 将 ix 代入马提厄函数来代替 x，则得到所谓第一类和第二类马提厄伴随函数，这些函数满足方程

$$y''-(a\operatorname{ch} 2x+\lambda)y=0.$$

第一类和第二类函数的线性组合，如果当 $x\to\infty$ 时渐近地趋向于

$$e^{-\frac{1}{2}x}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\,e^x\right)$$

（精确到相差一个常数因子），则被认为是第三类马提厄伴随函数.

第一类马提厄函数具有下列形式的傅立叶展开式：

$$C_n(x,a)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{n,2m+1}\cos(2m+1)x \quad (n=1,3,5,\cdots),$$

$$C_n(x,a)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{n,2m}\cos 2mx \qquad (n=0,2,4,\cdots),$$

$$S_n(x,a)=\sum_{m=1}^{\infty}B_{n,2m+1}\sin(2m+1)x \quad (n=1,3,5,\cdots),$$

$$S_n(x,a)=\sum_{m=1}^{\infty}B_{n,2m}\sin 2mx \qquad (n=2,4,6,\cdots).$$

这时，对于给定的 a，C_0 为偶函数，此函数是方程(1)相应于最小周期特征值的解（见 2.30）；$C_1[S_1]$ 是相应于最小半周期特征值的偶的[奇的]解；$C_2[S_2]$ 是相应于下一个周期特征值的偶的[奇的]解，如此等等. 此外，这些解应当规范化，即使得

$$\int_0^{2\pi} C_0^2 dx = 2\pi \text{ 和 } \int_0^{2\pi} C_n^2 dx = \int_0^{2\pi} S_n^2 dx = \pi \text{ 当 } n \neq 0 \text{ 时.}$$

当 $a=0$ 时，则有 $S_n = \sin nx$, $C_n = \cos nx$. 对于固定的 a, 第一类马提厄函数构成正交系，并且满足齐次积分方程

$$y(x) = \varkappa \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sqrt{2a}\sin x \sin t} y(t)\, dt.$$

当 $n=0,1,2$ 时，函数 C_n, S_n 展开式的系数表，见 S Goldstein, *Transactions Cambridge Soc*.23, № XI(1927). R E Langer, *Transactions Americ. Math. Soc*.**36**(1934), p 636—695 一文中研究了当 x 为复数而 λ 取大的值(或 a 取大的值)时方程 (1) 的解的渐近性. 下列著作中阐述了各种的问题: Nielsen, *Physical Review*(2), **40**(1932), p.445—456; Teller, Weigert, *Nachrichten Göttingen*(1932), p. 218—231; Pitzer, *Journ. Chem. Phys*. **5** (1937), p 468, 473; Crawford, 同上, 8(1940), 273; Wilson, *Chem. Rev*.**27**(1940), p 31 以及附录Ⅱ, 表 3; Brainer, Weygandt, *Philos. Magazine*(7), **30**(1940), p.458; A. Erdelyi, *Math. Zeitschrift*. **41**(1936), p.653—664.

2.23. $y'' + (a\cos^2 x + b)y = 0$; 见 2.22.

2.23a. $y'' = \left(ab\sin 2x + \dfrac{a^2-b^2}{2}\cos 2x + \right.$

$$\left. + (2bc-a)\sin x + (2ac+b)\cos x + \frac{a^2+b^2}{2} + c^2\right)y.$$

$$y = E\left(C_1 + C_2\int\frac{dx}{E^2}\right),$$

其中 $E = \exp(a\sin x - b\cos x + cx)$.

2.24. $y'' = (1 + 2\,\mathrm{tg}^2 x)y$.

$$y = \frac{C_1}{\cos x} + C_2\left(\sin x + \frac{x}{\cos x}\right).$$

2.25. $y''=\left[\frac{m(m-1)}{\cos^2 x}+\frac{n(n-1)}{\sin^2 x}+a\right]y.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)\cos^m x\sin^n x$, $\xi=\sin^2 x$, 则得到超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+[(\alpha+\beta+1)\xi-\gamma]\eta'+\alpha\beta\eta=0,$$

其中 $\alpha,\beta=\frac{1}{2}(m+n)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-a},\ \gamma=n+\frac{1}{2}.$

当 $m=0$ 或 $n=0$ 时，也可参阅 2.424 和 2.420.

2.26. $y''=[A\mathscr{P}(x)+B]y$；拉梅方程.

[文献：Whittaker 和 Watson, 第 23 章；Янке, Эмде и Лёш; Дж Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах; М. Д. О. Стрэтт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Ince; Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических фуикций, 1970; М. А Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексногопеременного, 1965; Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi.——俄译本编者注.]

同拉梅方程有关的问题，见 2.408.

比较详细地研究 $A=n(n+1)$ 的情况，其中 n 是自然数。如果 ω_1,ω_2 是函数 $\mathscr{P}$ 的周期，则对于方程

$$y''=[n(n+1)\mathscr{P}(x)+a]y, \tag{1}$$

点 $x=k\omega_1+l\omega_2$ 中的每一个，都是具有指数 $r=n+1$, $-n$ 的弱奇点。方程(1)的解在整个复 x 平面上是半纯的. 在点 $x=k\omega_1+l\omega_2$ 的邻域内，存在下列形式的解：

$$y_1=(x-k\omega_1-l\omega_2)^{n+1}Y_1(x),$$
$$y_2=(x-k\omega_1-l\omega_2)^{-n}Y_2(x),$$

其中 Y_1, Y_2 是在此点为正则的函数。

$n=1$：函数

$$y=\frac{\sigma(x\pm\alpha)}{\sigma(x)}e^{\mp x\zeta(\alpha)} \tag{2}$$

是方程(1)的解，其中 α 由条件 $\mathscr{P}(\alpha)=a$ 来确定，而 σ, ζ 是椭圆函数理论中熟知的外尔斯特拉斯函数。[见第一部分 18.8 节。——俄译本编者注.]如果

$$a\neq e_1,\ e_2,\ e_3$$

$$\left(e_1=\mathscr{P}\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\ e_2=\mathscr{P}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),\ e_3=\mathscr{P}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

则式(2)两个解线性无关。如果 $a=e_\nu$, 则

$$y_1=\frac{\sigma(x+\omega)}{\sigma(x)}e^{-\frac{1}{2}\eta x},\quad y_2=[\zeta(x+\omega)+e_\nu x]y_1$$

构成基本解组；这里，当 $\nu=1,2,3$ 时，

$$\omega=\frac{1}{2}\omega_1,\quad \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\quad \frac{1}{2}\omega_2 \text{ 和 } \eta=\eta_1,\ \eta_1+\eta_2,\ \eta_2.$$

$n=2$: 如果 $a^2\neq 3g_2$(由 g_2, g_3 表示函数 $\mathscr{P}(x)$ 的不变量)，则解具有下列形式：

$$y=\frac{d}{dx}\frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)}e^{-x[\zeta(\alpha)+\beta]},$$

其中 α 是方程 $\mathscr{P}(\alpha)=\frac{a_1^3+g_3}{3a_1^2-g_2}\left(a_1=\frac{a}{3}\right)$ 的根，

$$\beta=\frac{\mathscr{P}'(\alpha)}{2\mathscr{P}(\alpha)-a_1}.$$

如果 $a^2=3g_2$, 则 $y=\mathscr{P}(x)+\frac{1}{2}a_1$ 是解。

对于另一些 n 值，也存在方程(1)的解法. 例如, $y=\mathscr{P}'(x)$ 是方程 $y''=12\mathscr{P}(x)y$ 的解；方程 $4y''=3\mathscr{P}(x)y$ 具有解

$$y_1=\left[\mathscr{P}'\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}},\quad y_2=\mathscr{P}\left(\frac{x}{2}\right)y_1.$$

2.27. $y'' + (a\,\mathrm{sn}^2 x + b)\,y = 0$；拉梅方程，见 2.408.

2.28. $y'' = \left(\frac{1}{30}\mathscr{P}^{(4)}(x) + \frac{7}{3}\mathscr{P}''(x) + a\mathscr{P}(x) + b\right)y$.

在下列书中有此方程的解：A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, p 464.

2.29. $y'' = \{[f(x)]^2 + f'(x)\}y$.

一个解是：$y = \exp\int f(x)\,dx$.

M Ельшин, *ДАН СССР* XVIII (1938), p 144.

2.30. $y'' + [\Phi(x) + \lambda]y = 0$，其中 $\Phi(x)$ 为周期函数；希尔方程.

[文献：Whittaker 和 Watson 第 19 章；Дж Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах, 1953；M. Д. O. Стрэтт, функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935；Г. В Бондаренко, Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, 1936；Sansone，第 VI 章；Кузнецов；Bateman 和 Erdelyi.——俄译本编者注.]

这种类型的微分方程，在物理问题、技术问题和天文问题中常常会遇到. 许多重要的方程，有些是直接地，有些经过以适当方式选择的变换之后，均可化为希尔型方程，例如形如 2.436 和 2.430 的广义勒让德方程，退化的超几何方程（见 2.273，2.154，2.20），以及贝塞耳方程和马提厄方程.

其次，假设 $\Phi(x)$ 具有实的周期 2π. 这时，此方程不可能有两个周期为 4π 的线性无关的解，但是根据弗洛盖定理（第一部分，18.7 节），此方程必定具有解 (y)，当适当选择实的或复的**特征指数** μ 时，满足函数方程

$$y(x+2\pi) = e^{2\pi\mu}y(x). \tag{1}$$

解 $y(x)$ 称为**稳定的**还是**不稳定的**，取决于 μ 是纯虚数还是具有非零的实部；解称为**周期的**还是**半周期的**，取决于 $\exp(2\pi\mu)=+1$ 还是 -1. 相应的参数值 λ 和 $\bar{\lambda}$，称为**周期的或半周期的特征值**.

关于特征指数的计算，见第一部分 18.7 节. 也可以按下述方式来进行：设将周期函数 $\Phi(x)$ 表示为傅立叶级数：

$$\Phi(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{*} a_n e^{inx}$$

(星号表示：当取和时去掉 $n=0$ 一项)；根据弗洛盖定理解是存在的，且相应地表示为下列形式：

$$y=e^{\mu x}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}.$$

需要计算 μ 和 b_n 的值，其中 b_n 不应当都等于零. 将 y 的表达式代入方程，则得到对于 b_n 的无穷的齐次线性方程组，只有当某一个依赖于 μ 的无穷行列式等于零时，此方程组才有具有所要求的性质的解. 该等于零的行列式给出确定 μ 的条件；然后，b_n 则由相应的线性方程求出. 如果 μ 是纯虚数，则这样求得的解称为**希尔函数**；如果 $i\mu=\frac{a}{b}$(a, b 是整数)，则这些函数具有周期 $2\pi b$. 作为特殊情况，也可参阅马提厄方程 2.22 和方程 2.236.

关于希尔方程组

$$y_p''=\sum_{q=1}^{n}\Phi_{p,q}(x)y_q \quad (p=1,\cdots,n),$$

其中 $\Phi_{p,q}$ 是一些具有相同周期的周期函数，见 G. Lemaitre. O Godart, *Acad. Belgique Bulletins* (5), 24 (1938), p 19—23;

L. Cesari, *Memorie Acad. d'Italia* (6), 11 (1940), p 633—695.

2.31. $y''=f(x)y$.

假设 $y'=yu(x)$，则得到黎卡提方程（第一部分4.8节）

$$u'+u^2=f(x). \tag{1}$$

如果 $u(x)$ 是此方程的解，则原方程的解可以作为一阶线性方程

$$y'-u(x)y=C\exp\left(-\int u\,dx\right)$$

的解而得到，其中 C 是任意常数。

如果 $\varphi_1\neq 0$ 和 φ_2 是方程

$$y''=[f(x)+a]y \tag{2}$$

当 $a=a_1, a_2$ 时的解，则

$$u(x)=\varphi_1\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' \tag{3}$$

是方程

$$u''=\left[\varphi_1\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\varphi_1}+a_2-a_1\right]u=$$

$$=\left[2\left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2-f(x)+a_2-2a_1\right]u \tag{4}$$

的解. 如果表达式(3)中的 φ_2 遍及方程(2)(其中 $a=a_2$)所有的解，则公式(3)给出方程(4)的所有解. 有时可以应用上述事实，借助于比较简单的方程的解，来求比较复杂的方程的解.

2.32. $y''+\left[\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\right.$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0,\ g=g(x).$$

见 2.162(14).

2.33. $y''+y'+ae^{-2x}y=0$.

经过变换 $y(x)=\eta(\xi), \xi=e^{-x}$, 可以将此方程简化，得到方程 2.9

$$\eta''+a\eta=0.$$

2.34. $y''-y'+ae^{2x}y=0$.

将 $\xi=-x$ 取作为新的自变量，则得到方程 2.33.

2.35. $y''+ay'+by=0$; 自由振动方程.

(a) $\lambda^2=a^2-4b>0$:

$$y=C_1\exp\frac{-a+\lambda}{2}x+C_2\exp\frac{-a-\lambda}{2}x;$$

(b) $\lambda^2=4b-a^2>0$:

$$y=e^{-\frac{1}{2}ax}\left(C_1\cos\frac{1}{2}\lambda x+C_2\sin\frac{1}{2}\lambda x\right)=$$

$$=Ae^{-\frac{1}{2}ax}\sin\frac{1}{2}\lambda(x-B);$$

(c) $4b=a^2$:

$$y=e^{-\frac{1}{2}ax}(C_1x+C_2).$$

[见 Степанов, 第 VI章, §1; 第 II章, §2.——俄译本编者注.]

2.36. $y''+ay'+by=f(x)$; 强迫振动方程.

将此问题划分为和 2.35 中同样的一些情况，则得到:

(a) $$y=\frac{2}{\lambda}\int_C^x f(t)e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\operatorname{sh}\frac{\lambda}{2}(x-t)dt;$$

(b) $$y=\frac{2}{\lambda}\int_C^x f(t)e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\sin\frac{\lambda}{2}(x-t)dt;$$

(c) $$y=\int_{C}^{x} f(t)(x-t)e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\,dt.$$

此外，还应当向这些解补充方程 2.35 的相应的解作为被加项。

设函数$f(x)$是周期的，并且发生情况 (b)；这时，如果 $a\neq 0$，则齐次方程 2.35 没有周期解. 根据第二部分 1.2 节，由此可知，非齐次方程只有一个周期解，并且其周期等于$f(x)$的周期。

特别是，如果在情况 (b)中，$f=c\sin\omega x$，$\omega\neq 0$，$b\neq\omega^2$ 或 $a\neq 0$，则存在解

$$y=c\alpha\sin\omega(x-\gamma),$$

其中"畸变系数"α 由等式

$$\alpha^{-2}=(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2$$

来确定，而"相位移"是

$$\gamma=\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{a\omega}{b-\omega^2}.$$

[Понтрягин; Степанов, 第Ⅵ章 § 1; Д. Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах 1953.——俄译本编者注.]

2.37. $y''+ay'-(b^2x^2+c)y=0$; 见 2.273(11).

2.37 a. $y''+ay'+(be^x+c)y=0$.

$$y=e^{-\frac{ax}{2}}Z_\nu\left(2\sqrt{b}\,e^{\frac{x}{2}}\right),\quad 其中\ \nu=\sqrt{a^2-4C},$$

Z_ν 是柱函数。

H. Görtler, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23(1943), p. 233.

2.37 b. $y''+ay'+be^{2ax}y=0$.

假设 $y=\frac{\eta(\xi)}{\xi}$，$\xi=e^{ax}$，则得到方程 2.9

$$\eta''+\frac{b}{a^2}\eta=0.$$

2.38. $y''+2ay'+f(x)y=0.$

设 $a>0$，$f(x)$是连续的周期函数，周期为 p，并且

$$m^2\leqslant f(x)\leqslant M^2.$$

如果 $a^2\geqslant M^2$，则当 $x\to\infty$时，每一个解都趋向于零。

如果 $a^2<M^2$，并且如果

$$\int_0^p f(x)dx\leqslant 4a\operatorname{cth}ap,$$

则解具有同样的性质。

〔更详细的定性结果，例如见下列著作：Bellman，第Ⅵ章；Sansone，第Ⅶ章.——俄译本编者注.〕

2.39. $y''+xy'+y=0.$

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(C_1+C_2\int e^{\frac{1}{2}x^2}dx\right).$$

2.40. $y''+xy'-y=0.$

$$y=C_1x+C_2\left[\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+x\int\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right].$$

2.41. $y''+xy'+(n+1)y=0$，n 为自然数。

将方程 2.39 微分 n 次，如果 n 阶导数仍然通过 y 来表示，则得到此方程。所以

$$y=\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(C_1+C_2\int e^{\frac{1}{2}x^2}dx\right).$$

2.41a. $y''+xy'+(bx^2+a)y=0.$

当 $b=\frac{1}{4}$时，则有：

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1 e^{x\sqrt{\frac{1}{2}-a}}+C_2 e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}-a}}\right) & 当 a\neq\frac{1}{2} 时, \\ e^{-\frac{x^2}{4}}(C_1+C_2 x) & 当 a=\frac{1}{2} 时. \end{cases}$$

2.42. $y''+xy'-ny=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=ix$, 则得到方程2.44(1),其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.43. $y''-xy'+2y=0$; 方程 2.44的特殊情况.

$$y=(x^2-1)\left(C_1+C_2\int\frac{1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx\right).$$

2.44. $y''-xy'-ay=0$; 韦伯方程.

$$y=C_1\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a(a+2)\dots(a+2\nu-2)}{(2\nu)!}x^{2\nu}\right)+$$

$$+C_2\left(x+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(a+1)(a+3)\dots(a+2\nu-1)}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}\right).$$

假设 $y=u(x)\exp\frac{1}{4}x^2$, 则得到

$$4u''=(x^2+4a-2)u,$$

即形式为 2.87 的韦伯方程;假设 $y=\eta(\xi)$, $x=\xi\sqrt{2}$, 则得到方程 2.46,其中 x, y, a 各量,分别换为 ξ, η, $-2a$; 假设$y=\eta(\xi)$, $x=i\xi$, 则得到方程 2.41,其中 x, y, $n+1$ 各量,分别换为 ξ, η, a.

$-a$ 等于某一个自然数 n 的情况,可以化为2.41. 意即,方程

$$y''-xy'+ny=0 \tag{1}$$

经过变换 $y=u(x)\exp\frac{1}{2}x^2$, 则化为方程 2.41,其中未

知函数 y 换为 u.

关于 a 为自然数时解的封闭表达式，见 J. Zbornik, *Akad Wien* 166(1957), p.42.

2.45. $y''-xy'+(x-1)y=0.$

$$y=C_1e^x+C_2e^x\int \exp\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx.$$

2.46. $y''-2xy'+ay=0.$

假设 $y=u(x)\exp\frac{1}{2}x^2$，则将此方程化为标准形式：

$$u''+(a+1-x^2)u=0,$$

而假设 $y(x)=\eta(\xi)\exp\frac{1}{4}\xi^2, \xi=x\sqrt{2}$，则得到韦伯方程 2.87

$$4\eta''=(\xi^2-a-1)\eta.$$

如果 $a=2n$，其中 n 是自然数，则通解是

$$y=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\left(C_1+C_2\int e^{x^2}dx\right);$$

特别是，契比雪夫-埃尔米特多项式

$$y=H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=$$

$$=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^\nu C_n^{2\nu}\frac{(2\nu)!}{\nu!}(2x)^{n-2\nu}$$

是解；契比雪夫-埃尔米特多项式也作为级数展开式

$$e^{-t^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

的系数而出现，当 $n\geqslant 1$时，则有 $H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$.

在边界条件为“当$|x|\to\infty$时，$y(x)$增长的速度不比x的某个幂次快”时，方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

具有特征值$\lambda=2n$ $(n=0,1,2,\cdots)$和特征函数H_n。

[Whittaker 和 Watson; Courant 和 Hilbert,卷 I，第II章，§9；Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; G. Szego, Orthogonal polynomials, 1959(俄译本：Г. Сеге. Ортогональные многочлены, 1962)；Янке, Эмде 和 Лёш; Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; Кузнецов; Bateman 和 Frdelyi。——俄译本编者注。]

2.47. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0.$

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x^2}.$$

2.48. $y''-4xy'+(3x^2+2n-1)y=0.$

假设$y=e^{x^2}u(x)$，则得到方程 2.12，其中$a=-2n-1$，y换为u。

2.49. $y''-4xy'+(4x^2-1)y=e^{x^2}.$

对应的齐次方程属于 2.55 型。假设$u(x)=ye^{-x^2}$，则得到

$$u''+u=1,$$

因此

$$u=1+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

2.50. $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0.$

$$y=(C_1+C_2x)e^{x^2}.$$

2.51. $y''-4xy'+(4x^2-3)y=e^{x^2}.$

$$y=e^{x^2}(C_1e^x+C_2e^{-x}-1).$$

2.52. $y''+axy'+by=0.$

同 2.273(10)相比较。特别是，如果此方程具有下列形式：

$$y''+axy'-nay=0$$

(n为自然数)，则经过变换$y=\eta(\xi)$，$\xi=ix\sqrt{\frac{a}{2}}$，可将其

化为 2.46 型的方程，其中变量 x, y 换为 ξ, η，而 $a=2n$；因而其解可以通过契比雪夫-埃尔米特多项式来表示.也可参阅 2.303.

N. Schwid, *Transactions Americ Math Soc* 37(1935), p 339—362; J. H. Graf, *Math. Ann.* 56(1903), p.442.

2.53. $y''+2axy'+a^2x^2y=0.$

$$e^{\frac{a}{2}x^2}y=\begin{cases}C_1\operatorname{ch}x\sqrt{a}+C_2\operatorname{sh}x\sqrt{a} & \text{当 } a>0 \text{ 时},\\ C_1\cos x\sqrt{-a}+C_2\sin x\sqrt{-a} & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.54. $y''+(ax+b)y'+(cx+d)y=0.$

假设

$$y(x)=\eta(\xi)\exp\left(-\frac{c}{a}x\right),\quad \xi=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{ab-2c}{a^2}\right),$$

则得到

$$\eta''\pm\xi\eta'\pm a^{-3}(c^2-abc+a^2d)\eta=0,$$

其中取上面的符号还是取下面的符号,应当根据 $a>0$ 还是 $a<0$。关于所得到的方程,见 2.40—2.44 和 2.52.

2.55. $y''+(ax+b)y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y=0.$

假设 $y=u(x)\exp sx^2$, 其中 s 是方程 $4s^2+2as+\alpha=0$ 的根,则得到方程 2.54

$$u''+[(a+4s)x+b]u'+[(\beta+2bs)x+\gamma+2s]u=0.$$

特别是,如果原方程具有下列形式:

$$y''-2(ax+b)y'+[(ax+b)^2-a]y=0,$$

则

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\quad \text{其中 } y_1=\exp\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right),\quad y_2=y_1'.$$

2.56. $y''-x^2y'+xy=0.$

$$y=C_1x+C_2\left(\exp\frac{x^3}{3}-x\int x\exp\frac{x^3}{3}dx\right).$$

2.57. $y''-x^2y'-(x+1)^2y=0.$

$$y=\exp\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\left[C_1+C_2\int\exp\left(-\frac{1}{3}x^3-2x\right)dx\right].$$

2.58. $y''-x^2(x+1)y'+x(x^4-2)y=0.$

$$y=\exp\frac{x^3}{3}\left[C_1+C_2\int\exp\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)dx\right].$$

2.59. $y''+x^4y'-x^3y=0$；方程 2.60 的特殊情况。

$$y=C_1x+C_2x\int x^{-2}\exp\left(-\frac{x^5}{5}\right)dx.$$

2.60. $y''+ax^{q-1}y'+bx^{q-2}y=0.$

当 $q=0$ 时，则为欧拉方程(第一部分，22.3 节)。当 $2b=a(q-1)$ 时，此方程是方程 2.162(16) 的特殊情况；经过变换 $u(x)=y\exp\frac{ax^q}{2q}$，则将其化为方程 $4u''=a^2x^{2q-2}u$，同 2.14，2.162(10) 相比较。当 $b=-a, aq, a(q-1)$ 时，x，$x\exp\left(-\frac{ax^q}{q}\right)$，$\exp\left(-\frac{ax^q}{q}\right)$ 分别是其特解，根据第一部分 24.2 节，可以得到其余的解。

当 $b=amq$ 或 $b=a(mq-1)$ 时，其中 m 为整数，也能够得到封闭形式的解。

J. Zbornik, *Akad. Wien* 166(1957), p.43.

2.61. $y''+y'\sqrt{x}+\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{x}{4}-9\right)y=x\exp\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right).$

假设 $u(x)=y\exp\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$，则得到

$$u''-9u=x;\ u=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\frac{x}{9}.$$

2.62. $y''-\frac{1}{\sqrt{x}}y'+\frac{1}{4x^2}(x+\sqrt{x}-8)y=0.$

$$y=\left(C_1x^2+\frac{C_2}{x}\right)\exp\sqrt{x}.$$

2.63. $y''-(2e^x+1)y'+e^{2x}y=e^{3x}$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=e^x$，则得到 2.36 型的方程

$$\eta''-2\eta'+\eta=\xi;\quad \eta=\xi+2+e^{\xi}(C_1+C_2\xi).$$

2.63a. $y''+(ae^x+b)y'+(Ae^{2x}+Be^x+C)y=0$.

如果 $A=-\alpha(a+\alpha)$, $C=-\beta(b+\beta)$, $B=-(a\beta+$ $+b\alpha+2\alpha\beta+\alpha)$，则有

$$y=\exp(\alpha e^x+\beta x)\left\{C_1+C_2\int\exp[-(a+2\alpha)e^x-\right.$$

$$\left.-(b+2\beta)x]dx\right\}.$$

无论是当 $\alpha=0$时，还是当 $\alpha=-a$ 时，均可得到$A=0$的情况。

2.64. $y''+ay'\text{th}x+by=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\text{sh}x$, 则得到 2.298 型的方程

$$(\xi^2+1)\eta''+(a+1)\xi\eta'+b\eta=0.$$

当 $a=2$ 时，此方程可以写为下列形式：

$$(y\text{ch}x)''+(b-1)\cdot y\text{ch}x=0,$$

所以存在解

$$y\,\text{ch}\,x=\begin{cases}C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x & \text{当 } b-1=\alpha^2>0 \text{ 时},\\ C_1\text{ch}\alpha x+C_2\text{sh}\alpha x & \text{当 } b-1=-\alpha^2>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.65. $y''+2ny'\text{cth}x+(n^2-a^2)y=0$.

$$y=\left(\frac{1}{\text{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}).$$

2.66. $y''+y'\text{tg}x+y\cos^2x=0$.

$$y=C_1\cos\sin x+C_2\sin\sin x.$$

2.66a. $y''+y'\text{tg}x+ay\cos^2x=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sin x$, 则得到方程 2.9

$$\eta''+a\eta=0.$$

经过变换 $y=u(x)\cos^{a+1}x$, 则得到下列方程：

$$u'' - (a+2)u'\mathrm{tg}x + (b-a-1)u = 0.$$

如果 n 是自然数，则方程

$$y'' - 2ny'\mathrm{tg}x + by = 0 \tag{1}$$

具有解

$$y = \left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^n v,$$

其中 v 遍及方程

$$v'' + (b+n^2)v = 0$$

的解；方程

$$y'' + 2ny'\mathrm{tg}x + by = 0 \tag{2}$$

具有解

$$y = \cos^{2n+1}x\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} v,$$

其中 v 的意义同前．后者可借助于上面指出的变换由方程(1)的相应结果而得到。

在奇的整数 n 的情况下，利用最初指出的变换，可以导出勒让德方程。

对于其他一些特殊情况，指出下列解：

$b = a+1$：　　$y = \cos^{a+1}x\left(C_1 + C_2\int \cos^{-a-2}x\, dx\right)$；

$b = 1-a$：

$$y = C_1 \sin x + C_2\left[\cos^{a-1}x + (a-1)\sin x\int \cos^{a-2}x\,dx\right];$$

$b = 2a+4$：　　$y = C_1 \sin x \cos^{a+1}x +$

$$+ C_2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - (a+3)\sin x\cos^{a+1}x\int\cos^{-a-4}x\,dx\right);$$

$b = 4-2a$：

$$y = C_1\{(a-2)\sin^2 x + 1\} + C_2\Big\{(a-1)\sin x\cos^{a-3}x +$$

$$+(a-3)[(a-2)\sin^2 x+1]\int\cos^{a-4}x\,dx\Big\};$$

$$b=\frac{1-a^2}{4}:$$

$$y=C_1(1+\sin x)^{\frac{a+1}{2}}+C_2(1-\sin x)^{\frac{a+1}{2}}.$$

2.67. $y''+y'\mathrm{tg}x-y\cos^2 x=0.$

$$y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}.$$

推广见 J. Zbornik, *ZAMP* 7(1956). [参阅本书第 763 页上的译文。]

2.68. $y''+y'\mathrm{ctg}x+\nu(\nu+1)y=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=\cos x$, 则得到 2.240 型的方程,其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.69. $y''-y'\mathrm{ctg}x+y\sin^2 x=0.$

$$y=C_1\cos\cos x+C_2\sin\cos x.$$

推广见 J. Zbornik, *ZAMP* 7(1956). [参阅本书第 763 页上的译文。——俄译本编者注。]

2.70. $y''+ay'\mathrm{tg}x+by=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sin x$, 则得到 2.249 型的方程

$$(\xi^2-1)\eta''+(1-a)\xi\eta'-b\eta=0.$$

当 $a=-2$ 时,此方程可以写为下列形式:

$$(y\cos x)''+(b+1)\cdot y\cos x=0,$$

因而其解是

$$y\cos x=\begin{cases}C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x & \text{当 } b+1=\alpha^2>0 \text{ 时},\\ C_1\mathrm{ch}\alpha x+C_2\mathrm{sh}\alpha x & \text{当 } b+1=-\alpha^2<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $a=2$, $b=3$ 时,则有

$$y=C_1\cos^3 x+C_2\sin x(1+2\cos^2 x).$$

2.71. $y''+2ay'\mathrm{ctg}ax+(b^2-a^2)y=0$, $a\neq0$, $b\neq0$.

假设 $u(x)=y\sin ax$, 则得到

$$y \sin ax = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

2.71a. $y'' + ay' \operatorname{ctg} cx + by = 0.$

假设 $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = cx + \frac{\pi}{2}$, 则得到方程 2.70

$$\eta'' - \frac{a}{c}\eta' \operatorname{tg}\xi + \frac{b}{c^2}\eta = 0.$$

特别是，如果$c=2$，则有下列情况：

$b = 1 - \frac{a^2}{4}$: $y = C_1 \sin^{\nu} x + C_2 \cos^{\nu} x$, 其中 $\nu = 1 - \frac{a}{2}$;

$a=2, b=-1$: 假设$y(x) = \eta(\xi), \xi = \sin x$, 则得到方程 2.317，其中变量 x, y 换为ξ, η;

$a=2$, $b = -\frac{3}{4}$: 假设 $y(x) \cos\frac{x}{2} = \eta(\xi)$, $\xi = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 则得到方程 2.317，其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.71b. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} 2x + ay \operatorname{tg}^2 x = 0.$

假设 $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos x$, 则得到方程 2.187

$$\xi^2\eta'' - \xi\eta' + a\eta = 0.$$

2.72. $y'' + a\mathscr{P}'(x)y' + [\alpha + \beta\mathscr{P}(x) - 4na\mathscr{P}^2(x)]y = 0.$

见 P Humbert, *Atti Pontificia Accad* 81(1928), p 71—84.

2.73. $y'' + \frac{\mathscr{P}^3 - \mathscr{P}\mathscr{P}' - \mathscr{P}''}{\mathscr{P}' + \mathscr{P}^2}y' + \frac{\mathscr{P}'^2 - \mathscr{P}^2\mathscr{P}' - \mathscr{P}\mathscr{P}''}{\mathscr{P}' + \mathscr{P}^2}y = 0,$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(x).$$

$$y = C_1\mathscr{P}(x) + C_2 e^{\zeta(x)}.$$

[这里$\mathscr{P}$和 ζ 是外尔斯特拉斯函数——见 2.26.——俄译本编者注.]

2.74. $y'' + k^2\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}y' + n^2 y \operatorname{dn}^2 x = 0.$

$$y = C_1 \sin n\int \operatorname{dn}x\,dx + C_2 \cos n\int \operatorname{dn}x\,dx.$$

[这里 $\mathrm{sn}x, \mathrm{cn}x$, $\mathrm{dn}x$ 是雅可比椭圆函数. 关于这些函数详见 Whittaker 和 Watson, 第 23 章; Н И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970; М. А. Лаврентьев и Б. В Щабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965 Янке, Эмде 和 Лёш; Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi ——俄译本编者注.]

2.75. $y''+f(x)y'+g(x)y=0$; 见第一部分§24.

如果 $g\neq 0$ 和 $\frac{1}{|g|}\frac{d}{dx}\sqrt{|g|}+\frac{f}{\sqrt{|g|}}=a=$常数,

那么经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\int\sqrt{|g|}\,dx$, 则化为常系数方程

$$\eta''+a\eta'+\frac{g}{|g|}\eta=0.$$

2.76. $y''+f(x)y'+[f'(x)+a]y=g(x)$.

当此方程的形式为

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\left(\frac{1}{CL}\frac{d}{dt}\frac{R}{L}\right)I=\frac{1}{L}\frac{dR}{dt}$$

时, 这里 $R=R(t)$ (接收机超再生微分方程), 其研究见 A. Erdelyi, *Annalen Phys* 415(1935), p. 21—43, p. 380.

2.76a. $y''+fy'-[a(a+1)f^2+af']y=0, f=f(x)$.

$$y=e^{aF}\left(C_1+C_2\int e^{-(2a+1)F}dx\right),$$

$$\text{其中} F=\int f(x)dx.$$

2.77. $y''+[af(x)+b]y'+[cf(x)+d]y=0$.

如果 $a^2d-abc+c^2=0$, $a\neq 0$, 则

$$y=e^{-\frac{c}{a}x}\left(C_1+C_2\int\exp\left[\left(\frac{2c}{a}-b\right)x-a\int f\,dx\right]dx\right).$$

2.77a. $y''+(f+g)y'+(f'+fg)y=0$; $f=f(x)$, $g=g(x)$.

$$y=e^{-F}\left(C_1+C_2\int e^{F-G}dx\right),$$

其中 $F=\int f(x)dx$, $G=\int g(x)dx$.

2.78. $y''+f(x)y'+\left(\frac{f^2}{4}+\frac{f'}{2}+a\right)y=0.$

假设 $u(x)=y\exp\frac{1}{2}\int fdx$, 则得到

$$u''+au=0.$$

2.78a. $y''+2fy'+\left(f^2+f'+\frac{g''}{2g}-\frac{3g'^2}{4g^2}-ag^2\right)y=0,$

$$f=f(x),\ g=g(x),\ a\geqslant 0.$$

其解为:

$$y=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{-\int(f\pm\sqrt{a}g)dx}.$$

根据第一部分24.2节,由此可以得到通解.

2.79. $y''-a\frac{f'(x)}{f(x)}y'+b[f(x)]^{2a}y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\int f^a dx$, 则得到

$$(\eta''+b\eta)f^{2a}(x)=0;$$

因而,如果 $f\neq 0$,则有 $\eta''+b\eta=0$.

2.80. $y''-\left(\frac{f'}{f}+2a\right)y'+\left(a\frac{f'}{f}+a^2-b^2f^2\right)y=0,$

$$f=f(x).$$

$$y=e^{ax}\left(C_1E+\frac{C_2}{E}\right),\ \text{其中}E=\exp b\int fdx.$$

见 O Olsson, *Arkiv för Mat* 14(1920),№1和14.

2.81. $y''+\left(\frac{ff'}{f^2+b^2}-\frac{f''}{f'}\right)y'-\frac{a^2f'^2}{f^2+b^2}y=0,\ f=f(x).$

$$y=C_1u^a+C_2u^{-a},\text{ 其中 } u=f+\sqrt{f^2+b^2}.$$

2.82. $$y''-\left[\frac{g''}{g'}+(2\mu-1)\frac{g'}{g}\right]y'+\left[(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0,\quad g=g(x);$$

见 2.162(15)。

2.83. $$y''-\frac{f'}{f}y'+\left[\frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{f''}{f}-\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0,$$

$f=f(x)$, $g=g(x)$; 见 2.162(13)。

2.84. $$y''-\left[2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right]y'+\left[\frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right)-\frac{f''}{f}-\nu^2\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0,$$

$f=f(x)$, $g=g(x)$; 见 2.162(12a)。

2.85. $$y''-\left[\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right]y'+\left[\frac{h'}{h}\left(\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right)-\frac{h''}{h}+g'^2\right]y=0,$$

$g=g(x)$, $h=h(x)$; 见 2.162(12b)。

2.86. $4y''+9xy=0$; 方程 2.14 的特殊情况.

将此方程乘以$\frac{1}{4}x^2$,则得到方程 2.162(1)。

2.87. $4y''=(x^2+a)y$; 韦伯方程.

关于这个方程,见 2.273(13),以及 2.12 和 2.44.

如果 $a=-2(2n+1)$,n 为自然数,则其中一个解是

$$y=(-1)^n e^{\frac{1}{4}x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

即

$$y=2^{-\frac{1}{2}n}e^{-\frac{1}{4}x^2}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

是契比雪夫-埃尔米特多项式(见 2.46)。

2.88. $4y''+4y'\operatorname{tg}x-(5\operatorname{tg}^2 x+2)y=0.$

$$y\sqrt{|\cos x|}=C_1+C_2(x+\sin x\cos x).$$

2.89. $ay''-(x+ab+c)y'+[b(x+c)+d]y=0;$

方程 2.54 的特殊情况.

假设 $y(x)=e^{bx}\eta(\xi)$, $\xi\sqrt{a}=x-ab+c$, 则得到 2.44 型的方程

$$\eta''-\xi\eta'+d\eta=0.$$

2.90. $a^2y''+a(a^2-2be^{-ax})y'+b^2e^{-2ax}y=0.$

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\text{ 其中 }y_1=\exp\left(-\frac{b}{a^2}e^{-ax}\right),\quad y_2=y_1'.$$

91—145. $(ax+b)\ y''+\cdots$

2.91. $x(y''+y)=\cos x.$

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+$$

$$+\sin x\int\frac{\cos 2x}{x}dx-\cos x\int\frac{\sin 2x}{2x}dx.$$

2.92. $xy''+(x+a)y=0.$

由 2.134 得知, 此方程可以化为 2.113 型.

关于此方程的直接研究，见 M Frenkel, *Zeitschrift f. Phys.* 95(1935), p. 599—629.

2.93. $xy''+y'=0$, 即$(xy')'=0$.

$y=C_1+C_2\ln|x|$. 基本解：

$$\frac{1}{2}\left|\ln\frac{\xi}{x}\right|.$$

所以，对于每一个齐次边值问题，格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=C_1(\xi)+C_2(\xi)\ln|x|+\frac{1}{2}\left|\ln\frac{\xi}{x}\right|.$$

在边界条件"$y(1)=\alpha y'(1)$, 当 $x\to 0$ 时 $y(x)$有界"的情况下，

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+\ln\xi & \text{当 } 0<x\leqslant\xi \text{ 时,}\\ \alpha+\ln x & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

2.94. $xy''+y'+ay=0$; 见 2.104.

2.95. $xy''+y'+\lambda xy=0$; 方程 2.162(1)的特殊情况.

对应于边界条件"$y(1)=0$, 当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"的特征函数是 $CJ_0(2\sqrt{\lambda x})$, 其中特征值由方程

$$J_0(2\sqrt{\lambda})=0$$

来确定；这里 J_0 是贝塞耳函数。

Courant 和 Hilbert. I, 339.

2.96. $xy''+y'+(x+a)y=0$.

假设 $y=\eta(\xi)\exp(\pm ix)$, $\xi=\mp 2ix$, 则得到方程 2.113

$$\xi\eta''+(1-\xi)\eta'-\frac{1}{2}(1\mp ia)\eta=0.$$

Watson, 105.

2.97. $xy''-y'+ay=0$; 见 2.106.

2.98. $xy''-y'-ax^3y=0$;

方程 2.106 和 2.79 的特殊情况.

设 $\alpha=\sqrt{|a|}$. 其解具有下列形式:

$$y=\begin{cases} C_1\operatorname{ch}\frac{1}{2}\alpha x^2+C_2\operatorname{sh}\frac{1}{2}\alpha x^2 & \text{当 } \alpha>0 \text{ 时} \\ C_1\cos\frac{1}{2}\alpha x^2+C_2\sin\frac{1}{2}\alpha x^2 & \text{当 } a<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

2.99. $xy''-y'+x^3(e^{x^2}-\nu^2)y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\exp\frac{1}{2}x^2$, 则得到贝塞耳方程 2.162,其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.100. $xy''+2y'-xy=e^x$.

$$y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x}).$$

2.101. $xy''+2y'+axy=0$.

假设 $u(x)=xy$,则得到不难求解的方程 $u''+au=0$.

2.102. $xy''+2y'+ax^2y=0$; 方程 2.162(1) 的特殊情况.

假设 $u(x)=xy$, 则得到 $u''+axu=0$, 即方程 2.14.

2.103. $xy''-2y'+ay=0$; 方程 2.106 的特殊情况.

2.104. $xy''+\nu y'+ay=0$, $a\neq0$;

方程 2.162 (1) 的特殊情况.

如果 $2\nu=2n+1$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$, 那么将方程 2.130 微分 n 次, 并且将 a 换为 $2a$, n 阶导数仍然用 y 来表示,则得到此方程. 由此得到解

$$y=\begin{cases} C_1\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{ch}2\sqrt{-ax}+C_2\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sh}2\sqrt{-ax} & \text{当 } ax<0 \text{ 时,} \\ C_1\frac{d^n}{dx^n}\cos2\sqrt{ax}+C_2\frac{d^n}{dx^n}\sin2\sqrt{ax} & \text{当 } ax>0 \text{ 时.} \end{cases}$$

如果 $\nu=-2n$（n 为自然数），而 $a=-x$，则解具有下列形式：

$$y=(\delta-1)(\delta-3)\cdots(\delta-2n+1)e^{\pm x} \quad 当\ \delta=x\frac{d}{dx}时.$$

2.105. $xy''+ay'+bxy=0$；见 2.162(9)。

当 $a\neq1$, $x>0$ 时，经过变换

$$y(x)=\eta(\xi),\quad x|q|=\xi^q,\quad q=\frac{1}{1-a}$$

则化为 2.14 型的方程

$$\eta''=-b\xi^{2q-2}\eta.$$

经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{2}x^2$，则化为 2.104 型的方程

$$2\xi\eta''+(a+1)\eta'+b\eta=0.$$

如果 $a=2n$（n 为自然数），则

$$y=C_1\frac{d^n}{d\xi^n}\exp\left(2\sqrt{-\frac{1}{2}b\xi}\right)+C_2\frac{d^n}{d\xi^n}\exp\left(-2\sqrt{-\frac{1}{2}b\xi}\right)=$$

$$=C_1\left(\frac{1}{x}D\right)^n\exp(x\sqrt{-b})+C_2\left(\frac{1}{x}D\right)^n\exp(-x\sqrt{-b}),$$

其中 $D=\frac{d}{dx}$。

$a=-2n$ 的情况，见 5.6。

如果 $0<a<2$, $a\neq1$，则当 $b<0$ 时函数

$$y_1=\int_0^\pi \operatorname{ch}(x\sqrt{-b}\cos t)\sin^{a-1}t\,dt,$$

$$y_2 = x^{1-a}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(x\sqrt{-b}\cos t)\sin^{1-a} t\,dt$$

构成基本解组；当 $b>0$ 时，函数

$$y_1 = \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{b}\cos t)\sin^{a-1} t\,dt,$$

$$y_2 = x^{1-a}\int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{b}\cos t)\sin^{1-a} t\,dt$$

构成基本解组；如果$a=1$，则y_2应当分别由

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(x\sqrt{-b}\cos t)\ln(x\sin^2 t)\,dt \quad (b<0)$$

和

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{b}\cos t)\ln(x\sin^2 t)\,dt \quad (b>0)$$

来代替．还要指出，经过变换

$$u(x)=x^{a-1}y,$$

原方程则化为下列形式：

$$xu''+(2-a)u'+bxu=0.$$

2.106. $xy''+ay'+bx^{\alpha}y=0$；方程 2.162(1)的特殊情况．

特别是，如果此方程具有下列形式：

$$xy''+(1-a)y'+a^2x^{2a-1}y=0,$$

则其解是：

$$y=C_1\cos(x^a+C_2).$$

当 $\alpha=1-2a$, $b=-k(a-1)^2$ 时，则有

$$y=C_1\exp(\sqrt{k}\,x^{1-a})+C_2\exp(-\sqrt{k}\,x^{1-a}).$$

2.107. $xy''+(x+b)y'+ay=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-x$, 则得到方程 2.113，其中

变量 x, y 换为 ξ, η.

在一些特殊的情况下，可以指出下列的解：

当 $b=0, a=\pm 1$ 时：

$$y=xe^{-x} \text{ 或 } y=x, \text{取决于 } a \text{ 的符号；}$$

当 $b=1, a=1$ 时：$y=e^{-x}$；

当 $b=2, a=1$ 时：$y=\frac{1}{x}$；

当 $b=2, a=2$ 时：$y=e^{-x}$.

2.108. $xy''+(x+a+b)y'+ay=0$.

根据第一部分 22.4 节，其解可以表示为下列曲线积分的形式：

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta} e^{-xt}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

（处于积分路径上的积分号下的表达式的临界点，应当借助于小的半圆绕过去）；这时

a	b	x	α	β
>0	>0	任 意	0	1
>0	任 意	>0	0	$+\infty$
>0	任 意	<0	$-\infty$	0
任 意	>0	>0	1	$+\infty$
任 意	>0	<0	$-\infty$	1

当 $a>0, b>0, x>0$ 时，其解具有下列形式：

$$y=C_1\int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt+C_2\int_1^{\infty} e^{-xt}t^{a-1}(t-1)^{b-1}dt.$$

Ince, 188；J. Zbornik, *Akad Wien* 166(1957), p 47.

2.109. $xy''-xy'-y=x(x+1)e^x$.

$$y=(x^2-x\ln x-1)e^x+C_1xe^x+C_2xe^x\int\frac{dx}{x^2e^x}.$$

2.110. $xy''-xy'-ay=0$；方程 2.113 的特殊情况.

如果 $a=n$（n 为自然数），则

$$y_1=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^x x^n)$$

是解．一般地有，$y=u^{(n-1)}$，其中 u 是方程

$$xu'-(x+n)u=C$$

的任意解．如果 $a=-n$，则

$$y_2(x)=e^x y_1(-x);$$

显然，此解是某一个多项式，由公式

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}(C_n^{n-\nu})^2(n-\nu)!\frac{\nu x^\nu}{n}$$

来表示可以准确到相差一个常数因子.

2.111. $xy''-(x+1)y'+y=0.$

$$y=C_1(x+1)+C_2e^x.$$

2.112. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0.$

$$y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}$$

2.113. $xy''+(b-x)y'-ay=0$；

退化的超几何方程.

文献：Watson, p.100；Янке, Эмде 和 Лёш. H A Webb, J R Airey. *Philos. Magazine*(6), 36(1918), p 129—141——这里还有相应解的数值表；H Buchholz, *Zeitschrift f. angew Math Mech.* 23(1943), p.47—58, p.101—118. [也可参阅：Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963；А. Кратцер и В Франц, Трансцендентные функции, 1963；Кузнецов；Bateman 和 Erdelyi——俄译本编者注.]

如果 b 不是整数，则解具有下列形式：

$$y=C_1F(a,b,x)+C_2x^{1-b}F(a-b+1,2-b,x),$$

其中 $$F(a, b, x)=$$

$$={}_1F_1(a, b, x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)x^k}{b(b+1)\cdots(b+k-1)k!}$$

是所谓的波赫哈默尔函数，或者由级数表示的退化的超几何函数，此级数对于所有的 x 值是收敛的(同超几何级数 2.260(10)相比较)．此函数满足下列函数方程：

$$F(a, b, x)=e^x F(b-a, b, -x),$$

$$F(a, b, x)=\frac{a}{b}F'(a+1, b+1, x),$$

$$F(a, b, x)-F'(a, b, x)=\frac{b-a}{b}F(a, b+1, x),$$

$$aF(a, b, x)-bF'(a,b, x)=\frac{a(a-b)}{b(b+1)}xF(a+1, b+2, x).$$

于是有

$$F(a, a, x)=e^x,$$

并且，按照定义，对于所有 $a\leqslant 0$ 此式也应当成立．其次，如果 m 是非负整数，并且 $b\neq 0, -1, \cdots, -(m-1)$，则

$$F(-m, b, x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k\frac{x^k}{b(b+1)\cdots(b+k-1)}.$$

如果 $a=b=-m$，其中 m 是非负整数，则

$$y=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}=F(-m, -m, x)-$$

$$-\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}F(1, m+2, x)$$

是原方程的解．如果 $b=n$——自然数，则当 $n\geqslant 2$，$a\neq 0$ 时，其解具有下列形式：

$$y=C_1F(a,\ n,\ x)+$$

$$+C_2\left\{\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k}(n-k-2)!C_{a-n+k}^{k}x^{k+1-n}+C_{a-1}^{n-1}\left[F(a,n,x)\ln x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)\ x^k}{n(n+1)\cdots(n+k-1)k!}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{a+\nu}-\frac{1}{n+\nu}-\frac{1}{1+\nu}\right)\right]\right\},$$

而当 $n=1,\ a\neq0$ 时，其解具有下列形式：

$$y=C_1F(a,\ 1,\ x)+C_2\left[F(a,\ 1,\ x)\ln x+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}C_{a+k-1}^{k}\frac{x^k}{k!}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{a+\nu}-\frac{2}{1+\nu}\right)\right].$$

利用第一部分 18.2 节和 25.7 节中讨论过的两种方法可以得到这些解. $b=-n$ 的情况，通过向 $x^{1-b}F(a-b+1,\ 2-b,\ x)$ 转化，则可归结为上述情况.

经过 变换 $y(x)=|x|^{-\frac{1}{2}b}\eta(\xi)$, $\xi=\pm x$, 可将 此方程化为退化的超几何方程 2.190（也可同 2.273 相比较）

$$\xi^2\eta''\mp\xi^2\eta'+\left[\pm\left(\frac{b}{2}-a\right)\xi-\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-1\right)\right]\eta=0.$$

假设 $y=e^xu(x)$, 则得到方程 2.108

$$xu''+(x+b)u'+(b-a)u=0.$$

如果 $n=b-a$ 是自然数，则此方程是 2.116 型的方程. 所以在给定的情况下，原方程还具有解

$$y=e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}|x|^{n-b}e^{-x}.$$

因而，方程

$$xy''+(m-x)y'+ny=0 \tag{1}$$

(m, n 为自然数)还具有解

$$y=e^{x}\frac{d^{m+n-1}}{dx^{m+n-1}}x^{n}e^{-x}=\frac{n!}{(m+n-1)!}L_{m+n-1}^{(m-1)}(x),$$

其中

$$L_{n}(x)=e^{x}\frac{d^{n}}{dx^{n}}x^{n}e^{-x}$$

是契比雪夫-拉盖尔多项式；因此，方程 (1) 是契比雪夫-拉盖尔多项式(见 2.137)及其某些导数的微分方程.

当$\Re a>0$ 时，则有

$$F(a,b,x)=\frac{\Gamma(b)\Gamma(1+a-b)}{2\pi i\Gamma(a)}\int_{\mathbf{K}}t^{-b}(1-t)^{b-a-1}e^{\frac{x}{t}}dt,$$

其中 **K** 是某一条来自无穷远的曲线，在区间 $0<t<1$ 上由 t 的下半平面过渡到 t 的上半平面，然后再走向无穷远；例如，可以沿着从 $c-i\infty$ 到 $c+i\infty$ $(0<c<1)$ 的直线来取积分.

关于其他的积分表达式，见 H Bateman, *Transactions Americ. Math. Soc.* 33(1931), p.817—831. 函数 $F(a,b+n,x)$, $F(a+n,b+n,x)$, $F(a+n,b,x)$当 $n\to\infty$时的渐近线，下文中研究过：O. Perron, *Journ. f Math.* 151(1921), p. 63—78.

特征值问题：

$$xy''+(m-x)y'+\lambda y=0$$

(m 为自然数)，具有边界条件“$y(x)$ 当 $x\to 0$ 时有界，当 $x\to\infty$时不比 x 的某一个幂增长得快”，存在特征值 $\lambda=n-m+1(n=m-1,m,\cdots)$和特征函数 $L_{n}^{(m-1)}(x)$.

[也可参阅 Courant 和 Hilbert; Л. Ландау и Е Лифшиц, Квантовая механика, 1963; Д Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948. ——俄译本编者注。]

2.114. $xy''-2(x-1)y'-y=0$;

方程 2.273 (5) 的特殊情况。

假设 $\eta(\xi)=xe^{-x}y,\ \xi=2x$，则得到方程 2.134

$$4\xi\eta''=(\xi-2)\eta.$$

2.115. $xy''-(3x-2)y'+(2x-3)y=0$；

方程 2.162(17)的特殊情况。

2.115a. $xy''+(3x-1)y'-(4x+5a+4)y=0.$

假设 $y(x)=e^x\eta(\xi),\ \xi=-5x$，则得到方程 2.113

$$\xi\eta''-(\xi+1)\eta'+(a+1)\eta=0.$$

2.115b. $xy''+(ax+2)y'-\left(b^2xe^{2x}+\frac{1-a^2}{4}x-a\right)y=0.$

$$y=\frac{1}{x}\exp\left(be^x-\frac{a+1}{2}x\right)\left\{C_1+C_2\int\exp(x-2be^x)dx\right\}.$$

2.115c. $xy''+2(ax+1)y'+(bxe^x(1-be^x)+$

$+a^2x+2a)y=0.$

$$y=\frac{1}{x}\exp(-ax-be^x)\left\{C_1+C_2\int\exp(2be^x)dx\right\}.$$

2.116. $xy''+(ax+b+n)y'+nay=0$，n 为自然数。

解为 $y=u^{(n-1)}$，其中 u 是方程 $xu'+(ax+b)u=C$ 的任意解；当 b 为自然数时，则有 $y=e^{-ax}v^{(b-1)}$，其中 v 是方程 $xv'+(n-ax)v=C$ 的任意解。

2.117. $xy''-(a+b)(x+1)y'+abxy=0,\ a<b.$

利用第一部分 22.4 节的方法，得到

$$y=\left\{C_1\int_\alpha^\beta+C_2\int_\gamma^\delta\right\}e^{xz}(z-a)^{m-1}(z-b)^{n-1}dz;$$

这里

$$m=a\frac{b+a}{b-a},\quad n=b\frac{a+b}{a-b}$$

而 $\alpha=a-i\infty,\ \beta=\gamma=a,\ \delta=a+i\infty$，如果 $0<a<b$；

$\alpha=-\infty,\ \beta=\gamma=a,\ \delta=b\ (\alpha=a,\ \beta=\gamma=b,\ \delta=+\infty)$，如果 $a<0<b,\ |a|>b$ 和 $x>0(x<0)$. 在其他情况下，应当考虑沿着复平面上的相应路径的曲线积分.

2.118. $xy''+[(a+b)x+m+n]y'+$
$$+(abx+an+bm)y=0,$$

m, n 均为自然数，$a\neq b$ 或 $m\neq n$.

假设 $u(x)=y\exp ax$ 和 $u(x)=y\exp bx$，则得到 2.116 型的方程
$$xu''+[(b-a)x+m+n]u'+m(b-a)u=0$$
和
$$xu''+[(a-b)x+n+m]u'+n(a-b)u=0.$$
由此得到
$$y=C_1e^{-ax}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}x^{-n}e^{(a-b)x}+C_2e^{-bx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{-m}e^{(b-a)x}.$$

当 $a=0$ 时和当 $b=0$ 时，在解之中还有多项式.

2.119. $xy''-2(ax+b)y'+(a^2x+2ab)y=0.$
$$y=e^{ax}(C_1+C_2x^{2b+1}).$$

2.119 a. $xy''+(2ax+b)y'+(cx+ab)y=0;$

方程 2.162(17)的特殊情况.
$$y=x^{\frac{1-b}{2}}e^{-ax}Z_\nu(x\sqrt{c-a^2}),\quad 其中\ \nu=\frac{1-b}{2}.$$

2.119 b. $xy''+(ax+b)y'-[(a+c)x+b]cy=0.$

一个解是 $y=e^{cx}$，根据第一部分 24.2 节(b)，其余的解可以由这个解得到.

2.120. $xy''+(ax+b)y'+(cx+d)y=0;$

见上述方程，以及 2.138(a)和 2.273(9).

假设 $y=e^{-\frac{a}{2}x}$，则得到

$$xu'' + bu' + \left[\left(c - \frac{a^2}{4}\right)x + d - \frac{ab}{2}\right]u = 0.$$

当 $c = \frac{a^2}{4}$ 时，得到方程 2.104，当 $d = \frac{ab}{2}$ 时，得到方程 2.105。

2.120a. $xy'' + (ax + b)y' + + (-c^2x^2 + acx + (b+1)c)xy = 0.$

解之一是：$y = \exp\left(-\frac{c}{2}x^2\right)$；根据第一部分 24.2 节(b)，可以得到其余的解。

2.120b. $xy'' + (x^2 + 1)y' + 2xy = 0.$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_1 + C_2\int \frac{1}{x} e^{\frac{x^2}{2}} dx\right).$$

2.121. $xy'' - (x^2 - x)y' + (x-1)y = 0.$

$$y = C_1 x + C_2 x\int \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx.$$

2.122. $xy'' - (x^2 - x - 2)y' - x(x+3)y = 0.$

$$y = \exp\frac{1}{2}x^2\left(C_1 + C_2\int x^{-2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx\right).$$

2.123. $xy'' - (2ax^2 + 1)y' + bx^3y = 0.$

假设 $y(x) = u(x)\exp\left(\frac{a}{2}x^2\right)$，则得到 2.162 (1a)型的方程

$$xu'' - u' + (b - a^2)x^3u = 0;$$

当 $b = a^2$ 时，得到 $u = C_1 + C_2x^2$。

2.124. $xy'' - 2(x^2 - a)y' + 2nxy = 0$；见 2.210.

2.125. $xy'' + (4x^2 - 1)y' - 4x^3y = 4x^5.$

假设 $y(x) = \eta(\xi)$，$\xi = x^2$，则得到方程 2.36

$$\eta'' + 2\eta' - \eta = \xi;$$

$$y=C_1e^{\alpha x^2}+C_2e^{\beta x^2}-x^2-2,$$

其中 α, β 由方程 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-1$ 来确定。

2.125a. $xy''+(ax^2+2)y'+bx^3y=0$； 2.125 b 的类型。

假设 $xy(x)=u(x)$，则得到方程 2.55

$$u''+axu'+(bx^2-a)u=0;$$

当 $a=1$， $b=\frac{1}{4}$时，此方程的解具有下列形式：

$$u=e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1e^{x\sqrt{\frac{3}{2}}}+C_2e^{-x\sqrt{\frac{3}{2}}}\right).$$

2.125b. $xy''+(ax^2+b)y'+f(x)y=0.$

假设 $y=x^{\frac{1-b}{2}}e^{-\frac{a}{4}x^2}u(x)$，则得到方程

$$x^2u''+xu'+\left(xf-\frac{a^2}{4}x^4-a\frac{b+1}{2}x^2-\frac{(b-1)^2}{4}\right)u=0.$$

如果

$$f=\frac{a(b+1)}{2}x+\frac{A}{x}+Bx^3,$$

或者 $f=\frac{a^2}{4}x^3+\frac{A}{x}+Bx,$

则所得到的方程属于 2.162(1)型。

2.125c. $xy''+(ax^2+bx+c)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0.$

(a) $A=a(b+k), B=2a-bk-k^2, C=b(c-1)+k(c-2);$

$$y=x^{1-c}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}+kx\right)\times$$

$$\times\left\{C_1+C^2\int x^{c-2}\exp\left[\frac{ax^2}{2}-(b+2k)x\right]dx\right\}.$$

(b) $A=a(b+k), B=a(c+1)-k(b+k), C=-ck;$

$$y=\exp\left(-\frac{ax^2}{2}+kx\right)\times$$

$$\times\left\{C_1+C_2\int x^{-c}\exp\left[\frac{ax^2}{2}-(b+2k)x\right]dx\right\}.$$

(c) $A=-ak,\ B=a(c-1)-k(b+k),$

$C=b(c-1)+k(c-2)$:

$$y=x^{1-c}e^{kx}\left\{C_1+C_2\int x^{c-2}\exp\left[-\frac{ax^2}{2}-(b+2k)x\right]dx\right\}.$$

(d) $A=-ak,\ B=-k(b+k),\ C=-ck$:

$$y=e^{kx}\left\{C_1+C_2\int x^{-c}\exp\left[-\frac{ax^2}{2}-(b+2k)x\right]dx\right\}.$$

H. Görtler, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23 (1943), p.234.

2.126. $xy''+(2ax^3-1)y'+(a^2x^3+a)x^2y=0.$

$$y=(C_1+C_2x^2)\exp\left(-\frac{1}{3}ax^3\right).$$

2.126a. $xy''+(ax^b+2)y'+cx^{b-1}y=0.$

当$c=a,\ a(b+1),\ ab$时，得到特解 $x^{-1},\ \exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right),\ x^{-1}\exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right)$；根据第一部分24.2节，可以得到通解.

关于$c=amb$或$c=a(mb+1)$的情况，见 J. Zbornik. *Akad. Wien* 166(1957), p. 42.

2.126b. $xy''+(x^{a+1}-a)y'+bx^{2a+1}y=0,\quad a\neq-1.$

$$y=C_1e^{\alpha_1X}+C_2e^{\alpha_2X}\quad 当\ b\neq\frac{1}{4}时,$$

其中$X=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$，而α_1,α_2是方程$\alpha^2+\alpha+b=0$的两个不同的根. 当 $b=\frac{1}{4}$时，则有

$$y=e^X(C_1+C_2x^{a+1}).$$

2.127. $xy''+(2ax\ln x+1)y'+(a^2x\ln^2x+a\ln x+a)y=0.$

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\text{ 其中 }y_1=\left(\frac{e}{x}\right)^{ax},\ y_2=y_1'.$$

2.127a. $xy''-2(x\operatorname{tg}x+1)y'+2y\operatorname{tg}x=0.$

$$y=C_1(\operatorname{tg}x-x)+C_2(x\operatorname{tg}x+1).$$

2.128. $xy''+[xf(x)+2]y'+f(x)y=0.$

$$xy=C_1+C_2\int\exp\left[-\int f(x)\,dx\right]dx.$$

2.129. $(x-3)y''-(4x-9)y'+(3x-6)y=0.$

$$y=e^{x}\left[C_1+C_2\int e^{2x}(x-3)^3dx\right].$$

2.130. $2xy''+y'+ay=0,\ a\neq0.$

方程 2.162(1) 的特殊情况．假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $2x=\pm\xi^2$, 则直接得到

$$y=\begin{cases}C_1\cos\sqrt{2ax}+C_2\sin\sqrt{2ax} & \text{当 }2ax>0\text{ 时},\\ C_1\operatorname{ch}\sqrt{|2ax|}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{|2ax|} & \text{当 }2ax<0\text{ 时}.\end{cases}$$

2.131. $2xy''-(x-1)y'+ay=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\pm\xi^2$, 则得到方程 2.44

$$\pm\eta''-\xi\eta'+2a\eta=0.$$

2.132. $2xy''-(2x-1)y'+ay=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $x=\xi^2$, 则得到方程 2.46

$$\eta''-2\xi\eta'+2a\eta=0.$$

2.133. $(2x-1)y''-(3x-4)y'+(x-3)y=0.$

$$y=e^{x}\left[C_1+C_2\int e^{-\frac{1}{2}x}(2x-1)^{-\frac{5}{4}}dx\right].$$

2.134. $4xy''-(x+a)y=0.$

经过变换 $y=xe^{-\frac{1}{2}x}u(x)$, 则化为方程 2.113

$$xu''+(2-x)u'-\left(\frac{a}{4}+1\right)u=0,$$

而经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=2i\xi$, 则化为方程 2.92

$$\xi\eta''+\left(\xi-\frac{1}{2}ia\right)\eta=0.$$

2.135. $\boldsymbol{4xy''+2y'-y=0.}$

$$y=\begin{cases}C_1\operatorname{ch}\sqrt{x}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{x} & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ C_1\cos\sqrt{|x|}+C_2\sin\sqrt{|x|} & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.136. $\boldsymbol{4xy''+4y'-(x+2)y=0}$；方程 2.138 的特殊情况.

$$y=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1+C_2\int\frac{e^{-x}}{x}dx\right).$$

如果边界条件为："在点 $x=0$ 处 $y(x)$ 是正则的，而当 $x\to\infty$ 时 $y(x)\to0$"，则格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}(x+\xi)}\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\quad \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时};$$

当 $x\geqslant\xi$ 时，在此公式的右端，x 和 ξ 应当交换位置.

2.137. $\boldsymbol{4xy''+4y'-(x+2)y+\lambda y=0.}$ 也可参阅 2.138.

相应于边界条件"在点 $x=0$ 处 $y(x)$ 是正则的，而当 $x\to\infty$ 时 $y(x)\to0$"的特征值为 $\lambda=4n\ (n=0,1,2,\cdots)$，特征函数为 $e^{-\frac{1}{2}x}L_n(x)$（契比雪夫－拉盖尔正交函数），其中

$$L_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}C_n^{\nu}(n-\nu)!x^{\nu}$$

是契比雪夫-拉盖尔多项式；这些多项式是下列展开式中的系数：

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{xt}{t-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

见 Courant 和 Hilbert, Ⅰ, 324; Watson p. 100; 契比雪夫-拉盖尔

(在正半轴上的)正交规范化函数

$$l_n(x)=\frac{1}{n!}e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$$

当 $n=1,2,\cdots,10$ 和 $0\leqslant x\leqslant 34$ 时的表，见 F Tricomi, *Atti della R Accad di Scienze Torino* **76**(1941). [也可参阅方程 2.46 处所指出的文献.——俄译本编者注.]

2.138. $4xy''+4my'-(x-2m-4n)y=0.$

假设 $y=e^{-\frac{1}{2}x}u(x)$, 则得到方程 2.113(1)，其中未知函数 y 换为 u。

2.138 a. $4xy''+4(x+a)y'+xy=0;$

方程 2.162(16)的特殊情况.

$$y=x^{\frac{1-a}{2}}e^{-\frac{x}{2}}Z_{1-a}(\sqrt{-2ax}).$$

2.139. $16xy''+8y'-(x+a)y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$, 则得到方程 2.87，其中变量x, y 换为ξ, η.

2.140. $axy''+by'+cy=0.$

将此方程乘以 x, 则得到方程 2.162 (1) 的特殊情况. 也可参阅 2.104。

2.141. $axy''+(bx+3a)y'+3by=0.$

$$y=\exp\left(-\frac{b}{a}x\right)\left[C_1+C_2\int x^{-3}\exp\frac{b}{a}x\,dx\right].$$

2.142. $5(ax+b)y''+8ay'+c(ax+b)^{\frac{1}{5}}y=0.$

假设 $\eta(\xi)=\xi y(x)$, $\xi=(ax+b)^{\frac{3}{5}}$, 则得到常系数方程

$$9a^2\eta''+5c\eta=0.$$

2.143. $2axy''+(bx+a)y'+cy=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\pm\xi^2$, 则得到方程 2.52

$$\pm a\eta''+b\xi\eta'+2c\eta=0.$$

2.144. $2axy''+(bx+3a)y'+cy=0$.

假设 $\eta(\xi)=\xi y(x)$, $x=\pm\xi^2$, 则得到方程 2.52

$$\pm a\eta''+b\xi\eta'+(2c-b)\eta=0.$$

2.145. $(a_2x+b_2)y''+(a_1x+b_1)y'+(a_0x+b_0)y=0$,

$$|a_2|+|b_2|>0.$$

当 $a_2=0$ 时，得到 2.54 型的方程。如果 $a_2\neq0$，那么经过变换 $y(x)=e^{sx}\eta(\xi)$, $a_2\xi=a_2x+b_2$, 其中 s 是方程 $a_2s^2+a_1s+a_0=0$ 的根，则化为方程

$$a_2\xi\eta''+\left[(2sa_2+a_1)\xi+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2}\right]\eta'+$$

$$+\left(\frac{a_2b_0-a_0b_2}{a_2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2}s\right)\eta=0.$$

如果这里 $2sa_2+a_1=0$，那么乘以 ξ，则得到方程 2.162 (1)的特殊情况。在一般情况下，此方程属于退化的超几何方程 2.273(9)的类型。关于借助于曲线积分的解的表示式，见第一部分 22.4 节。

关于 $a_0=0$ 时的多项式的解，见第一部分22.5节和 A Sansone. *Atti Accad Lincei* (6), 15(1932), p 125—130, 194—197; A Mambriani, *Annali Pisa*(2),7(1938),p 191—194.

如果对于原方程，有

$$(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)=(a_0b_2-a_2b_0)^2,$$

则 e^{kx} 是解，其中 k 是两个方程

$$a_2k^2+a_1k+a_0=0,\ b_2k^2+b_1k+b_0=0,$$

的公共的根。

2.145 a. $(ax+b)y''+s(cx+d)y'-$

$$-s^2[(a+c)x+b+d]y=0.$$

特解：$y=e^{sx}$；根据第一部分 24.2 节，可求得其余

的解.

146—221. $x^2y''+\cdots$

2.146. $x^2y''-6y=0$; 2.14 和 2.148 的类型.

$$y=C_1x^3+C_2x^{-2}.$$

2.147. $x^2y''-12y=0$; 2.14 和 2.148 的类型.

$$y=C_1x^4+C_2x^{-3}.$$

2.148. $x^2y''+ay=0$; 2.14 和 2.187 的类型.

$$\frac{y}{\sqrt{x}}=\begin{cases} C_1\cos(b\ln x)+C_2\sin(b\ln x) & \text{当 } b^2=a-\frac{1}{4}>0 \text{ 时},\\ C_1x^b+C_2x^{-b} & \text{当 } b^2=\frac{1}{4}-a>0 \text{ 时},\\ C_1+C_2\ln x & \text{当 } a=\frac{1}{4} \text{ 时}. \end{cases}$$

2.149. $x^2y''+(ax+b)y=0$; 方程 2.162(1)的特殊情况.

2.150. $x^2y''+(x^2-2)y=0$.

$$y=C_1\sin(x+C_2)+\frac{C_1}{x}\cos(x+C_2).$$

2.151. $x^2y''=(ax^2+2)y$; 方程 2.153 的特殊情况.

$$y=C_1\left(\sqrt{a}-\frac{1}{x}\right)e^{x\sqrt{a}}+C_2\left(\sqrt{a}+\frac{1}{x}\right)e^{-x\sqrt{a}}.$$

2.152. $x^2y''+(a^2x^2-6)y=0$; 方程 2.153 的特殊情况.

$$y=C_1\left[\frac{3}{ax}\cos(ax+C_2)+\left(1-\frac{3}{a^2x^2}\right)\sin(ax+C_2)\right].$$

2.153 $x^2y''+[ax^2-\nu(\nu-1)]y=0$; 见 2.162(7).

假设 $u(x)=x^{-\nu}y$, 则得到方程 2.105, 其中 y, a, b 各量换为 $u, 2\nu, a$. 如果 $\nu=n$ 是某一个自然数,则有

$$y=x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{x\sqrt{-a}}+C_2e^{-x\sqrt{-a}}).$$

如果$-\nu=a$ 是非负整数,则 $\nu(\nu-1)=n(n+1)$;因而,

$$y=x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1}(C_1e^{x\sqrt{-a}}+C_2e^{-x\sqrt{-a}}).$$

2.154. $x^2y''+(ax^2+bx+c)y=0.$

见 2.273 (6)，而当 $b=0$ 时，也可参阅 2.153. 假设 $y(x)=\eta(\xi)\sqrt{x}$, $\xi=\ln x$, 则得到方程 2.20

$$\eta''+\left(ae^{2\xi}+be^{\xi}+c-\frac{1}{4}\right)\eta=0.$$

这里讨论的方程在物理学中称为“辐射波动方程”.

当 $a=-\beta^2$, $b=-2\alpha\beta$, $c=\alpha-\alpha^2$ 时，则有

$$y=x^{\alpha}e^{\beta x}\left(C_1+C_2\int x^{-2\alpha}e^{-2\beta}dx\right).$$

关于此方程的近似解，见 F. Arnot, *Proceedings Cambridge* **32**(1936), p. 161—178；封闭形式的解，见 J. Zbornik, *Akad Wien* **166**(1957), p. 61. [书末的附录中援引了本文的结果.——俄译本编者注.]

2.155. $x^2y''+[ax^k-b(b-1)]y=0.$

方程 2.162(1)的特殊情况.

假设 $y=x^b\eta(\xi)$, $\xi=x^{1-2b}$, 则得到 2.14 型的方程

$$(1-2b)^2\eta''+a\xi^r\eta=0,\ 其中\ r=\frac{k}{1-2b}-2.$$

而假设 $y=x^{1-b}\eta(\xi)$, $\xi=x^{2b-1}$, 则得到另一个 2.14 型的方程

$$(1-2b)^2\eta''+a\xi^s\eta=0,\ 其中\ s=\frac{k}{2b-1}-2.$$

因此，如果 $r=0$ 或 $s=0$，则得到常系数方程.

2.156. $x^2y''+\dfrac{y}{\ln x}=xe^x(2+x\ln x).$

$$y=e^x\ln x+C_1\ln x+C_2\ln x\int\frac{dx}{\ln^2x}.$$

2.157. $x^2y''+ay'-xy=0.$

关于此方程借助于定积分的解法，见 Graf. *Math Ann* **56** (1903), p. 432 以及以后.

2.158. $x^2y''+ay'-(b^2x^2+ab)y=0.$

$$y=e^{bx}\left[C_1+C_2\int\exp\left(\frac{a}{x}-2bx\right)dx\right].$$

2.159. $x^2y''+xy'-y=ax^2.$

$$y=\frac{a}{3}x^2+C_1x+\frac{C_2}{x}.$$

2.160 $x^2y''+xy'+ay=0$；欧拉方程(第一部分，22.3 节).

$$y=\begin{cases}C_1|x|^\nu+C_2|x|^{-\nu} & \text{当 } a=-\nu^2<0 \text{ 时},\\ C_1\sin(\nu\ln|x|)+C_2\cos(\nu\ln|x|) & \text{当 } a=\nu^2>0 \text{ 时},\\ C_1+C_2\ln|x| & \text{当 } a=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

当研究特征值问题时（对此也可参阅 2.164），通常利用此方程的自共轭形式，并且假设 $a=-\nu^2$：

$$(xy')'-\frac{\nu^2}{x}y=0.$$

关于 $\nu=0$ 时的基本解和格林公式，见 2.93. 如果 $\nu>0$，则基本解具有下列形式：

$$\frac{1}{4\nu}\left|\frac{\xi}{x}-\left(\frac{x}{\xi}\right)^\nu\right|.$$

相应于边界条件"当 $x\to0$ 时 $y(x)$ 有界，$\alpha y(1)+\beta y'(1)=0$"的问题的格林函数为：

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^\nu}{2\nu}\left(\dfrac{\alpha-\nu\beta}{\alpha+\nu\beta}\xi^\nu-\xi^{-\nu}\right) & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{\xi^\nu}{2\nu}\left(\dfrac{\alpha-\nu\beta}{\alpha+\nu\beta}x^\nu-x^{-\nu}\right) & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}.\end{cases}$$

2.161. $x^2y''+xy'-(x+a)y=0$；见 2.162(3).

2.162. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$；贝塞耳方程.

[研究贝塞耳方程和贝塞耳函数的文献非常丰富. 在 Watson

的书中，有十分详尽的叙述，还包含各种表．也可参阅 Whittaker 和 Watson，第 17 章；Янке, Эмде 和 Лёш；Sansone，第Ⅲ章，§ 6；Couraut 和 Hilbert 第Ⅶ章；Д. Джексон, Ряды фурье и ортогональные полиномы, 1948；М А Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965；Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963；А. Кратцер и В Франц, Трансцендентные функции, 1963；Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi．贝塞耳函数在实用问题中具有重大意义，例如见 Т. Карман и И. М. Био, Математические методы в инженером деле, 1948；Э. Грей и Г Мэтьюз, функции Бесселя и их Приложения к физике и механике, 1953．——俄译本编者注．]

贝塞耳方程属于退化的超几何方程2.273的类型（也可同 2.403 相比较）．贝塞耳方程的自共轭形式如下：

$$(xy')'+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0.$$

其不变量（见第一部分 25.1 节）为：

$$I=1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}.$$

经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=-x$，此方程的形式不变．所以，如果只限于实的 x 值，那么研究区域 $x>0$ 便足够了．如果 ν 不是整数，并且我们不限于 $x>0$ 的区域，那么以后，我们将 x^ν 理解为沿着由点 $x=0$ 发出的射线剪开的复 x 平面上的单值解析函数．对于对数项也应当是这样．

第一类贝塞耳函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

（ν 不等于任何负整数，对于所有 x 值级数收敛）和第二类贝塞耳函数

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\quad(\nu\text{ 为非整数}),$$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)=$$

$$=\frac{2}{\pi}J_n\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\frac{\Gamma'(n+k+1)}{(n+k)!}+\frac{\Gamma'(k+1)}{k!}\right]$$

(n 为非负整数)

均为给定的微分方程的解。如果 ν 为非整数，则

$$y_\nu=C_1J_\nu+C_2J_{-\nu}$$

是通解；特别是，当 $\nu=n+\frac{1}{2}(n=0,1,2,3,\cdots)$时，通解为

$$y_{n+\frac{1}{2}}=x^{n+\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left[\frac{1}{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)\right]\right\}.$$

在任何情况下(ν 可以认为是非负的)，柱函数

$$Z_\nu(x)=C_1J_\nu+C_2Y_\nu\quad(C_1,C_2\text{ 为任意常数})$$

包括了所有的解．这是一些超越函数，并且如果 2ν等于奇整数，则它们可以通过所谓的初等超越函数来表示(见 2.14；Watson, p. 38,117,120．)

在 ν 为非整数的情况下，朗斯基行列式等于

$$W(J_\nu,J_{-\nu})=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}.$$

函数

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

称为**第三类贝塞耳函数**或**汉克尔函数**．函数$i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$和 $i^{-(\nu+1)}H_\nu^{(2)}(-ix)$，如果对于所有的幂次均取主值，则

为实函数．汉克尔函数的意义在于：这是贝塞耳方程满足边界条件

$$\lim_{r\to\infty}H_\nu^{(1)}(re^{i\vartheta})=0,\quad \lim_{r\to\infty}H_\nu^{(2)}(re^{-i\vartheta})=0$$

$(\varepsilon\leqslant\vartheta\leqslant\pi-\varepsilon,\ \varepsilon>0)$ 的唯一的一些解．（见 Courant 和 Hilbert, p. 408．）

详细地研究一下贝塞耳函数．这里必须指出贝塞耳函数的下列性质．

对于整数 n，函数 J_n 是展开式

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$$

中的系数．如果形式上假设 $J_{-n}=(-1)^nJ_n$．其次：

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x,\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x,$$

而对于自然数 k：

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^k(2x)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^k}{d(x^2)^k}\left(\frac{\sin x}{x}\right);$$

$$\frac{1}{2}xJ_\nu=(\nu+1)J_{\nu+1}-(\nu+3)J_{\nu+3}+(\nu+5)J_{\nu+5}-\cdots$$

（由绝对值组成的级数，在每一个有限区间上均匀收敛）；

$$Y_n(x)=(-2x)^n\frac{d^nY_0(x)}{d(x^2)^n},$$

$$\frac{\pi}{2}Y_0(x)=J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)_k}{k}J_{2k}(x)$$

$(C=0.577\cdots$——欧拉常数$)$；

$$\frac{d}{dx}x^\nu Z_\nu(x)=x^\nu Z_{\nu-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}x^{-\nu}Z_\nu(x)=-x^{-\nu}Z_{\nu+1}(x),$$

$$2\nu Z_\nu(x)=x[Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)];$$

在最后三个公式的第一个和第三个中的 $\nu-1$，第二个中的 ν，均不能取负的整数值.

对于整数 $n\geqslant 0$ 和大的 x，则有

$$\sqrt{\pi x}\,J_{2n}(x)=(-1)^n(\cos x+\sin x)+O(x^{-2}),$$

$$\sqrt{\pi x}\,J_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}(\cos x-\sin x)+O(x^{-2}).$$

同一类的方程. 在各种数学应用中遇到的其他许多方程，均可化为贝塞耳方程. 对于下面指出的方程，其相应的变换可以从解的形式直接看出，由此也不难找到使这些方程彼此之间相互转化的变换. 要了解这里所列举的方程的详细情况，也可参阅本手册适当之处，那里引入了这些方程.

$$x^2y''+axy'+(bx^m+c)y=0\quad m\neq 0; \tag{1a}$$

$$b\neq 0:\qquad y=x^{\frac{1-a}{2}}Z_\nu\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\,x^{\frac{m}{2}}\right)$$

$$\text{当}\quad \nu=\frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2-4c}\ \text{时},$$

$$b=0:\quad y=\begin{cases} C_1x^{\frac{1-a+\mu}{2}}+C_2x^{\frac{1-a-\mu}{2}} \\ \qquad\qquad \text{当}\ \mu=\sqrt{(1-a)^2-4c}\neq 0\ \text{时}, \\ x^{\frac{1-a}{2}}(C_1+C_2\ln x) \\ \qquad\qquad \text{当}\ (1-a)^2-4c=0\ \text{时}. \end{cases}$$

$$x^2y''+(1-2a)xy'+(b^2c^2x^{2b}+a^2-\nu^2b^2)y=0; \tag{1 b}$$

$$y=\begin{cases} x^aZ_\nu(cx^b) & \text{当}\ b\neq 0,\quad c\neq 0\ \text{时}, \\ C_1x^{a-b\nu}+C_2x^{a+b\nu} & \text{当}\ b\neq 0,\quad c=0,\ \nu\neq 0\ \text{时}, \\ x^a(C_1+C_2\ln x) & \text{当}\ b=0\ \text{或}\ b\neq 0, c=0, \nu=0\ \text{时}. \end{cases}$$

这些公式的特殊情况是：

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0;\quad Z_\nu(ix); \tag{2}$$

$$x^2y''+xy'-(x+\nu^2)y=0;\quad Z_{2\nu}(2i\sqrt{x}); \tag{3}$$

$$x^2y''+xy'+\frac{1}{4}(x-\nu^2)y=0;\quad Z_\nu(\sqrt{x});\tag{4}$$

$$x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)y=0;\quad Z_\nu(x^2);\tag{5}$$

$$x^2y''+(1-2\nu)xy'+\nu^2(x^{2\nu}+1-\nu^2)y=0;\quad x^\nu Z_\nu(x^\nu);\tag{6}$$

$$x^2y''-[cx^2+p(p-1)]y=0;\quad \sqrt{x}Z_{p-\frac{1}{2}}(i\sqrt{c}x);\tag{7}$$

$$xy''+(1-2\nu)y'+xy=0;\quad x^\nu Z_\nu(x);\tag{8}$$

$$xy''-2py'-cxy=0;\quad x^{p+\frac{1}{2}}Z_{p+\frac{1}{2}}(i\sqrt{c}x);\tag{9}$$

$$y''-cx^{2q-2}y=0;\quad \sqrt{x}Z_{\frac{1}{2q}}\left(i\sqrt{c}\frac{x^q}{q}\right),\tag{10}$$

也可参阅2.14；

$$y''\pm xy=0;\tag{11}$$

$$\sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right),\quad \sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}}\right).$$

下列两个结果比(1)更为一般：

$$y''-\left[2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right]y'+$$

$$+\left[\frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right)-\frac{f''}{f}-\nu^2\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0,\tag{12a}$$

$$f=f(x),\quad g=g(x);\quad y=f(x)Z_\nu[g(x)];$$

$$y''-\left[\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right]y'+$$

$$+\left[\frac{h'}{h}\left(\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right)-\frac{h''}{h}+g'^2\right]y=0,\tag{12b}$$

$$g=g(x),\quad h=h(x);\quad y=hg^\nu Z_\nu(g).$$

特殊情况:

$$y'' + \frac{f'}{f}y' + \left[\frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{g'''}{g'} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0; \quad (13)$$

$$y = \sqrt{\frac{fg}{g'}}Z_\nu(g);$$

$$y'' + \left[\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0; \quad (14)$$

$$y = \sqrt{\frac{g}{g'}}Z_\nu(g);$$

$$y'' - \left[\frac{g''}{g'} + (2\mu - 1)\frac{g'}{g}\right]y' +$$

$$+ \left[(\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0; \quad (15)$$

$$y = g^\mu Z_\nu(g);$$

$$x^2y'' - [(2a - 1) + 2bcx^c]xy' +$$

$$+ [a^2 - \nu^2\beta^2 + (2a - c)bcx^c + b^2c^2x^{2c} + \alpha^2\beta^2x^{2\beta}]y = 0;$$

$$y = x^a e^{bx^c} Z_\nu(\alpha x^\beta); \quad (16)$$

$$x^2y'' - [(2a - 1) + 2bcx^c]xy' +$$

$$[(a^2 - \nu^2c^2) + (2a - c)bcx^c + (b^2 + b^2)c^2x^{2c}]y = 0; \quad (17)$$

$$y = x^a e^{bx^c} Z_\nu(dx^c);$$

$$x^2y'' - [(2a - 1) \pm 2ibcx^c]xy' +$$

$$+ [(a^2 - \nu^2c^2) \pm (2a - c)ibcx^c]y = 0; \quad (18)$$

$$y=x^{a}e^{\pm ibx^c}Z_\nu(bx^c);$$

$$x^2(x^2-1)^2y''+[(1-4a)x^2-1]x(x^2-1)y'+$$
$$+[(x^2-\nu^2)(x^2-1)^2+4a(a+1)x^4-2ax^2(x^2-1)]y=0; \tag{19}$$

$$y=|x^2-1|^aZ_\nu(x);$$

$$x^2y''+(x-2x^2\text{tg}x)y-(x\text{tg}x+\nu^2)y=0; \frac{1}{\cos x}Z_\nu(x); \tag{20}$$

$$x^2y''+(x+2x^2\text{ctg}x)y'+(x\text{ctg}x-\nu^2)y=0; \tag{21}$$

$$y=\frac{1}{\sin x}Z_\nu(x);$$

$$x^2y''+(x-2x^2f)y'+[x^2(1+f^2-f')-xf-\nu^2]y=0, \tag{22}$$

$$f=f(x);\quad y=Z_\nu(x)\exp\int f dx;$$

$$x^2y''+2axy'+[(b^2e^{2cx}-\nu^2)c^2x^2+a(a-1)]y=0; \tag{23}$$
$$y=x^{-a}Z_\nu(be^{cx});$$

$$x^4y''+\left(e^{\frac{2}{x}}-\nu^2\right)y=0;\qquad y=xZ_\nu\left(e^{\frac{1}{x}}\right); \tag{24}$$

也可参阅 2.343. 其解可由贝塞耳函数来表示的高阶微分方程，号数如下：

3.6,3.8,3.32,3.35,3.42,3.43,3.51—3.53,3.61,
3.67,3.83;4.22,4.24—4.26,4.33,4.36—4.38;
5.9,5.11.

也可参阅 J. Zbornik *Akad Wien* 166(1957),p. 21—56.

2.163. $\boldsymbol{x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=f(x)}$;

非齐次贝塞耳方程.

由 2.162, 可以求出对应的齐次方程的解. 如果已知非齐次方程的一个特解，则其所有的解也便可以得知. 因为

$$J_\nu Y'_\nu - J'_\nu Y_\nu = \frac{2}{\pi x},$$

则(见第一部分,24.2 节(a))

$$\frac{\pi}{2} Y_\nu(x) \int x J_\nu(x) f(x) dx - \frac{\pi}{2} J_\nu(x) \int x Y_\nu(x) f(x) dx$$

是解.

(A)如果$f(x)=x^\rho$,则有熟知的解的级数展开式(洛梅尔函数):

(a) $f(x)=x^{\nu+2n}$, n 为自然数:

$$y=(-1)^{n-1}(n-1)!2^{\nu+2n-2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\frac{\Gamma(\nu+n)}{k!\Gamma(\nu+k+1)};$$

这里

$$\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu+k+1)}=(\nu+n-1)(\nu+n-2)\cdots(\nu+k+1).$$

(b) $f(x)=x^\rho$, 无论$\rho+\nu$, 还是$\rho-\nu$, 都不是$\leqslant 0$的整数:

$$y=2^{\rho-2}\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2k}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+k+1\right)}.$$

(c) $f(x)=x^{\nu-2n}$, n 为非负整数, ν 不等于任何$\leqslant n$的整数:

$$y=\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!2^{-\nu+2n+2}}\left[2J_\nu\ln\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{\Gamma(\nu-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2k}-\right.$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right)\Bigg];$$

这里，当 $n=0$ 时，第一个和认为等于零。

Watson, 345; Whittaker 和 Watson.

(B) $f(x)=\dfrac{4\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$; 施特鲁韦函数

$$H_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+1}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+k+\frac{3}{2}\right)}$$

是解。

如果 $\varphi(x)$ 是具有任意函数 $f(x)$ 的原方程的某一个解，则

$$x^a\varphi(bx^c)\quad(b\neq 0, c\neq 0)$$

是方程

$$x^2y''+(1-2a)xy'+(b^2c^2x^{2c}+a^2-\nu^2c^2)y=c^2x^af(bx^c) \tag{1}$$

的解，而

$$x^ae^{bx^c}\varphi(dx^c)$$

是方程

$$\begin{aligned}x^2y''-[(2a-1)x+2bcx^{c+1}]y'+\\+[(a^2-\nu^2c^2)+(2a-c)bcx^c+(b^2+d^2)c^2x^{2c}]y=\\=c^2x^ae^{bx^c}f(dx^c)\end{aligned} \tag{2}$$

的解。

2.164. $x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0.$

根据 2.162(1)，柱函数 $y=Z_\nu(x\sqrt{\lambda})$ 是解。

如果 ν 固定，而 λ 为参数，其值由边界条件"$y(1)=0$，当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"来确定，则相应的特征函数是 $y=J_\nu(x\sqrt{\lambda})$，其中特征值 λ 由条件 $J_\nu(\sqrt{\lambda})=0$ 来确定；对于第 n 个特征值，则有 $\lambda_n\sim(n\pi)^2$。

对于具有边界条件"当 $0<x<\infty$ 时 $y(x)$ 有界"的问题，贝塞耳函数 $y=J_\nu(x\sqrt{\lambda})$ $(\lambda\geqslant 0)$ 是特征函数；因此，这个特征值问题具有连续谱。同给定的函数 $f(x)$ 按特征函数展开相对应，这里有下列积分表示式：

$$f(x)=\int_0^\infty tJ_\nu(tx)g(t)dt，\text{其中}g(t)=\int_0^\infty \xi J_\nu(\xi t)f(\xi)d\xi.$$

Courant 和 Hilbert. p. 293, 424.

2.165. $x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)y=0$；见 2.162(5)。

2.165a. $x^2y''+(x+a)y'-y=0$.

$$y=C_1(x+a)+C_2xe^{\frac{a}{x}}.$$

2.166. $x^2y''-xy'+y=3x^3$.

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+\frac{3}{4}x^3.$$

2.167. $x^2y''-xy'+(ax^m+b)y=0$；见 2.162(1)。

2.168. $x^2y''+2xy'=0$，即 $(x^2y')'=0$.

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}；\ \text{基本解：}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}\right|.$$

对于具有条件"$y(1)=\alpha y'(1)$，当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"的边值问题，格林函数具有下列形式：

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+1-\dfrac{1}{\xi} & \text{当 } 0<x\leqslant\xi \text{ 时},\\[2ex] \alpha+1-\dfrac{1}{x} & \text{当 } \xi\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.169. $x^2y''+2xy'+(ax-b^2)y=0$;

方程 2.162(1)的特殊情况。

2.170. $x^2y''+2xy'+(ax^2+b)y=0$。

方程 2.162(1) 的特殊情况。如果 $b=-n(n-1)$ (n 为自然数)，那么假设 $y=x^{n-1}u(x)$，则得到方程2.105

$$xu''+2nu'+axu=0.$$

所以，例如，方程

$$x^2y''+2xy'-(a^2x^2+2)y=0$$

具有解

$$x^2y=C_1(ax-1)e^{ax}+C_2(ax+1)e^{-ax}.$$

2.171. $x^2y''+2xy'+[\lambda x^2+ax-n(n+1)]y=0$。

如果向此方程补充边界条件"$y(x)$当 $x\to0$ 时趋向于确定极限，而当 $x\to\infty$时保持有界"，那么：第一，一切正数 λ，第二，使得 $l=\dfrac{a}{2\sqrt{-\lambda}}$为大于 n 的整数的那些负数 λ，均为特征值；因此，其谱由连续部分以及收敛于零的可数序列组成。当求此方程幂级数形式的解时，可以得到对应于谱的第一部分的特征函数。对应于谱的第二部分的特征函数具有下列形式：

$$y=x^n\exp\left(-\frac{a}{2l}x\right)L_{n+1}^{(2n+1)}\left(\frac{a}{l}x\right),$$

其中 L_n 是契比雪夫-拉盖尔多项式。

Courant 和 Hilbert, p 294—296.

2.172. $x^2y''+2(x-1)y'+ay=0$;

方程 2.162(17) 的特殊情况。

2.173. $x^2y''+2(x+a)y'-b(b-1)y=0$。

假设 $y(x)=\eta(\xi)\xi^be^{-a\xi}$, $\xi=-x^{-1}$，则得到贝塞耳方程 2.162(9)

$$\xi\eta'' + 2b\eta' - a^2\xi\eta = 0.$$

2.174. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$.

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{x^5}{12}\left(\ln x - \frac{7}{12}\right).$$

2.175. $x^2y'' - 2xy' - 4y = x\sin x + (ax^2 + 12a + 4)\cos x$.

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^{-1} - a\cos x - \frac{2a+1}{x}\sin x.$$

2.176. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$;

方程 2.179 的特殊情况

$$y = C_1 x\sin x + C_2 x\cos x.$$

2.177. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = \frac{x^2}{\cos x}$.

$$y = x\sin x\ln|x| - x\cos x\int_0^x \frac{\operatorname{tg} x}{x}dx + C_1 x\sin x + C_2 x\cos x.$$

J Rose, *Mathesis* 45(1931), p 31.

2.178. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = \frac{x^3}{\cos x}$.

$$y = x^2\sin x + x\cos x\ln|\cos x| + C_1 x\sin x + C_2 x\cos x.$$

2.179. $x^2y'' - 2xy' + (a^2x^2 + 2)y = 0$;

方程 2.162(1) 的特殊情况.

$$y = C_1 x\cos ax + C_2 x\sin ax.$$

2.180. $x^2y'' + 3xy' + (x^2 + 1 - \nu^2)y = f(x)$.

对应的齐次方程是方程 2.162(1) 的特殊情况，并且具有解$\frac{1}{x}Z_\nu(x)$. 所以，给定的非齐次方程可以按第一部分 24.2 节(a)中指出的方法求解.

如果 $f(x) = \rho x^{-\nu+2n+1}$ (ρ 任意，n 为整数，ν 为非整数，或者 ν 为大于 n 的整数)，则**洛梅尔函数**

$$\rho\frac{2^{2n-\nu-1}}{\Gamma(\nu-n)}n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu-1}$$

是解。

Watson, p 276.

如果 $\nu=n$，而且

$$f(x)=\begin{cases}x & (n\geqslant 0\text{ 并为偶数})\\ n & (n\geqslant 0\text{ 并为奇数}),\end{cases}$$

则下列诺伊曼多项式$\left(\frac{1}{x}\text{的多项式}\right)$满足方程：

$$y=O_n(x)=\frac{1}{4}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}n}\frac{n(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n-1}$$

当 $n>0$ 时

和 $O_0(x)=\frac{1}{x}$。

2.181. $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$.

$$y=\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\left[C_1+C_2\int\frac{1}{x}\exp\frac{1}{x}dx\right].$$

2.182. $x^2y''-3xy'+4y=5x$.

$$y=5x+C_1x^2+C_2x^2\ln|x|.$$

2.183. $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$.

$$y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln|x|.$$

2.184. $x^2y''-4xy'+6y=x^4-x^2$.

$$y=\frac{x^4}{2}+x^2\ln|x|+C_1x^2+C_2x^3.$$

2.185. $x^2y''+5xy'-(2x^3-4)y=0$;

方程2.162 (1)的特殊情况。

2.186. $x^2y''-5xy'+8y=x^3\operatorname{sh}x$.

$$y=C_1x^2+C_2x^4-\frac{1}{2}x^2\operatorname{ch}x+\frac{1}{2}x^4\int\frac{\operatorname{sh}x}{x^2}dx.$$

2.187. $x^2y''+axy'+by=0$；欧拉方程(第一部分,22.3节)。

由条件：$\alpha+\beta=1-a$, $\alpha\beta=b$ 确定 α, β. 如果 α 和 β 是实数，则解具有下列形式：

$$y=\begin{cases}C_1x^\alpha+C_2x^\beta & \text{当 } \alpha\neq\beta \text{ 时,}\\ x^\alpha(C_1+C_2\ln x) & \text{当 } \alpha=\beta \text{ 时.}\end{cases}$$

如果 $\alpha,\beta=r\pm is$ 是复数，则解具有下列形式：

$$y=x^r[C_1\cos(s\ln x)+C_2\sin(s\ln x)].$$

2.187 a. $x^2y''+2axy'+[(b^2e^{2cx}-\nu^2)x^2+a(a-1)]y=0$；见 2.162(23)。

2.188. $x^2y''+(ax+b)y'+cy=0$.

假设 $y(x)=e^\xi\xi^\nu\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$, 其中 ν 是方程

$\nu^3+\nu(1-a)+c=0$ 的根，则得到方程 2.120

$$\xi\eta''+[(2-b)\xi+(2\nu+2-a)]\eta'+$$
$$+[(1-b)\xi+2\nu+2-a-b\nu]\eta=0.$$

当 $b=1$, $c=a-2$ 时，原方程具有解：

$$y=x^{2-a}e^{\frac{1}{x}}\left(C_1+C_2\int x^{a-4}e^{-\frac{1}{x}}\,dx\right).$$

2.188 a. $x^2y''+(ax+b)y'+(cx^2+dx+e)y=0$.

假设 $y=x^{-\frac{a}{2}}\,e^{\frac{b}{2x}}u(x)$ (见第一部分，16.3 节)，则得到方程

$$x^2u''+\left[cx^2+dx+e+\frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+b\left(1-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{x}-\frac{b^2}{4x^2}\right]u=0.$$

因而，特别是，如 $b=0$，则得到

$$x^2u''+\left[cx^2+dx+e+\frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)\right]u=0.$$

2.189. $x^2y''+axy'+(bx^m+c)y=0$；见 2.162(1),6.84.

当且仅当：$b=0$(欧拉方程的情况)，或 $4[(a-1)^2-4c]=m^2(2n+1)^2$ (其中 n 为自然数) 时，此方程的解可以通过初等超越函数来表示。

2.190. $x^2y''\pm x^2y'+(ax+b)y=0$;

退化的超几何方程。见2.407。

假设 $y=u(x)\exp\left(\mp\frac{1}{2}x\right)$，则得到方程2.273

$$x^2u''+\left(-\frac{1}{4}x^2+ax+b\right)u=0.$$

当 $a=0$ 时，此方程是方程2.162(1)的特殊情况。

在取上面的符号的情况下，当 $a=0, b=-2$ 时，则有

$$y=C_1\left(1-\frac{2}{x}\right)+C_2\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x}.$$

Whittaker 和 Watson, p 337.

2.191. $x^2y''+x^2y'-2y=0$.

$$y=C_1\frac{x-2}{x}+C_2\frac{x+2}{2x}e^{-x}.$$

2.191 a. $x^2y''+x^2y'+(ax^2+b)y=0$.

当方程2.162(16)中的常数取下列数值时：

$$a=-b=\frac{1}{2},\quad c=\beta=1,\quad \alpha^2=a-\frac{1}{4},\quad \nu^2=\frac{1}{4}-b,$$

则可得到这一特殊情况。

2.192. $x^2y''+(x^2-1)y'-y=0$.

$$y\exp x=C_1+C_2\int\exp\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$$

2.193. $x^2y''+x(x+1)y'+(x-9)y=0$.

$$y=\frac{x^2-8x+20}{x^3}\left(C_1+C_2\int\frac{x^5e^{-x}}{(x^2-8x+20)^2}dx\right).$$

2.194. $x^2y''+x(x+1)y'+(3x-1)y=0$.

$$y=x(x-3)e^{-x}\left(C_1+C_2\int\frac{e^x dx}{x^3(x-3)^2}\right).$$

2.195. $x^2y''+(x+3)xy'-y=0.$

假设 $y=x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}u(x)$，则可作为惠特克方程 2.273 的标准形式得到

$$4x^2u''=(x^2+6x+7)u.$$

2.196. $x^2y''-x(x-1)y'+(x-1)y=0.$

$$y=C_1x+C_2x\int e^x x^{-3}dx.$$

2.197. $x^2y''-(x^2-2x)y'-(x+a)y=0;$

方程 2.162(16)的特殊情况.

2.198. $x^2y''-(x^2-2x)y'-(3x+2)y=0.$

$$y=xe^x\left(C_1+C_2\int\frac{e^{-x}}{x^4}dx\right).$$

2.199. $x^2y''-x(x+4)y'+4y=0.$

$$y=x^4e^x\left(C_1+C_2\int x^{-4}e^{-x}dx\right).$$

2.200. $x^2y''+2x^2y'-\nu(\nu-1)y=0;$

方程 2.162(16)的特殊情况.

当 $\nu=n+\frac{1}{2}$ 时的解，在下列著作中研究过并且编成了表：

T Okaya. *Proc Phys.-math. Soc Japan* (3), 21 (1939), p 287—298.

2.201. $x^2y''+x(2x+1)y'-4y=0.$

$$y=C_1\frac{2x^2-4x+3}{3x^2}+C_2\frac{2x+3}{x^2}e^{-2x}.$$

2.202. $x^2y''-2x(x+1)y'+2(x+1)y=0.$

$$y=C_1x+C_2xe^{2x}.$$

2.203. $x^2y''+ax^2y'-2y=0.$

$$axy=C_1(ax-2)+C_2(ax+2)e^{-ax}.$$

2.204. $x^2y''+(a+2b)x^2y'+[(a+b)bx^2-2]y=0;$

方程 2.162(17)的特殊情况。

$$y=C_1\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{2}\right)e^{-bx}+C_2\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{2}\right)e^{-(a+b)x}.$$

2.205. $x^2y''+ax^2y'+f(x)y=0.$

假设

$$y=u\ \exp\left(-\frac{1}{2}ax\right),$$

则得到

$$x^2u''+\left[f(x)-\frac{1}{4}a^2x^2\right]u=0.$$

2.205a. $x^2y''+x(x+a)y'+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2y=0.$

假设 $y=x^{\frac{1-a}{2}}u(x)$，则得到方程 2.107

$$xu''+(x+1)u'+\frac{1-a}{2}u=0.$$

2.206. $x^2y''+(2ax+b)xy'+(cx^2+abx+d)y=0;$

方程 2.162(16)当 $c=\beta=1$ 时的特殊情况。

2.206 a. $x^2y''+(2ax+b)xy'+(a^2x^2+cx+d)y=0;$

方程 2.162(16) 当 $c=1, \beta=\frac{1}{2}$ 时的特殊情况。

2.207. $x^2y''+(ax+b)xy'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y=0$; 见2.215.

2.207 a. $x^2y''+(ax+b)xy'+(A(a-A)x^2+$
$+(aB+bA-2AB)x+B(b-B-1))y=0.$

$$y=x^{-B}e^{-Ax}\left(C_1+C_2\int x^{2B-b}e^{(2A-a)x}dx\right).$$

2.208. $x^2y''+x^3y'+(x^2-2)y=0.$

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{x}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right).$$

2.209. $x^2y''+(x^2+2)xy'+(x^2-2)y=0.$

$$y=C_1\frac{E}{x^2}+C_2\left(\frac{1}{x}-\frac{E}{x^2}\int\frac{dx}{E}\right),$$

$$\text{其中}\quad E=E(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

2.209 a. $x^2y''-x(x^2-1)y'-(x^2+1)y=0;$

方程 2.162(17)的特殊情况。

$$y=\frac{1}{x}\left(C_1+C_2e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

2.210. $x^2y''-2x(x^2-a)y'+$
$+\{2nx^2+[(-1)^n-1]a\}y=0.$

在解当中存在多项式 $P_n(x)$，即当 $a>-\frac{1}{2}$ 和 $n=0,1,2,\cdots$时，如果使得 $1,x,x^2,\cdots$各幂正交化：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}|x|^{2a}P_m(x)P_n(x)dx=0,\quad \text{当 } m\neq n \text{ 时},$$

则可得到这些多项式.

2.211. $x^2y''+4x^3y'+(4x^4+2x^2+1)y=0.$

假设 $u(x)=e^{x^2}y$，则得到方程 2.187

$$x^2u''+u=0,$$

因而

$$y=\sqrt{x}\,e^{-x^2}[C_1\cos(\alpha\ln x)+C_2\sin(\alpha\ln x)]$$

$$\text{当}\quad \alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3}\ \text{时}.$$

2.212. $x^2y''+(ax^2+b)xy'+f(x)y=0;$

见 2.125 a，而对于特殊形式的函数 $f(x)$，也可参

阅 2.215.

2.212 a. $x^2y''+(ax^2+bx+c)xy'+$
$$+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)y=0.$$

(a) $A=ar,\ B=as+br-r^2,\ C=bs+cr-2rs,$
$$D=s(c-s-1):$$
$$y=x^{-s}e^{-rx}\left\{C_1+C_2\int x^{2s-c}\exp\left[(2r-b)x-\frac{ax^2}{2}\right]dx\right\}.$$

(b) $A=a(b-r),\ B=a(c-s+1)+r(b-r),$
$$C=bs+cr-2rs,\ D=s(c-s-1):$$
$$y=x^{-s}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}-rx\right)\times$$
$$\times\left\{C_1+C_2\int x^{2s-c}\exp\left[\frac{ax^2}{2}+(2r-b)x\right]dx\right\}.$$

2.213. $x^2y''+(x^3+1)xy'-y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi),\ 3\xi=x^3$，则得到方程 2.195
$$\xi^2\eta''+(\xi+3)\xi\eta'-\eta=0.$$

2.214. $x^2y''+[-x^4+(2n+2a+1)x^2+(-1)^na-a^2]y=0.$

假 设 $y=u(x)x^a\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$，则得到方 程 2.210，

其中未知函数 y 换为 u.

2.215. $x^2y''+(ax^n+b)xy'+(\alpha x^{2n}+\beta x^n+\gamma)y=0,$

n 不一定是整数.

如果 k 是方程
$$n^2k^2+(b-1)kn+\gamma=0$$
的根，那么经过变换 $y(x)=\xi^k\eta(\xi),\ \xi=x^n$，则化为方程
$$n^2\xi\eta''+[na\xi+2kn^2+n(n-1+b)]\eta'+$$
$$+(\alpha\xi+kna+\beta)\eta=0.$$

此方程属于 2.120 型，而在某些情况下，即当

$$4\alpha\neq a^2 \text{ 和 } 2\beta=\alpha(b+n-1)$$

时，属于 2.162(17)型；此外，在某些情况下，原方程可以化为 2.162(16)型.

$$x^2y''+(ax^b+2c)xy'+$$
$$+[a(b+c+d-1)x^b+c(c-1)-d(d-1)]y=0,$$

$$y=x^{d-c}\exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right)\left[C_1+C_2\int x^{-2d}\exp\frac{ax^b}{b}dx\right];$$

$$x^2y''+(ax^b+2c)xy'+$$
$$+[a(c-d)x^b+c(c-1)-d(d-1)]y=0,$$

$$y=x^{b-c}\left[C_1+C_2\int x^{-2d}\exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right)dx\right].$$

2.216. $\boldsymbol{x^2y''+(ax^a+b)xy'+}$

$$\boldsymbol{+(Ax^{2\alpha}+Bx^a+Cx^\beta+D)y=0;}$$

见 2.162(16).

2.216 a. $\boldsymbol{x^2y''-2x^2y'\operatorname{tg}x+ay=0.}$

假设 $u(x)=y\cos x$, 则得到方程 2.153.

$$x^2u''+(x^2+a)u=0.$$

2.216 b. $\boldsymbol{x^2y''+2x^2y'\operatorname{ctg}x+ay=0.}$

假设 $u(x)=y\sin x$, 则得到同情况 2.216 a 中一样的方程.

2.216 c. $\boldsymbol{x^2y''-(2x\operatorname{tg}x-1)xy'-(x\operatorname{tg}x+a)y=0.}$

假设 $u(x)=y\cos x$, 则得到方程 2.162

$$x^2u''+xu'+(x^2-a)u=0.$$

2.216 d. $\boldsymbol{x^2y''+(2x\operatorname{ctg}x+1)xy'+(x\operatorname{ctg}x-a)y=0.}$

假设 $u(x)=y\sin x$, 则得到同情况 2.216 c 中一样的方程

2.217. $x^2y''-(2x^2\operatorname{tg}x-x)y'-(x\operatorname{tg}x+a)y=0$;

见 2.162(20).

2.218. $x^2y''+(2x^2\operatorname{ctg}x+x)y'+(x\operatorname{ctg}x+a)y=0$;

见 2.162(21).

2.218 a. $x^2y''+xfy'+[xf'+(a-1)f+a(1-a)]y=0,$

$$f=f(x).$$

$$y=x^a e^{-F}\left(C_1+C_2\int x^{-2a}e^F dx\right) \quad 其中\ F=\int\frac{f(x)}{x}dx.$$

2.218 b. $x^2y''+x(f+2a)y'+$

$+[(a+bx)f-b^2x^2+a(a-1)]y=0,\ f=f(x).$

$$y=x^{-a}e^{-bx}\left\{C_1+C_2\int\exp\left(2bx-\int\frac{f(x)}{x}dx\right)dx\right\}.$$

2.219. $x^2y''+2xfy'+(xf'+f^2-f+ax^2+bx+c)y=0,$

$$f=f(x).$$

假设 $u(x)=y\exp\int\frac{f}{x}dx$, 则得到方程 2.154，其中未知函数 y 换为 u.

2.220. $x^2y''+2x^2fy'+[x^2(f'+f^2+a)-\nu(\nu+1)]y=0,$

$$f=f(x).$$

假设 $u(x)=y\exp\int fdx$, 则得到方程 2.153，其中未知函数 y 换为 u.

2.221. $x^2y''+(x-2x^2f)y'+$

$+[x^2(1+f^2-f')-xf-\nu^2]y=0,$

$f=f(x)$; 见 2.162(22).

222—250. $(x^2\pm a^2)y''+\cdots$

2.222. $(x^2+1)y''+xy'+2y=0$; 方程 2.297 的特殊情况.

$$y=C_1\cos u+C_2\sin u,\ u=\sqrt{2}\ \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

2.223. $(x^2+1)y''+xy'-9y=0$; 方程 2.297 的特殊情况.

$$y=C_1(4x^2+3)x+C_2(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}.$$

2.224. $(x^2+1)y''+xy'+ay=0$; 方程 2.297 的特殊情况.

2.225. $(x^2+1)y''-xy'+y=0.$

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$$

2.225 a. $(x^2+1)y''-xy'-24y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi),\xi=ix$，则得到 2.231 a 的第二个特殊情况，其中变量 x,y 换为 ξ,η.

2.226. $(x^2+1)y''+2xy'-\nu(\nu+1)y=0$; 见 2.240(1).

2.227. $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0.$

$$y=C_1x+C_2(x^2-1).$$

2.228. $(x^2+1)y''+3xy'+ay=0.$

将方程

$$(x^2+1)u''+xu'+(a-1)u=0$$

微分，则得到

$$(x^2+1)u'''+3xu''+au'=0.$$

所以 $y=u'$，其中 u 是方程(1)的任意解. 方程(1)可以根据 2.297 求解.

2.229. $(x^2+1)y''+4xy'+2y=2\cos x-2x$;

全微分方程.

$$(x^2+1)y=C_1+C_2x-\frac{x^3}{3}-2\cos x.$$

2.230. $(x^2+1)y''+axy'+(a-2)y=0$; 全微分方程.

$$y=(x^2+1)^{1-\frac{1}{2}a}\left[C_1+C_2\int(x^2+1)^{\frac{1}{2}a-2}dx\right].$$

2.231. $(x^2-1)y''-\nu(\nu+1)y=0$;

方程 2.240(14)当 $a=n=1$ 时的特殊情况.

2.231 a. $(x^2-1)y''-xy'+ay=0$;

方程 2.247 a 的特殊情况.

$$a=-3:\quad y=C_1(2x^3-3x)+C_2|x^2-1|^{\frac{3}{2}};$$

$$a=-24:\quad y=C_1(64x^6-120x^4+60x^2-5)+$$

$$+C_2x(8x^2-3)|x^2-1|^{\frac{3}{2}}.$$

2.232. $(x^2-1)y''-n(n+1)y+P_n'(x)=0$,

P_n 是 n 次勒让德多项式; Q_n 是第二类 n 阶勒让德球函数[见 2.240.——俄译本编者注.]

$$y=\frac{1}{2}P_{n-1}(x)+C_1(P_{n+1}-P_{n-1})+C_2(Q_{n+1}-Q_{n-1}).$$

2.232 a. $(x^2-1)y''+ay'-6y=0$.

解之一是:

$$y=|x+1|^{1+\frac{a}{2}}|x-1|^{1-\frac{a}{2}}(4x-a);$$

根据第一部分 24.2 节(b)的方法,可以得到其余的解.

2.233. $(x^2-1)y''-n(n+1)y+Q_n'(x)=0$.

采用 2.232 的符号, 其解具有下列形式:

$$y=\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)+C_1(P_{n+1}-P_{n-1})+C_2(Q_{n+1}-Q_{n-1}).$$

2.234. $(x^2-1)y''+xy'+2=0$.

这是对于 y' 的一阶线性方程. 于是得到

$$y=C_1+C_2u\pm u^2;$$

如果 $|x|<1$, 则 $u=\arcsin x$, 并且应当取上面的符号;

如果 $|x|>1$, 则 $u=\operatorname{arch} x$, 并且应当取下面的符号.

2.235. $(x^2-1)y''+xy'+ay=0$.

(a) $a=\alpha^2>0$. 其解为:

$$y=\begin{cases}C_1\cos(\alpha\,\mathrm{arch}\,|x|)+C_2\sin(\alpha\,\mathrm{arch}\,|x|) & \text{当}\,|x|>1\text{时},\\ C_1\exp(\alpha\arccos x)+C_2\exp(-\alpha\arccos x) & \text{当}\,|x|<1\text{时};\end{cases}$$

(b) $a=-\alpha^2<0$。其解为：

$$y=\begin{cases}C_1\exp(\alpha\,\mathrm{arch}\,|x|)+C_2\exp(-\alpha\,\mathrm{arch}\,|x|) & \text{当}\,|x|>1\text{时},\\ C_1\cos(\alpha\arccos x)+C_2\cos(\alpha\arcsin x) & \text{当}\,|x|<1\text{时};\end{cases}$$

(c) 如果 $a=-n^2$(n 为自然数)，则在解之中，有契比雪夫多项式

$$T_n(x)=2^{-n+1}\cos(n\arccos x)。$$

Courant 和 Hilbert. I, p. 75, 283, 439.

(d) 特征值问题：

$(x^2-1)y''+xy'-\lambda y=0$，"当 $x=\pm 1$ 时，$y(x)$是正则的"，——具有特征值 $\lambda=n^2$(n 为整数)，而特征函数是契比雪夫多项式 $T_n(x)$。

2.236. $(x^2-1)y''+xy'+f(x)y=0$.

当$|x|<1$时，经过变换

$$y(x)=\eta(\xi),\ x=\cos\xi,\ k\pi<\xi<(k+1)\pi,$$

则化为方程

$$\eta''=\eta f(\cos\xi),$$

即化为希尔方程 2.30，而当$|x|>1$时，经过变换

$$y=\eta(\xi),\quad |x|=\mathrm{ch}\xi$$

则化为方程

$$\eta''+f(\mathrm{ch}\xi)\eta=0.$$

原方程的直接研究，见 Ince. p 385以及以后；也可参阅 Poole. *Proceedings London Math Soc* (2), 20 (1922), p. 374.

2.237. $(x^2-1)y''+2xy'=0$.

$$y=C_1+C_2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

基本解：$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x-1)(\xi+1)}{(x+1)(\xi-1)}\right|$.

在边界条件为“在区间 $-1<x<1$ 上 $y(x)$ 有界”的情况下，$y=C$ 是非零解．所以，对此边值问题，只存在具有下列形式的广义格林函数：

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-x)(1+\xi)+\ln 2-\frac{1}{2} & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时,}\\ -\frac{1}{2}\ln(1+x)(1-\xi)+\ln 2-\frac{1}{2} & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时.}\end{cases}$$

2.238. $(x^2-1)y''+2xy'=a$.

$$y=a\ln|x+1|+C_1+C_2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

2.239. $(x^2-1)y''+2xy'-\lambda y=0$.

此方程实质上同勒让德方程 2.240 是一样的．边界条件“在区间 $-1<x<1$ 上 $y(x)$ 有界”相应于（简单的）特征值 $\lambda=n(n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$ 和规范化的特征函数 $\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x)$，其中 P_n 是勒让德多项式．

Courant 和 Hilbert, I, p. 280.

2.240. $(x^2-1)y''+2xy'-\nu(\nu+1)y=0$；勒让德方程．

［文献：Courant 和 Hilbert, I; Whittaker 和 Watson, 第 15 章；Янке, Эмде 和 Лёш; Sansone; Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Н. Н. Лебедев, Специальные Функции и их приложение, 1963; Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi 关于同偏微分方程的联系，例如见：С. Л. Соболев, Методы математической физики, 1954（中译本：С. Л. 索伯列夫，数学物理方

法，高等教育出版社，1958)第XXIX，XXX章．——俄译本编者注．]

由方程2.407，当 $a_1=-1$，$b_2=0$，$a_2=a_3=b_1=b_3=1$，$\alpha_1=\beta_1=\alpha_3=\beta_3=0$，$\alpha_2=-\nu$，$\beta_2=\nu+1$ 时，则得到此方程，因而可将其化为超几何方程2.260．其次，由方程2.410，当 $a=1$，$b=2$，$p=2$，$q=0$，$r=-\nu(\nu+1)$，$s=0$ 时，也可得到此方程．

也常常将经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$，$x=\cos\xi$ 得到的方程

$$\eta''\sin\xi+\eta'\cos\xi+\nu(\nu+1)\eta\sin\xi=0,$$

理解为勒让德方程．

此方程的自共轭形式如下：

$$[(x^2-1)y']'-\nu(\nu+1)y=0.$$

给定的方程的不变量等于

$$I=\frac{1}{(x^2-1)^2}-\frac{\nu(\nu+1)}{x^2-1}.$$

经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=-x$，此方程化为其本身．所以，如果限于实的数值 x，则只考虑区域 $x>0$ 便足够了．如果不局限于区域 $x>0$，则对于非整数 ν，x^ν 应当看作是沿着从点 $x=0$ 出发的射线剪开的复 x 平面上的单值解析函数．对于对数项，也应当是这样．

解的幂级数表示．

(A)当 $|x|<1$ 时，利用上面指出的勒让德方程同超几何方程之间联系，则得到下列形式的解：

$$y=C_1F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1+\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right)+$$
$$+C_2xF\left(\frac{1-\nu}{2},1+\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right),$$

其中 F 是超几何级数2.260(10)．

(B)当$|x|>1$时，假设

$$y_\nu(x)=x^\nu+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{C_\nu^{2k}\cdot C_\nu^k}{C_{2\nu}^{2k}}x^{\nu-2k};$$

这里2ν不应当等于任何奇的自然数；如果ν是自然数，则在上述公式中应当去掉分子包含因子零的各项。

(a) 2ν不等于任何奇的自然数。这时，通解是

$$y=C_1y_\nu+C_2y_{-\nu-1}.$$

(b) $2\nu=2p+1$, p=非负整数。这时，通解具有下列形式：

$$y=C_1y_\nu^*+C_2y_{-\nu-1};$$

这里

$$y_\nu^*=\lim_{\rho\to\nu}\frac{(\rho-\nu)y_\rho-\frac{1}{2}\lambda_\rho(\nu)y_{-\rho-1}}{\rho-\nu}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu-\frac{1}{2}}(-1)^k\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-2k+1)x^{\nu-2k}}{2^kk!(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots(2\nu-2k+1)}+$$

$$+\lambda_\nu(\nu)y_{-\nu-1}\ln x+$$

$$+\lambda_\nu(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)x^{-\nu-1-2k}}{2^kk!(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)},$$

其中

$$\lambda_\rho(\nu)=$$

$$=(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{\rho(\rho-1)\cdots(\rho-2\nu)}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)!(2\rho-1)(2\rho-3)\cdots(2\rho-2\nu+2)},$$

$$A_k = A_k(\nu) = \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{2\nu+2\varkappa+1}\right) - \sum_{\varkappa=1}^{2k}\frac{1}{\nu+\varkappa},$$

而在 y_ν^* 的表达式中第一个和式的第一项等于 x^ν.

(c) $2\nu = -(2q+1)$, $q=1,2,3,\cdots$ 通解是:

$$y = C_1 y_\nu + C_2 y^*_{-\nu-1},$$

其中 y^* 具有(b)中指出的数值.

(d) $\nu = -\dfrac{1}{2}$.通解是:

$$y = C_1 y_{-\frac{1}{2}} + C_2 y^*_{-\frac{1}{2}},$$

这里

$$y^*_{-\frac{1}{2}} = \lim_{\nu\to-\frac{1}{2}} \frac{y_\nu - y_{-\nu-1}}{2\nu+1} =$$

$$= y_{-\frac{1}{2}} \ln x + 2\sum_{k=1}^{\infty} C_{4k}^{2k} C_{2k}^{k} A_k\left(-\frac{1}{2}\right)(4x)^{-\frac{1}{2}-2k},$$

其中 A_k 具有(b)中指出的数值.

勒让德函数. 当 $x>1$ 时, 如果 2ν 或者是负整数, 或者是正的奇数,则假设

$$P_\nu(x) = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)} y_\nu(x)$$

(Γ 为伽马函数);而如果 2ν 不等于任何小于 -1 的整数,则假设

$$Q_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)} y_{-\nu-1}.$$

这些函数称为**第一类和第二类勒让德函数**, 也称为第一类和第二类**球函数**(带谐函数). 关于这些函数的积分表示式, 见第一部分, 19.5 节.

如果 $\nu=n$ 为自然数,则

$$y=\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\left[C_1+C_2\left(\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2}{x+1}\right)^k\right)\right]\right\}.$$

J. Zbornik. *Akad Wien* **166** (1957), p. 50.

这时，我们得到第一类勒让德多项式

$$P_n(x)=2^{-n}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^kC_n^kC_{2n-2k}^n x^{n-2k}=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

由此

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

同时，例如，

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ Q_1(x)=\frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1}-1,$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{2}P_2(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x.$$

当$-\infty<x<+\infty$时，$P_n(x)$满足所研究的方程．对于自然数 $\nu=n$ 和$|x|>1$，通解具有下列形式：

$$y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x).$$

为了解非齐次方程所应用的朗斯基行列式具有下列形式：

$$W(P_n,Q_n)=P_nQ_n'-P_n'Q_n=(1-x^2)^{-1}.$$

勒让德函数已有详尽的研究．这里必须指出下述情况：$P_n(x)$是展开式

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

的系数．其次，

$$\nu P_\nu(x)=(2\nu-1)xP_{\nu-1}(x)-(\nu-1)P_{\nu-2}(x),$$

$$(x^2-1)P'_\nu(x)=\nu xP_\nu(x)-\nu P_{\nu-1}(x);$$

由此得到

$$xP'_\nu(x)-P'_{\nu-1}(x)=\nu P_\nu(x).$$

多项式 $P_n(x)$的所有零点都是实数，并且处于-1和$+1$之间．我们有

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

$P_n(x)$ 在区间$-1\leqslant x\leqslant+1$上构成正交系，并且

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n \text{ 时},\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{当 } m=n \text{ 时}.\end{cases}$$

如果$f(x)$在区间$-1<x<+1$上是有界变差函数，则

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x),$$

其中

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1}f(t)P_n(t)\,dt.$$

特别是，

$$x^n=2^nn!\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}n}\frac{(2n-4k+1)(n-k)!}{2^{2k}k!(2n-2k+1)!}P_{n-2k}(x).$$

关于多项式 P_n 作为特征值问题的解，见2.239.

勒让德函数也能够借助于曲线积分来表示，例如

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-x)^{n+1}}dt,$$

其中复 t 平面上的积分路径取正向围绕点 $t=x$ 的封闭

曲线. 其次,

$$P_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^\nu d\varphi,$$

$$Q_\nu(x)=\int_0^\infty\frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{ch}\varphi)^{\nu+1}}\quad(\nu>-1).$$

关于借助于积分的表示，也可参阅第一部分19.5节。

同一类的方程. 如果通过 $y_\nu(x)$ 来表示勒让德方程的解，则以下指出的方程具有后面的解：

$$(x^2+1)y''+2xy'-\nu(\nu+1)y=0,\quad y=y_\nu(ix);\tag{1}$$

$$(x^2-1)y''+2(n+1)xy'-(\nu+n+1)(\nu-n)y=0,\tag{2}$$

$$y=y_\nu^{(n)}(x);$$

$$2x(x-1)y''+[(2\nu+5)x-(2\nu+3)]y'+(\nu+1)y=0,\tag{3}$$

$$y=x^{-\frac{\nu+1}{2}}y_\nu\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x(x^2+1)y''+(2x^2+1)y'-\nu(\nu+1)xy=0,\tag{4}$$

$$y=y_\nu(\sqrt{x^2+1});$$

$$x(x^2+1)y''+[2(n+1)x^2+2n+1]y'-$$

$$-(\nu-n)(\nu+n+1)xy=0,\quad y=y_\nu^{(n)}(\sqrt{x^2+1});\tag{5}$$

$$4x^2(x-1)y''+2x(3x-1)y'-\nu(\nu+1)(x-1)y=0,\tag{6}$$

$$y=y_\nu\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x^2(x^2+1)y''+x(2x^2+1)y'-[\nu(\nu+1)x^2+n^2]y=0,\tag{7}$$

$$y=x^n y_\nu^{(n)}(\sqrt{x^2+1}),\ n\geqslant 0\ \text{并且为整数};$$

$$x^2(x^2-1)y''+2x^3y'+\nu(\nu+1)y=0,\tag{8}$$

$$y=y_\nu\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$x^2(x^2-1)y''+2x^3y'-\nu(\nu+1)(x^2-1)y=0, \qquad (9)$$

$$y=y_\nu\left(\frac{x^2+1}{2x}\right);$$

$$x^2(x^2-1)y''+2x[(1-a)x^2+a]y'+$$
$$+\{[a(a-1)-\nu(\nu+1)]x^2-a(a+1)\}y=0, \qquad (10)$$

$$y=x^a y_\nu(x);$$

$$x^2(x^2-1)y''-[2bcx^c(x^2-1)+2(a-1)x^2-2a]xy'+$$
$$+\{b^2c^2x^{2c}(x^2-1)+bc(2a-c-1)x^{c+2}-bc(2a-c+1)x^c+$$
$$+[a(a-1)-\nu(\nu+1)]x^2-a(a+1)\}y=0, \qquad (11)$$

$$y=x^a e^{bx^c} y_\nu(x);$$

$$(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-[\nu(\nu+1)(x^2-1)++n^2]y=0, \qquad (12)$$

$$y=|x^2-1|^{\frac{1}{2}n}y_\nu^{(n)}(x),\ n\geqslant 0 \quad \text{并且为整数。}$$

如果 ν 是自然数，则解

$$P_\nu^n(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}n}P_\nu^{(n)}(x),\ Q_\nu^n(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}n}Q_\nu^{(n)}(x)$$

称为第一类和第二类 ν 次 n 阶勒让德伴随函数。见 2.371。

$$(x^2-1)^2y''-2(2a-1)x(x^2-1)y'+$$
$$+\{[2a(2a-1)-\nu(\nu+1)]x^2+2a+\nu(\nu+1)\}y=0, \qquad (13)$$

$$y=|x^2-1|^a y_\nu(x);$$

$$(x^2-1)^2y''+2(n+1-2a)x(x^2-1)y'+$$
$$+\{4a(a-n)x^2-[2a+(\nu+n+1)(\nu-n)](x^2-1)\}y=0, \qquad (14)$$

$$y=|x^2-1|^a y_\nu^{(n)}(x),\ n\geqslant 0 \ \text{并且为整数；}$$

$$4x^2(x-1)^2y''+2x(x-1)(3x-1)y'-$$
$$-[\nu(\nu+1)(x-1)^2+4n^2x]y=0, \qquad (15)$$

$$y = C_1 P_\nu^n\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right) + C_2 Q_\nu^n\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x(x^2-1)^2 y'' + (x^2-1)(3x^2-1)y' + \\ + [x^2 - 1 - (2\nu+1)^2] x y = 0, \tag{16}$$

$$y = |x^2-1|^{-\frac{1}{2}} y_\nu\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right);$$

$$(a^2x^{2b}-1)x^2y'' + [a^2(b+1)x^{2b} + b - 1]xy' - \\ - \nu(\nu+1)a^2b^2x^{2b}y = 0, \tag{17}$$

$$y = y_\nu(ax^b);$$

$$(b^2x^{2c}-1)x^2y'' + [(1+c-2a)b^2x^{2c} + 2a + c - 1]xy' + \\ + \{b^2[a(a-c) - c^2\nu(\nu+1)]x^{2c} - a(a+c)\}y = 0, \tag{18}$$

$$y = x^a y_\nu(bx^c);$$

$$y'' \sin x + (2n+1)y' \cos x + (\nu - n)(\nu + n + 1) y \sin x = 0, \tag{19}$$

$$y = y_\nu^{(n)}(\cos x);$$

$$y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x + [\nu(\nu+1)\sin^2 x - n^2]y = 0, \tag{20}$$

$$y = \sin^n x\, y_\nu^{(n)}(\cos x);$$

$$f^2 g'(g^2-1)y'' + [2fgg'^2 - (g^2-1)(fg'' + 2f'g')]fy' + \\ + \{(g^2-1)[f'(fg'' + 2f'g') - ff''g'] - \\ - [2f'g + \nu(\nu+1)fg']fg'^2\}y = 0, \\ f = f(x),\ g = g(x), \tag{21}$$

$$y = f(x) y_\nu(g(x));$$

$$(x^2-1)^2 y^{(4)} + 10x(x^2-1)y''' + \\ + \{8(3x^2-1) - 2[\mu(\mu+1) + \nu(\nu+1)](x^2-1)\}y'' - \\ - 6x[\mu(\mu+1) + \nu(\nu+1) - 2]y' + \{[\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1)]^2 - \\ - 2\mu(\mu+1) - 2\nu(\nu+1)\}y = 0, \tag{22}$$

$$y = y_\mu(x) y_\nu(x) \quad \text{当 } \mu \neq \nu \text{ 时.}$$

关于一个三阶方程，见3.82.

2.240 a. $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0.$

$$y=C_1x+C_2(x^2+1).$$

2.241. $(x^2-1)y''-2xy'-(\nu+2)(\nu-1)y=0;$

方程 2.240(14) 当 $n=a=2$ 时的特殊情况.

2.241a. $(x^2-1)y''+3xy'+ay=0.$

假设 $u(x)=y(x)\sqrt{|x^2-1|}$, 则得到方程 2.235

$$(x^2-1)u''+xu'+(a-1)u=0.$$

2.242. $(x^2-1)y''-(3x+1)y'-(x^2-x)y=0.$

$$y=(x+1)^2e^{-x}\left(C_1+C_2\int\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}e^{2x}dx\right).$$

2.243. $(x^2-1)y''+4xy'+(x^2+1)y=0.$

$$(x^2-1)y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

2.244. $(x^2-1)y''+2(n+1)xy'-(\nu+n+1)(\nu-n)y=0,$

n 为非负整数; 见 2.240(2).

2.245. $(x^2-1)y''-2(n-1)xy'-(\nu-n+1)(\nu+n)y=0;$

方程 2.240(14) 当 $a=n$ 时的特殊情况.

2.246. $(x^2-1)y''-2(\nu-1)xy'-2\nu y=0.$

$$y=|x^2-1|^{\nu}\left(C_1+C_2\int|x^2-1|^{-\nu-1}dx\right).$$

如果 $\nu=n$ 是自然数,那么微分 n 次并且假设 $u(x)=y^{(n)}$, 则得到勒让德方程 2.240, 其中 $\nu=n$, 未知函数 y 换为 u.

2.247. $(x^2-1)y''+2axy'+a(a-1)y=0.$

$$y=C_1|x+1|^{1-a}+C_2|x-1|^{1-a}.$$

2.247a. $(x^2-1)y''+axy'+by=0.$

在区间 $|x|<1$ 时,假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\sin\xi$,则得到方程 2.70

$$\eta''+(1-a)\eta'\operatorname{tg}\xi-b\eta=0,$$

而当 $x>1$ 和 $x<-1$ 时，分别假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\operatorname{ch}\xi$ 和 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=-\operatorname{ch}\xi$，则得到方程 2.65

$$\eta''+(a-1)\eta'\operatorname{cth}\xi+b\eta=0.$$

其次，经过变换 $y=|x^2-1|^{1-\frac{a}{2}}u(x)$，则将原方程化为方程

$$(x^2-1)u''+(4-a)xu'+(2-a+b)u=0.$$

如果 a 是奇的整数，则上述变换中的第一个更为可取。

2.248. $(x^2-1)y''+axy'+(bx^2+cx+d)y=0.$

假设 $y=e^{-\lambda\xi}\eta(\xi)$，$\xi=x-1$，$\lambda^2=-b$，则得到

$$\xi(\xi+2)\eta''+[-2\lambda\xi^2+(a-4\lambda)\xi+a]\eta'+$$
$$+[(c-a\lambda)\xi+b+c+d-a\lambda]\eta=0.$$

关于这个方程，见 2.261。关于原方程，也可参阅 2.240 (14)。

关于 $c=0$ 的情况，见 J. A Stratton, *Proceedings USA Academy* 21 (1935), p. 51—56, 316—321; E. Fisher, *Philos. Magazine* (7), 24 (1937), p. 245—256.

2.249. $(x^2-1)y''+(ax+b)y'+cy=0.$

关于这个方程，首先可以参阅勒让德方程 2.240，以及那里列举的其解能通过勒让德函数来表示的一些方程。假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$2\xi=x+1$，则得到超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(a\xi-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\eta'+c\eta=0.$$

关于利用定积分解此方程，见第一部分 § 19.

如果 $a>b$ 和 $a+b>0$，则当且仅当 $c=n(1-n-a)$ (n 为某一个非负整数)时，在解当中存在着多项式。在这种情况下，雅可比多项式是解(见 2.260)。

特别是可以得到：

当 $b=0$ 时，——超球面多项式；

当 $b=0, a=1$ 时，——第一类契比雪夫多项式

$$T_n(x)=\cos n\vartheta;$$

当 $b=0, a=2$ 时，——勒让德多项式；

当 $b=0, a=3$ 时，——第二类契比雪夫多项式

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta};$$

当 $b=1, a=3$ 时，

$$U_{2n}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta};$$

这里，处处有 $x=\cos\vartheta$.

2.250. $\boldsymbol{(x^2-a^2)y''+8xy'+12y=0.}$

$$y=C_1|x+a|^{-3}+C_2|x-a|^{-3}.$$

251—303. $(ax^2+bx+c)y''+\cdots$

2.251. $\boldsymbol{x(x+1)y''-(x-1)y'+y=0;}$

超几何方程 2.260，自变量为 $-x$.

$y=C_1(x-1)+C_2[(x-1)\ln|x|-4x]$.

2.252. $\boldsymbol{x(x+1)y''+(ax+b)y'+cy=0.}$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=-x$，则得到超几何方程2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+(a\xi-b)\eta'+c\eta=0.$$

2.253. $\boldsymbol{x(x+1)y''+(3x+2)y'+y=0;}$

方程 2.252 的特殊情况.

$$y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln|x+1|).$$

2.254. $(x^2+x-2)y''+(x^2-x)y'-(6x^2+7x)y=0$.

$$y=(x-1)e^{2x}\left\{C_1+C_2\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 e^{-5x}dx\right\}.$$

2.255. $x(x-1)y''+ay'-2y=0$.

此方程是全微分方程；它等价于线性方程

$$x(x-1)y'-(2x-a-1)y=C,$$

其中 C 为任意常数.

2.255a. $x(x-1)y''+ay'+by=0$；方程2.260的特殊情况.

特解为：

$b=-6$： $y=|x|^{1+a}|x-1|^{1-a}(4x-a-2)$；

$a=2$, $b=-6$： $y=x^3$；

$a=-2$, $b=-6$： $y=(x-1)^3$；

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{4}$： $y=|x|^{\frac{3}{2}}$.

2.256. $x(x-1)y''+(2x-1)y'-\nu(\nu+1)y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=1-2x$，则得到方程 2.240，其中变量 x，y 换为 ξ，η.

2.257. $x(x-1)y''+[(a+1)x+b]y'=0$.

$$y=C_1+C_2\int|x|^b|x-1|^{-a-b-1}dx$$

将此方程乘以 $-x^{-b-1}(1-x)^{a+b}$，则将其化为自共轭的形式

$$\frac{d}{dx}[x^{-b}(1-x)^{a+b+1}y']=0.$$

当 $0<x,\xi<1$ 时，基本解具有下列形式：

$$g(x,\xi)=\mp\frac{1}{2}\int^{x}T(t)dt \quad 当 \quad \begin{matrix}x\leqslant\xi\\ x\geqslant\xi\end{matrix} 时,$$

其中

$$T(t)=t^b(1-t)^{-a-b-1}.$$

具有下列条件的边值问题：

Ⅰ. 当 $x\to 0$ 时，y 和 y' 有界，

$$\text{当 } x\to 1 \text{ 时}, (1-x)^{a+b+1}\frac{y'}{y}\to A\neq 0;$$

Ⅱ. 当 $x\to 1$ 时，y 和 y' 有界，

$$\text{当 } x\to 0 \text{ 时}, x^{-b}\ \frac{y'}{y}\to B\neq 0;$$

Ⅲ. 当 $x\to 0$ 时，$x^{-b}\ \dfrac{y'}{y}\to B\neq 0$，

$$\text{当 } x\to 1 \text{ 时}, (1-x)^{a+b+1}\ \frac{y'}{y}\to A\neq 0,$$

对应于下列格林函数：

$$\Gamma_{\mathrm{I}}(x,\xi)=\frac{1}{A}+\int_1^{\xi}T(t)\,dt\quad (b<0,-1<a+b<0);$$

$$\Gamma_{\mathrm{II}}(x,\xi)=-\frac{1}{B}-\int_0^{x}T(t)\,dt\quad (-1<b<0,a+b>-1);$$

$$\Gamma_{\mathrm{III}}(x,\xi)=\frac{1}{C}\left(\int_0^{x}T\,dt+\frac{1}{B}\right)\left(\int_1^{\xi}T\,dt+\frac{1}{A}\right)$$

$$(-1<b<0,\ -1<a+b<0),\ C=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}+\int_0^{1}T\,dt.$$

这些公式仅当 $x\leqslant\xi$ 时给出 Γ 的值；当 $x\geqslant\xi$ 时，在上述公式的右端需要以 ξ 代替 x，以 x 代替 ξ。

2.258. $x(x-1)y''+(ax+b)y'+cy=0$；见 2.260.

当 $c=a-2$ 时，此方程是全微分方程；在这种情况下，它等价于线性方程

$$x(x-1)y'+[(a-2)x+b+1]y=C,$$

其中 C 为任意常数。

(a) $b=c=-a$; $y=(x-1)\left(C_1+C_2\int\frac{dx}{|x|^a(x-1)^2}\right)$;

(b) $b=\frac{1}{2}-a, c=\frac{a}{2}-\frac{3}{4}$:

$$y=|x|^{\frac{3}{2}-a}\left(C_1+C_2\int\frac{|x|^{a-\frac{5}{2}}}{\sqrt{|x-1|}}dx\right);$$

(c) $b=4$, $c=-3(a+2)$:

$$y=|x-1|^{-a-3}[(a+6)x-4]\left\{C_1+C_1\int\frac{x^4|x-1|^{a+2}}{[(a+6)x-4]^2}dx\right\};$$

(d) $a=2i-1, b=-2i-1, c=1-2i$; 解之一是

$$y=5x+4i-3.$$

也可参阅 2.268, 2.268 a, b, 2.269.

2.259. $\boldsymbol{x(x-1)y''+[(a+1)x+b]y'-\lambda y=0}$; 见 2.260.

相应于边界条件"当 $0<x<1$ 时, $y(x)$ 有界"的特征值是 $\lambda=n(n+a)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 而特征函数是雅可比多项式 $F(-n, n+a, b, x)$ (见 2.260).

2.260. $\boldsymbol{x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0}$;

高斯超几何方程,

[文献: Whittaker 和 Watson; Courant 和 Hilbert, I; Sansone, 第Ⅷ章, §4.5; В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 第Ⅲ卷, 第 2 部分, 1949, 369—376(中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第三卷, 高等教育出版社, 1954); Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948. Янке, Эмде 和 Лёш; Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; А. Кратцер и В. Франц, Трансцендентные функции, 1963; Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi. ——俄译本编者注.]

关于多个自变量的超几何函数, 见 P. Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques, polynomes d'Hermite.

Paris, 1926.

原方程可以简写为下列形式：

$$H(\alpha,\beta,\gamma,y,x)=0; \tag{1}$$

此方程和实质上与其等价的方程2.403，包含着许多重要的特殊情况。

此微分方程的不变量(见第一部分，25.1 节)等于

$$I=\frac{1-\lambda^2}{4x^2}+\frac{1-\mu^2}{4(x-1)^2}+\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{4x(x-1)},$$

其中

$$\lambda=\gamma-1,\quad \mu=\alpha+\beta-\gamma,\quad \nu=\alpha-\beta.$$

某一个基本解组的朗斯基行列式等于

$$y_1y_2'-y_2y_1'=C|x|^{-\gamma}|1-x|^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

方程的变量代换. 经过变换

$$y(x)=|x|^{1-\gamma}\eta(x),\quad x\neq 0 \tag{2}$$

可将方程(1)的解相互单值地转化为方程

$$H(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\eta,x)=0 \tag{3}$$

的解；经过变换

$$y(x)=|x-1|^{\gamma-\alpha-\beta}\eta(x),\quad x\neq 1 \tag{4}$$

可将(1)的解转化为方程

$$H(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\eta,x)=0 \tag{5}$$

的解；经过变换

$$y(x)=|x|^{-\alpha}\eta(\xi),\quad \xi=\frac{1}{x},\ x\neq 0 \tag{6}$$

可将(1)的解转化为方程

$$H(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\eta,\xi)=0 \tag{7}$$

的解；经过变换

$$y(x)=|x-1|^{-\alpha}\eta(\xi),\quad \xi=\frac{x}{x-1},\ x\neq 1 \tag{8}$$

可将(1)的解转化为方程

$$H(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \eta, \xi)=0 \tag{9}$$

的解. 如果允许变量取复数值,则绝对值符号应当去掉,或者换成括号. 关于变量代换,也可参阅 2.407.

解的幂级数表示. 因为经过变换(6)和(8)能将半直线 $x>1$ 和 $x<0$ 转化为区间 $0<\xi<1$,所以,如果只限于实数值 x,则对于区间 $0<x<1$ 求方程 (1) 的解便足够了. 这个解可以用超几何级数来表示:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)} x^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{\alpha+k-1}^k C_{\beta+k-1}^k}{C_{\gamma+k-1}^k} x^k; \tag{10}$$

这里,γ 不应当等于任何 $\leqslant 0$ 的整数. 当 $|x|<1$ 时,此级数显然是收敛的;借助于解析延拓,可以得到在沿着实轴从 $x=1$ 到 $x=+\infty$ 剪开的整个复平面上为正则的单值函数. 超几何函数的一些特殊情况(n 为自然数):

$$F(\alpha, -n, -n, x)=F(-n, \alpha, -n, x)=\sum_{k=0}^{n} C_{\alpha+k-1}^k x^k;$$

$$F(1,1,1,x)=F(1,\beta,\beta,x)=F(\alpha,1,\alpha,x)=\frac{1}{1-x};$$

$$F(-n,\beta,\beta,-x)=(1+x)^n;$$

$$nxF(1-n,1,2,x)=1-(1-x)^n;$$

$$2F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\frac{1}{2},x^2\right)=(1+x)^n+(1-x)^n;$$

$$2nxF\left(-\frac{n-1}{2},-\frac{n}{2}+1,\frac{3}{2},x^2\right)=(1+x)^n-(1-x)^n;$$

$$F(-n,1,-n,x)=\sum_{k=0}^{n}x^k;$$

$$xF(1,1,2,-x)=\ln(1+x);$$

$$2xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},x^2\right)=\ln\frac{1+x}{1-x};$$

$$xF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},x^2\right)=\arcsin x;$$

$$xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right)=\operatorname{arctg} x;$$

$$F\left(-n,\ n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},x^2\right)=(-1)^n\frac{2^n n!}{1\cdot3\cdots(2n-1)}P_{2n}(x);$$

$$xF\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},x^2\right)=(-1)^n\frac{2^n n!}{1\cdot3\cdots(2n+1)}P_{2n+1}(x),$$

其中 $P_m(x)$ 是勒让德多项式；

$$F(-n,n+a,b,x)=$$

$$=\frac{x^{1-b}(1-x)^{b-a}}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{b+n-1}(1-x)^{a+n-b}],$$

这是雅可比多项式。

由(10)直接得到

$$F'(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),$$

只要是 γ 不等于任何 $\leqslant 0$ 的整数。

当 $|x|<1$ 时，超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 满足方程(1)。当 $0<x<1$ 时，通解具有下列形式：

(a) γ 为非整数：

$$C_1F(\alpha,\beta,\gamma,x)+C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2,-\gamma,x);$$

(b) $\nu=-c$ 为整数，$c\geqslant-1$：

$$C_1y+C_2y^*,$$

其中

$$y=x^{c+1}F(\alpha+c+1,\beta+c+1,2+c,x),$$

$$y^*=\begin{cases}\lim\limits_{\gamma\to -c}\Big[F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\\ -\dfrac{\lambda_\gamma}{\gamma+c}x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)\Big] & \text{当 } c\geqslant 0 \text{ 时},\\ \lim\limits_{\gamma\to 1}\dfrac{1}{\gamma-1}[F(\alpha,\beta,\gamma,x)-\\ -x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)] & \text{当 } c=-1 \text{ 时}\end{cases}$$

和

$$\lambda_\gamma=\begin{cases}C_{\alpha+c}^{c+1}\dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+c)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+c-1)} & \text{当 } c\geqslant 1 \text{ 时},\\ \alpha\beta & \text{当 } c=0 \text{ 时},\\ 1 & \text{当 } c=-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

y^* 也可以表示为下列形式：

$$y^*=\lambda_{-c}x^{1+c}\ln x\cdot F(\alpha+c+1,\beta+c+1,2+c,x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{c}(-1)^k\frac{C_{\alpha+k-1}^{k}C_{\beta+k-1}^{k}}{C_c^k}x^k+$$

$$+\lambda_{-c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{\alpha+c+k}^{k}C_{\beta+c+k}^{k}}{C_{c+k+1}^{k}}A_k x^{c+1+k},$$

其中

$$A_k=\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{1}{\alpha+c+\varkappa}+\frac{1}{\beta+c+\varkappa}-\frac{1}{c+1+\varkappa}-\frac{1}{\varkappa}\right),$$

$\sum\limits_{k=0}^{c}$ 中的第一项等于 1，当 $c=-1$ 时假设此和式等于零，

且$\sum_{k=1}^{\infty}$中 A_k 的分母与处于 A_k 表达式中的分子形式上可约，甚至当 A_k 的分母等于零时也是这样.

(c) $\gamma=c, c$ 是$\geqslant 2$的整数. 经过变换(2)，则将这种情况化为情况(b).

用定积分表示的解. 例如，一个这种形式的解是

$$y=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

其中 $\gamma>\beta>0, |x|<1$. 也可参阅第一部分；19.5 节；第一部分；25.3 节.

有限形式的解. 除了超几何级数为中断的那些情况不算以外，在下列情况中，有限形式的解是熟知的：

$$H\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+1,y,x\right)=0,\ \alpha\neq 0; \tag{11}$$

$$y=C_1u^{-2\alpha}+C_2x^{-2\alpha}u^{2\alpha},\quad u=1+\sqrt{1-x}.$$

$$H\left(\alpha,\alpha-\frac{1}{2},\frac{1}{2},y,x\right)=0; \tag{12}$$

$$y=C_1(1+\sqrt{x})^{1-2\alpha}+C_2(1-\sqrt{x})^{1-2\alpha}.$$

$$H\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\frac{3}{2},y,x\right)=0; \tag{13}$$

$$y=C_1\frac{1}{u}(1+u)^{1-2\alpha}+C_2\frac{1}{u}(1-u)^{1-2\alpha},\quad u=\sqrt{x}.$$

$$H(1,\beta,\gamma,y,x)=0; \tag{14}$$

$$y=|x|^{1-\gamma}|x-1|^{\gamma-\beta-1}\left[C_1+C_2\int|x|^{\gamma-2}|x-1|^{\beta-\gamma}dx\right].$$

$$H(\alpha,\beta,\alpha,y,x)=0; \tag{15}$$

$$y=|x-1|^{-\beta}\left[C_1+C_2\int|x|^{-\alpha}|x-1|^{\beta-1}dx\right].$$

$$H(\alpha,\beta,\alpha+1,y,x)=0; \tag{16}$$

$$y=|x|^{-\alpha}\left[C_1+C_2\int|x|^{\alpha-1}|x-1|^{-\beta}dx\right].$$

代数解可按下述方式求得. 根据第一部分25.1节，如果已知方程

$$\{s,\quad x\}=2I \tag{17}$$

的一个解，其中 I 是原方程的不变量，则可以求出方程(1)的所有的解. 在许多情况下，可以指出方程(17)的解，因此可以研究方程(1)的所有代数解的集合.

当 α, β, γ 等于:

α	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
β	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{7}{24}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
γ	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$

时，方程(17)显式解，见下列著作：A R Forsyth. W Jacobsthal. Lehrbuch der Differentialgileichungen. 2Aufl.,Braunschweig, 1912, p. 238, 239, 240, 244.

在某些特殊情况下，其解可以通过完全椭圆积分来表示. 例如，方程

$$x(x-1)y''+\left(\frac{7}{6}x-\frac{2}{3}\right)y'+\frac{1}{144}y=0,$$

$$x(x-1)y''+\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}\right)y'+\frac{1}{144}y=0,$$

$$x(x-1)y''+\left(\frac{19}{6}x-\frac{5}{6}\right)y'+\frac{53}{48}y=0$$

均属于这种情况.

见 G H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. I, p 313.

[关于方程

$$2x(x-1)y''+(3x+1)y'-y=0,$$

见 2.312. 关于方程

$$9x(x-1)y''+3(3x-1)y'-y=0,$$

见 2.355. ——俄译本编者注.]

同一类的方程. 最初已经提到过的方程 2.240, 2.403, 都属于这种方程. 通过 $y(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 来表示方程(1)的解; 于是可以指出下列方程的解:

$$x(x-1)y''+(2x-1)y'-\nu(\nu+1)y=0, \tag{18}$$

$$y=y(\nu+1,\ -\nu,\ 1,\ x);$$

$$x^2(x-1)y''+[(a+b+1)x+(\alpha+\beta-1)]xy'+ \\ +(abx-\alpha\beta)y=0, \tag{19}$$

$$y=x^{\alpha}y(a+\alpha,\ b+\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ x);$$

$$(ax+1)x^2y''+[a(b+2)x+(\alpha+\beta+1)]xy'+ \\ +(abx+\alpha\beta)y=0, \tag{20}$$

$$y=x^{-\alpha}y\ (1-\alpha,\ b-\alpha,\ 1-\alpha+\beta,\ -ax);$$

$$x(x^2-1)y''+(ax^2+b)y'+cxy=0, \tag{21}$$

$$y=y\left(\frac{a-1}{2}+R,\ \frac{a-1}{2}-R,\ \frac{1-b}{2},\ x^2\right)$$

$$\text{当 } R^2=\frac{1}{4}(a-1)^2-c \text{ 时};$$

$$x^2(ax^b-1)y''+(apx^b+q)xy'+(arx^b+s)y=0, \tag{22}$$

$$y=x^c y(\alpha,\beta,\gamma,ax^b),$$

这里 c,α,β,γ 由等式

$c=A_1,\ (1-\gamma)b=A_2-A_1,\quad b\alpha=A_1+B_1,\ b\beta=A_1+B_2$

来确定,其中 A_1, A_2, B_1, B_2 是方程

$$A^2-(q+1)A=s,\ B^2-(p-1)B=-r$$

的根;

$$16(x^3-1)^2y''+27xy=0, \qquad (23)$$

$$y=(x^3-1)^{\frac{1}{4}}\ y\left(\frac{1}{12},-\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\ x^3\right);$$

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+2n+1)x-(\gamma+n)]y'+$$
$$+(\alpha+n)(\beta+n)y=0, \qquad (24)$$

$$y=y(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,x)=y^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

2.261. $\boldsymbol{x(x+2)y''+2[n+1+(n+1-2\lambda)x-\lambda x^2]y'+}$
$\boldsymbol{+[2\lambda(p-n-1)x+2p\lambda+\mu]y=0.}$ 见 2.248.

如果 n 和 $p-n=m$ 是自然数,则当参数 λ,μ 取适当值时,所存在的解为 $m-1$ 次多项式.

关于这种解的进一步研究,见 A H Wilson, *Proceedings Soc. London* ***A*** 118 (1928), p. 617—635.

2.262. $\boldsymbol{(x+1)^2y''+(x^2+x-1)y'-(x+2)y=0.}$

$$y\exp x=C_1+C_2\int(x+1)\exp\frac{x^2+x-1}{x+1}dx.$$

2.263. $\boldsymbol{x(x+3)y''+(3x-1)y'+y=}$
$\boldsymbol{=(20x+30)(x^2+3x)^{\frac{7}{3}};}$

全微分方程.

进行积分,则得到一阶线性方程

$$x(x+3)y'+(x-4)y=3(x^2+3x)^{\frac{10}{3}}+C.$$

2.264. $\boldsymbol{(x^2+3x+4)y''+(x^2+x+1)y'-(2x+3)y=0.}$

$$y=C_1(x^2+x+3)+C_2e^{-x}.$$

2.265. $\boldsymbol{(x-1)(x-2)y''-(2x-3)y'+y=0.}$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x-1$, 则得到超几何方程 2.260.

2.266. $\boldsymbol{(x-2)^2y''-(x-2)y'-3y=0;}$

第一部分 22.3 节(b)中研究过的类型.

$$y=C_1(x-2)^3+\frac{C_2}{x-2}.$$

2.267. $2x^2y''-(2x^2-5x+\lambda)y'-(4x-1)y=0.$

点 $x=0$ 是强奇点.但是,对于确定的 λ 值(特征值),即对于

$$\lambda=\frac{(2\nu+1)^2\pi^2}{8}\quad(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

存在着可以用处处收敛的级数表示的解:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k;$$

其系数等于

$$a_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^nn!\Gamma\left(k+n+\frac{3}{2}\right)}.$$

O Perron, *Acta math*. 48 (1926), p. 345—351.

另一方面,应注意,原方程是全微分方程:

$$\frac{d}{dx}[2x^2y'-(2x^2-x+\lambda)y]=0,$$

因此

$$y=x^{-\frac{1}{2}}e^u\left(C_1+C_2\int x^{-\frac{3}{2}}e^{-u}dx\right),\quad 其中\ u=x-\frac{\lambda}{2x}.$$

2.267 a. $2x(x-1)y''+(x-1)y'-y=0.$

$$y=C_1(x-1)+$$

$$+C_2\left(2\sqrt{|x|}\left\{\begin{array}{ll}+(x-1)\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| & 当\ x>0\ 时,\\ -2(x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{|x|} & 当\ x<0\ 时.\end{array}\right.\right)$$

2.268. $2x(x-1)y''+(2x-1)y'+(ax+b)y=0$.

当 $0<x<1$ 时,经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\cos^2\xi$, 可将此方程化为马提厄方程 2.22

$$\eta''-2(a\cos^2\xi+b)\eta=0;$$

当 $x>1$ 时,经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\mathrm{ch}^2\xi$, 则化为马提厄伴随函数的微分方程 2.21;最后,当 $x<0$ 时,经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=-\mathrm{sh}^2\xi$,则化为方程

$$\eta''-2(a\,\mathrm{sh}^2\xi-b)\eta=0.$$

根据第一部分 18.2 节,所研究的方程可以借助于幂级数求解;由于存在因子 $x(x-1)$,这些级数不一定处处收敛. 但是,也可以按下述方式来进行: 可以指出,在复数域中,所研究的方程具有两个线性无关的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 它们的乘积 $Y(x)$是整函数,因而,可以表示为处处收敛的级数:

$$Y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n. \tag{1}$$

根据 3.26, 函数 Y 满足方程

$$2x(x-1)Y'''+3(2x-1)Y''+$$
$$+2(2ax+2b+1)Y'+2aY=0. \tag{2}$$

将(1)代入方程(2),并且假设 $\alpha=2a$, $\beta=2(2b+1)$, 则得到关系式

$$6c_2=\beta c_1+\alpha c_0,\quad 30c_3=2(\beta+6)c_2+3\alpha c_1,$$

并且当 $n\geqslant 2$ 时:

$$(n+1)(n+2)(2n+3)c_{n+2}=$$
$$=[2n(n+2)+b](n+1)c_{n+1}+(2n+1)ac_n.$$

当选择适当常数 c_0, c_1 时,具有从这些关系式求出的系数 c_n 的级数处处收敛. 现在如果仍然认为变量是实数,则由等式 $y_1y_2=Y$, 朗斯基行列式满足方程

$$\frac{y_1'}{y_1}-\frac{y_2'}{y_2}=\frac{C}{Y\sqrt{|x^2-x|}};$$

此外还有

$$\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}=\frac{Y'}{Y}.$$

由此可以算出 y_1 和 y_2。

详见 F Lindemann, *Math Ann*. 22(1883), p 117—123; Whittaker 和 Watson

2.268 a. $2x(x-1)y''-(2x-1)y'+ay=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\sin^2\frac{\xi}{2}$,则得到方程 2.71 a

$$\eta''-2\eta'\text{ctg}\xi-\frac{a}{2}\eta=0.$$

特别是,如果 $a=2$,则 $y=2x-1$ 是一个解。

[**2.268 b. $2x(x-1)y''+(3x+1)y'-y=0$;**

见 2.260 和 2.312.——俄译本编者注.]

2.269. $2x(x-1)y''+[(2\nu+5)x-(2\nu+3)]y'+(\nu+1)y=0$; 见 2.240(3).

2.270. $(2x^2+6x+4)y''+(10x^2+21x+8)y'+(12x^2+17x+8)y=0$.

$$y=(x+2)^4e^{-3x}\left(C_1+C_2\int\frac{|x+1|^{1/2}}{(x+2)^5}e^x dx\right).$$

2.271. $4x^2y''+y=0$; 2.187 型.

相应于具有条件 $y(a)=y(a+1)$ $(a>0)$ 的边值问题的格林函数是:

$$\Gamma(x,\xi)=\sqrt{x\xi}\frac{\ln\frac{x}{a}\ln\frac{\xi}{a+1}}{\ln\frac{a+1}{a}}\quad \text{当 } x<\xi \text{ 时},$$

当 $x>\xi$ 时，需要将右端的 x 和 ξ 交换位置.

G. Usai, *Giornale Mat.*, 63(1925), p. 85—97.

2.272. $4x^2y''+(4a^2x^2+1)y=0$;

方程 2.162(1)的特殊情况.

关于具有条件 $y(0)=y(1)=0$ 的边值问题的格林函数，见 G. Usai, *Giornale Mat.*, 63(1925), p. 85—97.

2.273. $4x^2y''=(x^2-4kx+4m^2-1)y$; 惠特克方程.

文献：Whittaker 和 Watson, p. 337—354; A. Erdélyi, *Math. Zeitschrift* 42(1937), p. 125—143, 641—670; H. Buchholz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23 (1943), p. 47—58, 101—118. 关于数值解，见 Янке, Эмде 和 Лёш.. [也可参阅：Кузнецов; Bateman 和 Erdelyi.——俄译本编者注.]

此微分方程是退化的超几何方程的简化形式（见 2.407).

当 $k=0$ 时，则得到贝塞耳方程 2.162 的简化形式. 此方程等价于方程 2.113，也就是说，经过变换

$$y=x^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}u(x)$$

则化为方程

$$xu''+(2m+1-x)u'+\left(k-m-\frac{1}{2}\right)u=0.$$

通过 $y(k,m,x)$ 来表示原方程的解. 每一个 $y(k,m,x)$，同时也就是 $y(-k,m,-x)$. 所以，当对于实数值 x 解此方程时，可以只限于区域 $x>0$.

借助于幂级数求解方程. 关于这一点，见第一部分，18.2 节.

设

$$ {}_1F_1(a,b,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)x^n}{b(b+1)\cdots(b+n-1)n!} $$

(b 不等于任何$\leqslant 0$ 的整数）是对于所有 x 收敛的波赫哈默尔级数（见 2.113）. 如果 $2m$ 不等于任何整数，则通解是

$$ y=C_1M_{k,m}(x)+C_2M_{k,-m}(x), \tag{1} $$

其中

$$ M_{k,m}(x)=x^{\frac{1}{2}+m}e^{-\frac{1}{2}x}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+m-k,2m+1,x\right) \tag{2} $$

是惠特克引入的满足函数方程

$$ M_{k,m}(x)=(-1)^{-\frac{1}{2}-m}M_{-k,m}(-x) $$

的函数. 如果 $2m$ 是整数，则(1)中包含的两项之中，至少有一项是解. 这时，可以根据第一部分 18.2 节和第一部分 24.2 节的方法求得通解.

在一些特殊情况下，函数 M 可以化为其他的已知函数. 例如，

$$ M_{0,m}(x)=4^me^{-\frac{1}{2}m\pi i}\Gamma(m+1)\sqrt{x}\,J_m\left(\frac{1}{2}ix\right) $$

($2m$ 不等于任何负整数)，其中 $J_m(x)$ 是贝塞耳函数；

$$ M_{n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}x^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x}H_{2n}\left(\sqrt{x}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{4}}D_{2n}\left(\sqrt{2x}\right), $$

$$M_{n+\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}(x)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n!}{2(2n+1)!}x^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x}H_{2n+1}(\sqrt{x})=$$

$$=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-n\right)}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{4}}D_{2n+1}(\sqrt{2x})$$

(n 为非负整数)，其中 H 是契比雪夫-埃尔米特多项式，D 是抛物柱函数.

惠特克函数 $W_{k,m}(x)$. 惠特克详细地研究过的另一些解是

$$W_{k,m}(x)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma(\mu)e^{-\frac{1}{2}x}x^{k}\int(-t)^{\mu}\left(1+\frac{t}{x}\right)^{2m+\mu-1}e^{-t}dt.$$

其中$\mu=k+\frac{1}{2}-m$；积分路径（图30）是一条曲线，这条曲线的两端均走向$+\infty$，并且在正方向上绕过点 $t=0$，而不包围点 x（x 不处于正实半轴上）；对于 $\arg x$ 应当取主值，$|\arg(-t)|\leqslant\pi$，而如果t 沿着处于积分路径所包围的区域内的某一路线趋于零，则$\arg\left(1+\frac{t}{x}\right)\to 0$. 为了使上述公式成立，应当假设$\mu$不等于任何$\leqslant 0$ 的整数.

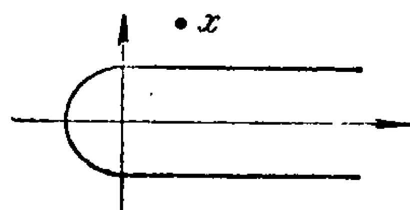


图 30

当 $\Re\mu\leqslant -1$ 时，则有

$$W_{k,m}(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}x}x^{k}}{\Gamma(1-\mu)}\int_{0}^{\infty}t^{-\mu}\left(1+\frac{t}{x}\right)^{2m+\mu-1}e^{-t}dt;$$

当 μ 是整数时，此函数也是解. $W_{k,m}(x)$和 $W_{-k,m}(-x)$

构成基本解组．对于 W，存在渐近展开式

$$W_{k,m}(x)\sim$$

$$\sim e^{-\frac{1}{2}x}x^{k}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^{n}}\prod_{\nu=1}^{n}\left[m^{2}-\left(k+\frac{1}{2}-\nu\right)^{2}\right]\right\},$$

$|\arg x|\leqslant\pi-\delta<\pi$, $|x|\to\infty$. 如果 $k-\frac{1}{2}\pm m$ 是自然数，则级数中断而得到精确的表达式．如果 $2m$ 是非整数，则

$$W_{k,m}(x)=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}M_{k,m}(x)+$$

$$+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}M_{k,-m}(x).$$

同一类的方程．许多其他方程可以化为这里所讨论的方程．相应的变换可以从所列举的解中直接看出．

如果 $4\alpha=a^{2}$, $4\nu\leqslant(b-1)^{2}$，则方程

$$x^{2}y''+(ax^{n}+b)xy'+(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)y=0 \tag{3}$$

符合于类型(5)；也可参阅2,162(17)，2.215.

$$\begin{aligned}&4x^{2}y''-4x(2a+\beta-1+2bcx^{c})y'+[4a(a+\beta)+\\&+(1-4m^{2})\beta^{2}+4bc(2a+\beta-c)x^{c}+4b^{2}c^{2}x^{2c}+\\&+4\alpha\beta^{2}kx^{\beta}-\alpha^{2}\beta^{2}x^{2\beta}]y=0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$y=x^{a}e^{bx^{c}}y(k,m,\alpha x^{\beta});$$

$$\begin{aligned}&4x^{2}y''-4x(2a+c-1+2bcx^{c})y'+[4a(a+c)+\\&+(1-4m^{2})c^{2}+4c(2ab+\alpha ck)x^{c}+\\&+c^{2}(4b^{2}-\alpha^{2})x^{2c}]y=0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$y=x^{a}e^{bx^{c}}y(k,m,\alpha x^{c});$$

$$x^{2}y''+(ax+b)xy'+(\alpha x^{2}+\beta x+\gamma)y=0, \tag{6}$$

$$y=x^{-\frac{1}{2}b}e^{-\frac{1}{2}ax}\,y\left(\frac{2\beta-ab}{2\rho},m,\rho x\right),$$

其中 $\rho^2=a^2-4\alpha$, $4m^2=(b-1)^2-4\gamma$. 也可参阅 2.215;

$4x^2y''+(4x^2+1-4\nu^2)y=0$, 贝塞耳方程 2.153; (7)

$$4x^2y''=(x^2-2(2m+1)x+4m^2-1)y, \tag{8}$$

$$y=x^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1+C_2\int x^{-2m-1}e^x dx\right);$$

$$xy''+(ax+b)y'+(cx+d)y=0, \tag{9}$$

$$y=x^{-\frac{1}{2}b}e^{-\frac{1}{2}ax}\,y\left(\frac{2d-ab}{2\sqrt{a^2-4c}},\ \frac{1}{2}(b-1),\ x\sqrt{a^2-4c}\right)$$

当 $a^2>4c$ 时,也可参阅 2.119;

$$y''+axy'+by=0, \tag{10}$$

$y=x^{-\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{4}ax^2}\,y\left(\frac{b}{2a}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{a}{2}x^2\right)$, 也可参阅 2.52;

$$y''+ay'+(b-c^2x^2)y=0, \tag{11}$$

$$y=x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}ax}\ y\left(\frac{4b-a^2}{16c},\ \frac{1}{4},\ cx^2\right);$$

$$y''+(ax^{c-2}-b^2x^{2c-2})y=0, \tag{12}$$

$$y=x^{\frac{1}{2}(1-c)}\ y\left(\frac{a}{2bc},\ \frac{1}{2c},\ \frac{2b}{c}x^c\right);$$

$4y''=(x^2-8k)y$, 韦伯方程 2.87 (13)

$$y=x^{-\frac{1}{2}}y\left(k,\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}x^2\right);$$

$$y''=(a^2e^{2x}+be^x+c^2)y, \tag{14}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\,y\left(-\frac{b}{2a},\ c,\ 2ae^x\right),$$ 也可参阅 2.20.

2.274. $4x^2y''+4xy'+(x-\nu^2)y=0$; 见 2.162(4).

2.275. $4x^2y''+4xy'+$

$$+[-x^2+2(1-m+2\lambda)x-m^2+1]y=0.$$

关于如何化为惠特克方程 2.273,见 2.278. 如果 m 是自然数,则相应于边界条件"当 $x>0$ 时,$y(x)$ 有界" 的特征值是 $\lambda=n$(n为整数并且$\geqslant m$),而特征函数是

$$y=x^{\frac{1}{2}m}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,L_n^{(m)}(x),$$

其中 L_n 是契比雪夫-拉盖尔多项式.

2.276. $4x^2y''+4xy'-(4x^2+1)y=4\sqrt{x^3}e^x$

对应的齐次方程属于 2.278 型.假设 $u(x)=y\sqrt{x}$,则得到

$$u''-u=e^x$$

由此

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^x\right).$$

2.277. $4x^2y''+4xy'-(ax^2+1)y=0$;

2.162(1)型和 2.278 型.

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1\exp\left(\frac{x}{2}\sqrt{a}\right)+C_2\exp\left(-\frac{x}{2}\sqrt{a}\right)\right).$$

2.278. $4x^2y''+4xy'+f(x)y=0.$

经过变换 $u(x)=y\sqrt{x}$,可将此方程化为标准形式

$$4x^2u''+[f(x)+1]u=0.$$

2.279. $4x^2y''+5xy'-y=\ln x.$

对应的齐次方程属于 2.187 型.

$$y=C_1x^{\alpha}+C_2x^{\beta}-\ln x-1,$$

其中 α, β 是方程 $4s^2+s=1$ 的根。

2.280. $4x^2y''+8xy'-(4x^2+12x+3)y=0$;

方程 2.215 的特殊情况。

解之一是: $y=e^x\sqrt{x}$。

2.281. $4x^2y''-4x(2x-1)y'+(4x^2-4x-1)y=0$;

2.78 型。

$$y\sqrt{|x|}=e^x(C_1+C_2x).$$

2.281 a. $4x^2y''+4x^3y'+(2x^2-3)y=0$.

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1+C_2e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

2.282. $4x^2y''+4x^3y'+(x^2+6)(x^2-4)y=0$;

方程 2.162(17)的特殊情况。

$$y=(C_1x^3+C_2x^{-2})\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

2.282a $4x^2y''+4x^3y'+(x^4+ax^2+b)y=0$.

方程 2.162(16)的特殊情况;其中所包含的常数这里具有下列数值: $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4}$, $c=2$, $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{a-2}, \nu=\frac{1}{2}\sqrt{1-b}$。特别是,如果在给定的方程中 $a=2$,则

$$y=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1x^{\frac{1}{2}\sqrt{1-b}}+C_2x^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-b}}\right),$$

而如果 $a=b=1$,则

$$y=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}(C_1+C_2\ln x).$$

2.283. $4x^2y''+4x^2y'\ln x+(x^2\ln^2x+2x-8)y=$

$$=4x^2\sqrt{\frac{e^x}{x^x}}.$$

假设 $u(x)=\sqrt{\frac{x^x}{e^x}}y$，则得到方程

$$x^2u''-2u=x^2,$$

其通解为：

$$u=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln x.$$

2.284. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'-12y=3x+1$.

对应的齐次方程属于第一部分 22.3 节(b)的类型.

$$y=C_1(2x+1)^3+C_2(2x+1)^{-1}-\frac{3x}{16}-\frac{5}{96}.$$

2.285. $x(4x-1)y''+[(4a+2)x-a]y'+a(a-1)y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $4x-1=\pm\xi^2$，则得到

$$(\xi^2\pm 1)\eta''+2a\xi\eta'+a(a-1)\eta=0.$$

关于这个方程，见 2.247 和 2.298.

2.285 a. $4x(x-1)y''+4(2x-1)y'+y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$ 则得到方程 2.317，其中变量 x,y 换为 ξ,η.

2.285 b. $4x(x-1)y''+4(x-1)y'-y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$. 则得到方程 2.316，其中变量 x,y 换为 ξ,η.

2.286. $(3x-1)^2y''+3(3x-1)y'-9y=\ln^2|3x-1|$.

对应的齐次方程属于第一部分 22.3 节(b)中讨论过的那种类型.

$$y=C_1(3x-1)+\frac{C_2}{3x-1}-\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\ln^2|3x-1|.$$

2.286 a. $4(x^2-1)y''+4(2x-1)y'+y=0$.

$$y\sqrt{|x+1|}=C_1+C_2\begin{cases}\arcsin x & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ \operatorname{arch} x & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.287. $9x(x-1)y''+3(2x-1)y'-20y=0$；见 2.260.

[**2.287 a.** $9x(x-1)y''+3(3x-1)y'-y=0$.

见 2.260 和 2.355. ——俄译本编者注.]

2.288. $16x^2y''+(4x+3)y=0$.

$$y=x^{\frac{1}{4}}(C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}).$$

2.289. $16x^2y''+32xy'-(4x+5)y=0$.

$$y=C_1\left(x^{-\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)e^{\sqrt{x}}+C_2\left(x^{-\frac{3}{4}}+x^{-\frac{5}{4}}\right)e^{-\sqrt{x}}.$$

2.290. $(27x^2+4)y''+27xy'-3y=0$；见 2.298.

$$y=C_1u^{\frac{1}{3}}+C_2u^{-\frac{1}{3}},\ \text{其中}\quad u=x+\sqrt{x^2+\frac{4}{27}}.$$

J. Zbornik, *ZAMP* 7 (1956).

2.291. $48x(x-1)y''+(152x-40)y'+53y=0$；见 2.260.

2.292. $50x(x-1)y''+25(2x-1)y'-2y=0$；2.260 型.

$$y=C_1u^{\frac{1}{5}}+C_2u^{-\frac{1}{5}},\ \text{其中}\ u=x-\frac{1}{2}+\sqrt{x(x-1)}.$$

J. Zbornik, *ZAMP* 7 (1956).

2.293. $144x(x-1)y''+(120x-48)y'+y=0$；见 2.260.

2.294. $144x(x-1)y''+(168x-96)y'+y=0$；见 2.260.

2.295. $ax^2y''+bxy'+(cx^2+dx+e)y=0,\ a\neq 0,\ c\neq 0$.

假设

$$y=e^{\alpha x}x^{\beta}\eta(\xi),\quad \xi=\gamma x,$$

其中

$$a\alpha^2=-c,\quad a\beta^2+(b-a)\beta=-e,\ \gamma=-2\alpha,$$

则得到方程 2.113

$$\xi\eta''-(\xi-A)\eta'+B\eta=0,$$

其中

$$aA=2a\beta+b,\quad 2cB=(2a\alpha\beta+b\alpha+d)\alpha.$$

为了能够在实数域内实现这个变换，应当有 $ac<0$.

假设

$$y=\eta(\xi)x^{-\frac{b}{2a}},\quad \xi=2x\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

则得到惠特克方程 2.273

$$4\xi^2\eta''=(\xi^2+A\xi+B)\eta,$$

其中

$$aA=-2d\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad a^2B=b^2-2ab-4ae.$$

也可参阅 Courant-Hilbert, I, p. 294—296.

2.296. $\boldsymbol{a_2x^2y''+(a_1x^2+b_1x)y'+(a_0x^2+b_0x+c_0)y=0.}$

假设 $y=x^\alpha u(x)$，其中 α 是方程

$$a_2\alpha^2+(b_1-a_2)\alpha+c_0=0 \tag{1}$$

的根，则得到方程 2.120

$$a_2xu''+(a_1x+2a_2\alpha+b_1)u'+(a_0x+a_1\alpha+b_0)u=0.$$

关于这个方程，也可参阅 2.278(9)和 2.145.

假设

$$y=x^\alpha e^{\beta x}u(x),$$

其中 α 仍然由方程(1)来确定，则得到方程

$$a_2xu''+[(2a_2\beta+a_1)x+(2a_2\alpha+b_1)]u'+$$
$$+[(a_2\beta^2+a_1\beta+a_0)x+(2a_2\alpha\beta+a_1\alpha+b_1\beta+b_0)]u=0,$$

适当选择 β，此方程还可以简化.

2.297. $\boldsymbol{(ax^2+1)y''+axy'+by=0.}$

假设

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \alpha x=\operatorname{sh}\alpha\xi,\quad a=\alpha^2>0,$$

则得到方程

$$\eta''+b\eta=0.$$

如果 $a=-\alpha^2<0$,则仍然假设 $y(x)=\eta(\xi)$,以及

$$\alpha x=\sin\alpha\xi \quad 当 \ |\alpha x|<1 时,$$

$$|\alpha x|=\mathrm{ch}\alpha\xi \quad 当 \ |\alpha x|>1 时.$$

这时,分别地得到方程

$$\eta''+b\eta=0, \qquad \eta''-b\eta=0.$$

2.298. $(ax^2+1)y''+bxy'+cy=0.$

如果 $b=(2n+1)a$ (n 为自然数), 那么由方程 2.297

$$(ax^2+1)y''+axy'+(c-na)y=0,$$

经过 n 次微分,然后将 n 阶导数仍然通过 y 来表示,则得到此方程.

解可以表示为有限形式的其他一些情况如下:

$$(a-b)^2-4ac=(2n+1)^2a^2$$

或者

$$(a-b)^2-4ac=[(2n+1)a-b]^2.$$

A R Forsyth, W Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl., Braunschweig, 1912, p. 210, 755.

对于任意的 $a\neq0$,经过变换 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi^2=|a|x^2$,可以将方程简化.

2.299. $(a^2x^2-1)y''+2a^2xy'=0.$

$$y=C_1+C_2\ln\left|\frac{ax+1}{ax-1}\right|.$$

相应于具有条件 $y(0)=y(1)=0$ 的边值问题的格林函数是

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{1}{2aS}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right|\cdot\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{a\xi-1}{a\xi+1}\right|,$$

其中$S=\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right|$. 这里假设$x\leqslant\xi$;如果$x\geqslant\xi$,则右端$x$和$\xi$应当交换位置.

2.300. $(a^2x^2-1)y''+2a^2xy'-2a^2y=0.$

$$y=C_1x+C_2\left(ax\ln\left|\frac{ax+1}{ax-1}\right|-2\right).$$

相应于边界条件$y(0)=y(1)=0$的格林函数是

$$\Gamma(x,\xi)=x\left(\xi-1+\frac{a}{2}\xi\ln\left|\frac{a\xi+1}{a\xi-1}\cdot\frac{a-1}{a+1}\right|\right),$$

这里假设$x\leqslant\xi$;如果$x\geqslant\xi$,则右端x和ξ应当交换位置.

G Usai, *Giornale Mat.* 63(1925),p 96

2.301. $(ax^2+bx)y''+2by'-2ay=0.$

$$xy=C_1+C_2(ax+b)^3.$$

2.302. $A_2(ax+b)^2y''+A_1(ax+b)y'+A_0(ax+b)y=0$;

见第一部分22.3节(b).

2.303. $(ax^2+bx+c)y''+(dx+e)y'+fy=0,\quad a\neq0.$

设p,q是方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的根. 如果$p\neq q$,那么假设

$$y=\eta(\xi),\quad x=p+(q-p)\xi,$$

则得到超几何方程2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{d}{a}\xi+\frac{dp+e}{a(q-p)}\right)\eta'+\frac{f}{a}\eta=0.$$

如果$p=q$,则将方程

$$ak^2+(a-d)k+f=0$$

的根取作为k. 假设

$$y=\xi^k\eta(\xi),\quad x=p+\frac{1}{\xi},$$

则得到方程 2.120

$$a\xi\eta''-[(dp+e)\xi+d-2a(k+1)]\eta'-k(dp+e)\eta=0.$$

设方程

$$an(n-1)+dn+f=0$$

具有正整数的根，并且设 n 为这种根中的最小者. 这时，在解之中存在着次数 $\leqslant n$ 的多项式. 假设 $y_0=y$, $y_{\nu+1}=y'_\nu$，则对于每一个解 y，通过逐次微分可以得到一组方程

$$(ax^2+bx+c)y_{m+2}+[(2ma+d)x+mb+e]y_{m+1}=$$
$$=(n-m)[(n+m-1)a+d]y_m \quad (m=0,1,2,\cdots,n).$$

当 $m=n$ 时，右端等于零. 如果选择函数 y_n，使得 $y_{n+1}=y'_n$, $y_{n+2}=y''_n$ 满足最后一个方程，并且如果利用上述方程组逐个地确定出函数 $y_{n-1},\cdots,y_1,y_0$，则 y_0 是原方程的解. 如果假设 $y_n=1$，利用这种方法则可得到满足给定的方程的多项式.

Abbé Lainé, *Enseignement math* 23(1923), p.163 以及以后.

当 $d=a$, $2e=b$ 时，通解是：

$$y=C_1\sin u\sqrt{f}+C_2\cos u\sqrt{f},$$

$$\text{其中 } u=\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

304—341. $(ax^3+\cdots)y''+\cdots$

2.304. $x^3y''+xy'-(2x+3)y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\dfrac{1}{x}$，则得到方程 2.198，其中变量 x,y 换为 ξ,η.

2.304 a. $x^3y''+xy'+ay=0.$

如果 $a=-1$，则 $y=x\left(C_1+C_2e^{\frac{1}{x}}\right)$.

如果 $a=-2$，则 $y=e^{\frac{1}{x}}\left(C_1+C_2\int e^{-\frac{1}{x}}dx\right)$.

2.304 b. $x^3y''+(ax+b)y=0$.

将此方程除以 x，则得到 2.155 型的方程，其中 $k=-1$.

2.305. $x^3y''+2xy'-y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$，则得到方程 2.114

$$\xi\eta''+2(1-\xi)\eta'-\eta=0.$$

2.305 a. $x^3y''+ax^2y'+(bx+c)y=0$;

方程 2.162(1)的特殊情况.

2.306. $x^3y''+x^2y'+(ax^2+bx+a)y=0$.

对于这样一些复数 x，即如果 $|x|=1$，那么经过变换

$$y(x)=\eta(\xi),\quad x=e^{2i\xi},$$

则化为马提厄方程 2.22

$$\eta''=(16\,a\cos^2\xi+4\,b-8\,a)\eta.$$

2.307. $x^3y''+x(x+1)y'-2y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$，则得到方程 2.113，其中 $a=2, b=1$，而变量 x、y 则由 ξ、η 来代替.

解之一是:

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)\exp\frac{1}{x}$$

2.308. $x^3y''-x^2y'+xy=\ln^3x$.

$$y=C_1x+C_2x\ln x+\frac{1}{8x}(6+9\ln x+6\ln^2x+2\ln^3x).$$

2.309. $x^3y''-(x^2-1)y'+xy=0$.

点 $x=0$ 是强奇点，点 $x=\infty$ 是弱奇点. 假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$，则得到方程 2.212

$$\xi^2\eta''-(\xi^2-3)\xi\eta'+\eta=0.$$

2.310. $x^3y''+3x^2y'+xy=1$.

对应的齐次方程是第一部分 22.3 节的欧拉 方 程. 所以，对于给定的方程，有

$$xy=\frac{1}{2}\ln^2|x|+C_1+C_2\ln|x|.$$

2.310 a. $x^3y''+(ax+b)xy'+(cx+d)y=0$.

假设 $y=x^ku(x)$，其中 $k=-\frac{d}{b}$，则得到方程 2.188

$$x^2u''+[(a+2k)x+b]u'+[k(a+k-1)+c]u=0.$$

如果 $c=0, d=b(a-2)$，则 $y=e^{b/x}$ 是一个解；因此，根据第一部分 24.2 节(b)，可以得到其余的解.

2.311. $x(x^2+1)y''+(2x^2+1)y'-\nu(\nu+1)xy=0$.

假 设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi^2=x^2+1$，则得到勒让德方程 2.240，其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.311 a. $x(x^2+1)y''-2(x^2+1)y'+2xy=0$.

$$y=C_1(x^2+1)+C_2[(x^2+1)\operatorname{arc\,tg}x-x].$$

2.311 b. $x(x^2+1)y''-(x^2+1)y'+xy=0$.

假设 $y(x)=x\eta(\xi)$, $\xi=\frac{i}{x}$, 则得到 2.316，其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.312. $x(x^2+1)y''+2(x^2-1)y'-2xy=0$.

将此方程除以 x^3，则得到全微分方程.

$$(1+x^2)y=C_1+C_2x^3.$$

J. Zbornik. *Akad. Wien* 166(1957)

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-x^2$，则得到方程 2.260

$$2\xi(\xi-1)\eta''+(3\xi+1)\eta'-\eta=0.$$

2.313. $x(x^2+1)y''+[2(n+1)x^2+2n+1]y'-$

$-(\nu-n)(\nu+n+1)xy=0$；见 2.240(5).

2.314. $x(x^2+1)y''-[2(n-1)x^2+2n-1]y'+$

$+(n+\nu)(n-\nu-1)xy=0$;

方程 2.357 的特殊情况.

2.315. $x(x^2-1)y''+y'+ax^3y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^2-1$,则得到方程 2.130

$$4\xi\eta''+2\eta'+a\eta=0.$$

2.315 a. $x(x^2-1)y''+(x^2+1)y'-xy=0$;

方程 2.318 的特殊情况. 当 $-1<x<1$ 时,

$$y=C_1E^*(x)+C_2[E(x)-K(x)],$$

关于符号,见 2.316.

2.316. $x(x^2-1)y''+(x^2-1)y'-xy=0$;

方程 2.318 的特殊情况.

$$y=C_1E(x)+C_2[E^*(x)-K^*(x)]\quad(-1<x<+1),$$

其中 $K(x)$, $E(x)$ 是标准的第一类和第二类椭圆积分:

$$K(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}},$$

$$E(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

而 $K^*(x)=K(x^*)$, $E^*(x)=E(x^*)$, 其中 $x^2+x^{*2}=1$.

例如见: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II (中译本: Г. М. 菲赫金哥尔茨, 微积分教程,第二卷,高等教育出版社); М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного,

1965 (1951 年版中译本：М. А. 拉甫伦捷夫和 Б. А. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，1956，1957)；Янке，Эмде 和 Лёш Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970；Bateman 和 Erdelyi ——俄译本编者注.]

2.316 a. $x(x^2-1)y''-2(x^2-1)y'+2xy=0$.

$$y=(x^2-1)\left\{C_1+C_2\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}\right)\right\}.$$

2.317. $x(x^2-1)y''+(3x^2-1)y'+xy=0$;

方程 2.318 的特殊情况.

$$y=C_1K(x)+C_2K^*(x)\quad(-1<x<1);$$

关于符号见 2.316.

2.318. $x(x^2-1)y''+(ax^2+b)y'+cxy=0$; 见 2.260(21).

(a) $c=-(a+b)(b+1)$：特解：$y=x^{b+1}$;

(b) $b=0,\ c=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)$：特解：$y=(x\pm1)^{-\frac{2c}{a}}$;

(c) $c=-2(a+1)$：特解：$y=x^2+\frac{b-1}{a+1}$.

在这三种情况下，其余的解均可根据第一部分24.2节(b)求得.

(d) $b=1-a$：在区域 $x^2<1$ 内，假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\sin\xi$，则得到方程 2.71 a

$$\eta''+(a-1)\eta'\operatorname{ctg}\xi-c\eta=0,$$

而在区域 $x^2>1$ 内，假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$x=\pm\operatorname{ch}\xi$，则得到方程 2.64

$$\eta''+(a-1)\eta'\operatorname{th}\xi+c\eta=0.$$

(e) $a=-2(\nu-1),b=2\nu,c=\nu(\nu-1)$；方程2 .240(18)的特殊情况，其中 $a=\nu,b=1,c=-1$.

(f) $a=3$, $b=-1$, $c=\frac{3}{4}$；假设 $y(x)\sqrt{1+x}=\eta(\xi)$,

$\xi=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,则得到方程 2.317，其中变换 x, y 换为 ξ, η。

(g) 假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sqrt{1-x^2}$，则得到方程

$$\xi(\xi^2-1)\eta''+(a\xi^2-a-b+1)\eta'+c\xi\eta=0.$$

如果 $a=-2(\nu-1)$, $b=-1$, $c=\nu(\nu-1)$，则此方程是情况(e)的方程,其中变量 x、y 换为 ξ, η。

2.319. $\boldsymbol{x(x^2+2)y''-y'-6xy=0.}$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-\dfrac{1}{2}x^2$，则得到超几何方程 2.260,其中 $\alpha=1$, $\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\gamma=\dfrac{1}{4}$。

原方程是全微分方程,所以可将其化为方程

$$x(x^2+2)y'-3(x^2+1)y=C.$$

2.320. $\boldsymbol{x(x^2-2)y''-(x^3+3x^2-2x-2)y'+}$

$\boldsymbol{+(x^2+4x+2)y=0.}$

$$y=C_1(x-1)+C_2x^2e^x.$$

2.320a. $\boldsymbol{x^2(x+1)y''-(x-1)xy'+(2x+1)y=0.}$

假设 $y=e^{i\ln x}u(x)$,则得到超几何方程

$$x(x+1)u''+[(2i-1)x+2i+1]u'+(1-2i)u=0.$$

直接看出,$u=(2i-1)x+2i+1$ 是解。将这个 u 值代入 y 的表达式,并且将实部同虚部分开,便得到解

$$y=C_1[(x-1)\cos\ln x+2(x+1)\sin\ln x]+$$
$$+C_2[2(x+1)\cos\ln x-(x-1)\sin\ln x].$$

2.321. $\boldsymbol{x^2(x+1)y''-x(2x+1)y'+(2x+1)y=0.}$

$$y=C_1x+C_2x(x+\ln x).$$

2.322. $\boldsymbol{x^2(x+1)y''+2x(3x+2)y'+2(3x+1)y=0.}$

见 2.443 b。

$$x^2(x+1)y=C_1+C_2x.$$

2.322 a. $x^2(x-1)y''+x(x+1)y'-y=0.$

方程 2.260(19)的特殊情况.

$$y=\frac{x}{x-1}(C_1+C_2\ln x).$$

2.323. $x^2(x-1)y''+2x(x-2)y'-2(x+1)y=0.$

此方程属于2.325型. 假设 $y=x^{-1}u(x)$,则得到方程 2.255

$$x(x-1)u''-2u'-2u=0.$$

由此得到

$$x^2y=C_1+C_2(x-1)^3.$$

2.324. $x^2(x-1)y''-x(5x-4)y'+(9x-6)y=0;$

方程 2.260(19)的特殊情况.

$$y=C_1x^3+C_2(x^2+x^3\ln|x|).$$

2.325. $x^2(x-1)y''+[(a+b+1)x+(\alpha+\beta-1)]xy'+$
$+(abx-\alpha\beta)y=0$; 见 2.260(19).

2.325 a. $x^2(x-1)y''+(ax+b)xy'+(cx+d)y=0.$

设 k 是方程 $k^2-(b+1)k=d$ 的实根. 假设 $y=$ $=x^ku(x)$, 则得到方程 2.260

$$x(x-1)u''+[(a+2k)x+b-2k]u'+$$
$$+[c+k(a+k-1)]u=0.$$

在复数 $k=\alpha+i\beta$ 的情况下,也可采用相应的变换; 即需要假设

$$x^k=x^\alpha e^{i\beta\ln x}=x^\alpha[\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)].$$

一些特殊情况:

(a) $b=-2, c=0, d=6$: 当 $k=-3$ 时, 得到方程 2.258(c)

$$x(x-1)u''+[(a-6)x+4]u'-3(a-4)u=0.$$

(b) $c=0, d=(a+b)(a-1)$； 解之一是 $y=x^{1-a}$，其余的解可以根据第一部分 24.2 节(b)得到。

(c) $a=-2, b=4, c=2, d=-6$； 当 $k=2$ 时，得到方程

$$(x-1)u''+2u'=0, \quad u=C_1+\frac{C_2}{x-1}.$$

(d) $a=b=-1, c=2, d=-1$； 当 $k=i$ 时，得到方程 2.258(d)，因而，

$$y=C_1[(5x-3)\cos\ln x-4\sin\ln x]+$$
$$+C_2[(5x-3)\sin\ln x+4\cos\ln x].$$

2.326. $\boldsymbol{x(x+1)^2y''+x(x+1)y'+y=0.}$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$， $\xi=x+1$，得到 2.325 型的方程

$$(x+1)y=C_1x+C_2(x\ln|x|-1).$$

2.327. $\boldsymbol{x^2(x-2)y''-2xy'+y=0}$；

方程 2.410 的特殊情况。

2.328. $\boldsymbol{x(x-1)^2y''-2y=0.}$

$$y=C_1\frac{x}{x-1}+C_2\left(x+1-\frac{x}{x-1}\ln x^2\right).$$

2.329. $\boldsymbol{x(x-1)(x-a)y''+\{(\alpha+\beta+1)x^2-}$
$\boldsymbol{-[\alpha+\beta+1+a(\gamma+\delta)-\delta]x+a\gamma\}y'+}$
$\boldsymbol{+(\alpha\beta x-q)y=0}$； 霍伊恩方程。

文献：K Heun, *Math Ann* **33**(1889), p 161-179.

霍伊恩方程的一些特殊情况是：超几何方程 2.260 (当 $a=1$ 和 $q=\alpha\beta$ 时，因子 $x-1$ 消失； 当 $a=q=0$ 时，因子 x 消失)； 拉梅方程 2.408 (如果将霍伊恩方程写为形式(14))。

霍伊恩方程将写为下列形式：

$$H(a,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)=0; \tag{1}$$

设

$$Y=y(a,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta,x) \tag{2}$$

是此方程的解.

方程的变量置换. 方程(1)的解,可以通过某些确定的变换后的方程的解来表示. 对于给定的常数 $a,\cdots,\delta$, 下面指出的每一个函数集合同函数集合(2)相重合

$$y(1-a,\alpha\beta-q;\alpha,\beta,\delta,\gamma,1-x); \tag{3}$$

$$|x|^{1-\gamma}y(a,q_1;\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\delta,x), \tag{4}$$

其中 $\quad q_1=q+(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)-\alpha\beta+\delta(\gamma-1);$

$$|x|^{1-\gamma}y\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}q_1;\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\frac{x}{a}\right), \tag{5}$$

其中

$$q_1=q+(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)-\alpha\beta+\delta(\gamma-1)(1-a);$$

$$|x|^{-\alpha}y\left(\frac{1}{a},q_1;\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\delta,\frac{1}{x}\right), \tag{6}$$

其中 $\quad q_1=\frac{q}{a}+\alpha(\alpha-\gamma+1)+\frac{\alpha}{a}(\delta-\beta)-\alpha\delta.$

组合这些结果,可以得到同集合(2)重合的许多其他函数集合,例如下列函数集合,其中不出现常数值 q:

$$y\left(\frac{1}{a};\ \alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\frac{x}{a}\right), \tag{7}$$

$$y\left(1-\frac{1}{a};\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\gamma,1-\frac{x}{a}\right), \tag{8}$$

$$|x|^{-\alpha}y\left(a;\alpha-\gamma+1,\alpha+\gamma-1,\alpha-\beta+1,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\frac{a}{x}\right), \tag{9}$$

$$|x|^{-\alpha}y\left(1-\frac{1}{a};\ \alpha,\alpha-\gamma+1,\delta,\alpha-\beta+1,\frac{x-1}{x}\right), \tag{10}$$

$$|x|^{-\alpha}y\left(\frac{a}{a-1};\alpha,\alpha-\gamma+1,\delta,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\frac{a(x-1)}{x(a-1)}\right),\tag{11}$$

$$|x-1|^{-\alpha}y\left(\frac{a}{a-1};\alpha,\alpha-\delta+1,\gamma,\alpha-\beta+1,\frac{x}{x-1}\right),\tag{12}$$

$$|x-1|^{-\alpha}y\left(1-\frac{1}{a};\alpha,\alpha-\delta+1,\gamma,\alpha+\beta-\gamma-\delta+1,\frac{x(a-1)}{a(x-1)}\right).\tag{13}$$

解的构造. 由于(2)和(5)重合，对于方程(1)的解可以得出下述结论：如果 $a\neq0$，则可以只限于考虑$|a|\geqslant1$的情况。当 $a>1$ 时，区间 $a<0$, $1<x<a$, $x>a$ 经过变换

$$\xi=\frac{x}{x-1},\quad \frac{a(x-1)}{x(a-1)},\quad \frac{a}{x},$$

转化为区间 $0<\xi<1$，而当 $a<-1$ 时，区间 $x<a$, $a<x<0$, $x>1$ 经过变换

$$\xi=\frac{a}{x},\quad \frac{(a-1)x}{a(x-1)},\quad \frac{x-1}{x},$$

转化为区间 $0<\xi<1$。由于(12)，(11)和(9)，以及(9)，(13)和(10)同(2)相重合，并且由于相应的新的常数满足条件$|a|\geqslant1$，所以以后可以只限于考虑区间 $0<x<1$.

当$|a|\geqslant1$ 时，方程(1)的解存在（见第一部分 25.7 节），并且当 $|x|<1$ 时，可以将它表示为收敛的幂级数的形式：

$$F(a,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n,$$

只要 γ 不等于任何$\leqslant0$ 的整数；系数 c_n 由下列递推公

式确定：

$$a\gamma c_1 = q,$$

$$a(n+1)(\gamma+n)c_{n+1} =$$

$$= \left[a(\gamma+\delta+n-1)+\alpha+\beta-\delta+n+\frac{q}{n}\right]nc_n -$$

$$-[(n-1)(n-2)+(n-1)(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta]c_{n-1}.$$

如果 γ 不是整数，则（见(4)）

$$|x|^{1-\gamma}F(a, q_1; \alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \delta, x)$$

是方程(1)的某一个解，且同上面那个解线性无关．如果 γ 是整数，则同超几何方程的情况相类似，例如按照弗罗比尼乌斯的方法（第一部分，18.2 节），可以得到解的集合．

情况 $\alpha+\beta=1$，$\gamma+\delta=1$ 的更详细的研究见 G R Goldsbrough, *Proceedings Soc. London A*, 130 (1931), p. 157—167.

同一类的方程．如果 a_1, a_2, a_3 各不相同，则经过变换

$$y(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}$$

可将方程

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)y'' +$$

$$+(Ax^2+Bx+C)y'+(Dx+E)y=0 \qquad (14)$$

$[4D \leqslant (A-1)^2]$ 化为方程(1)，其中变量 x, y 换为 ξ, η；这时

$$a=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}, \quad q=-\frac{Da_1+E}{a_2-a_1},$$

$$\alpha, \beta=\frac{1}{2}(A-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A-1)^2-4D},$$

$$a\gamma=\frac{Aa_1^2+Ba_1+C}{(a_2-a_1)^2}, \quad (1-a)\delta=\frac{Aa_2^2+Ba_2+C}{(a_2-a_1)^2}.$$

2.330. $(x-a)(x-b)(x-c)y''+(Ax^2+Bx+C)y'+$
$+(Dx+E)y=0.$

见 2.329(14)和 2.408(3)。关于这里所产生的特征值问题和克莱茵振荡定理，见第二部分，9.8 节。

2.331. $2x^2(x-2)y''-x(x-4)y'+(x-3)y=0.$

$$y=C_1\sqrt{|x|}+C_2\sqrt{|x(x-2)|}.$$

2.332. $4x^2(x+1)y''-4x^2y'+(3x+1)y=0.$

如果取自变量$-x$来代替x，则得到方程 2.260(19)的特殊情况。于是有

$$y=\sqrt{|x|}\left[C_1+C_2(x+\ln|x|)\right].$$

2.333. $4x^2(x-1)y''+2x(3x-1)y'-\nu(\nu+1)(x-1)y=0$；见 2.240(6)。

2.334. $4x^2(x-1)y''+4[(a+1)x-1]xy'+$
$+[(a^2-b^2)x+c^2]y=0.$

这是 2.260 (19) 型的方程。

关于借助于曲线积分求解，见 Whittaker 和 Watson, 385.

2.335. $4x(x-1)^2y''+2(x-1)(3x-1)y'+(ax+b)\ y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$, 则得到

$(\xi^2-1)^2\eta''+2\xi(\xi^2-1)\eta'+(a\xi^2+b)\eta=0.$

关于这个方程见 2.240(12)。

2.336. $(x-1)(2x-1)^2y''-(3x-1)y=0.$

$$y=(x-1)\sqrt{|2x-1|}\times$$

$$\times\left\{C_1+C_2\left[\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{x-1}\right]\right\}.$$

2.337. $4(x+a)^2(x+b)y''+2(x+a)(3x+a+2b)y'+$

$$+(a-b)y=0, a\neq b.$$

$$y=|x+a|^{-\frac{1}{2}}\left(C_1+C_2|x+b|^{\frac{1}{2}}\right).$$

2.338. $(9x-2)x^2y''-3x(6x-1)y'-3y=0.$

通解是

$$y=C_1(54x^3-18x^2+x)+C_2(9x^2-2x)^{\frac{3}{2}}.$$

J Zbornik, *Akad Wien* 166(1957).

2.339. $(ax+1)x^2y''+[a(b+2)x^2+(c-d+1)x]y'+$

$$+(abx-cd)y=0.$$

假设 $y(x)=x^{-c}\eta(\xi), \xi=-ax$, 则得到超几何方程 2.260，其中 $\alpha=1-c$, $\beta=b-c$, $\gamma=1-c-d$，且变量 x, y 由 ξ, η 来代替.

借助于级数将解表示为显式，见 A R Forsyth, W Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl, Braunschweig, 1912, p. 207,741.

2.340. $(ax+b)x^2y''-2x(ax+2b)y'+2(ax+3b)y=0.$

$$(ax+b)y=x^2(C_1+C_2x).$$

2.341. $(ax+b)x^2y''+(2ax+b)xy'+(avx-b)y=$

$$=A(ax+b)x^3.$$

关于对应的齐次方程的解，见 2.410. 非齐次方程的一个解具有下列形式：

$$y=\frac{A}{\nu+12}\left[x^3+\frac{b}{a}\frac{\nu+4}{\nu+6}x^2-\frac{b^2}{a^2}\frac{3(\nu+4)}{(\nu+2)(\nu+6)}x\right].$$

E Honegger, *Zeitschrift f angew Math Mech* 7(1927), p. 120.

342—396. $(ax^4+\cdots)y''+\cdots$

2.342. $x^4y''+ay=0$; 2.14 的类型.

$$y=\begin{cases} x\left(C_1 e^{\frac{\alpha}{x}}+C_2 e^{-\frac{\alpha}{x}}\right) & \text{当 } a=-\alpha^2<0 \text{ 时,} \\ x\left(C_1\cos\dfrac{\alpha}{x}+C_2\sin\dfrac{\alpha}{x}\right) & \text{当 } a=\alpha^2>0 \text{ 时.} \end{cases}$$

2.342a. $x^4y''=(2x^2\pm 1)y$;

方程 2.155 当 $k=-2$ 时的特殊情况。

当取上面的符号时:

$$y=C_1(x^2-x)e^{\frac{1}{x}}+C_2(x^2+x)e^{-\frac{1}{x}};$$

当取下面的符号时:

$$y=C_1\left(x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)+C_2\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right).$$

2.343. $x^4y''-[a(a-1)x^2+b(x+b)]y=0$.

$$y=(ax+b)Z_a(\xi)+biZ'_a(\xi),\ \xi=bix^{-1},$$

其中 Z_a 是柱函数(见 2.162).

2.344. $x^4y''+(e^{\frac{2}{x}}-\nu^2)y=0$; 见 2.162(24).

2.345. $x^4y''+xy'-2y=0$.

$$y=C_1xE+C_2\left(x^2-xE\int\frac{dx}{E}\right),\ \text{其中 } E=E(x)=\exp\frac{1}{2x^2}.$$

2.346. $x^4y''-(a+b)x^2y+[(a+b)x+ab]y=0$.

$$y=\begin{cases} C_1xe^{-\frac{a}{x}}+C_2xe^{-\frac{b}{x}} & \text{当 } a\neq b \text{ 时,} \\ (C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{x}} & \text{当 } a=b \text{ 时.} \end{cases}$$

2.347. $x^4y''+x^3y'+y=0$; 方程 2.162(1)的特殊情况.

2.347a. $x^4y''+x^3y'+(\pm x-1)y=0$.

$$y=e^{\mp\frac{1}{x}}\left(C_1+C_2\int x^{-1}e^{\pm\frac{2}{x}}dx\right).$$

2.348. $x^4y''+x^3y'+[a(x^4+1)+bx^2]y=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi),\ \xi=\ln x$, 则得到方程 2.21

$$\eta'' + (2a\operatorname{ch}2\xi + b)\eta = 0.$$

2.349. $x^4y'' + (x^2+1)xy' + y = 0.$

假设 $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \frac{1}{2x^2}$，则得到方程2.113

$$\xi\eta'' + (1-\xi)\eta' + \frac{1}{2}\eta = 0.$$

2.349 a. $x^4y'' + (x^2-1)xy' - (x^2-1)y = 0.$

$$y = x\left(C_1 + C_2\exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right).$$

2.350. $x^4y'' + 2x^3y' + a^2y = 0.$

假设 $\eta(\xi) = y(x),\ \xi = \frac{1}{x}$，则可求得

$$y = C_1\cos\frac{a}{x} + C_2\sin\frac{a}{x}.$$

2.351. $x^4y'' + (2x^2+1)xy' - y = 0.$

$$y = C_1E + C_2E\int\frac{dx}{x^2E},\ 其中\ E = E(x) = \exp\frac{1}{2x^2}.$$

2.352. $x^4y'' + 2x^2(x+a)y' + by = 0.$

假设 $\eta(\xi) = y(x),\ \ \xi = \frac{1}{x}$，则得到

$$\eta'' - 2a\eta' + b\eta = 0.$$

2.353. $x^4y'' - (2x^2-1)xy' + y = 0.$

$$y = \frac{1}{x}(x^4 + 2x^2 - 1)\left(C_1 + C_2\int\frac{x^4\exp\frac{1}{2x^2}}{(x^4+2x^2-1)^2}dx\right).$$

2.354. $x^4y'' - (2x^2-1)xy' + 2y = 0.$

$$y = \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)\left(C_1 + C_2\int\frac{x^6}{(5x^2-1)^2}\exp\frac{1}{2x^2}dx\right).$$

2.354 a. $x^4y'' + ax^3y' + (bx^2 + cx^m)y = 0.$

除以 x^2，则为方程 2.162(1)的特殊情况.

2.354 b. $x^4y''+(ax+2b)x^2y'+(cx^4+dx^2+ex+f)y=0.$

除以 x^2. 只要下列三个等式中至少有两个成立：

$$c=0,\quad e=(a-2)b,\ f=b^2,$$

则可得到方程 2.162(16)的特殊情况.

2.355. $x(x^3+1)y''+(x^3-1)y'-x^2y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi),\xi=-x^3$, 则得到超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\xi-\frac{1}{3}\right)\eta'-\frac{1}{9}\eta=0.$$

除以 x^2 以后，则得到全微分方程；

$$y=u^{\frac{1}{3}}\left(C_1+C_2\int xu^{-\frac{4}{3}}dx\right),\ 其中\ u=x^3+1.$$

J Zbornik, *Akad Wien* 166 (1957).

2.356. $x^2(x^2+1)y''+x(2x^2+1)y'-$

$$-[\nu(\nu+1)x^2+n^2]y=0;$$

见 2.240(7).

2.357. $x^2(x^2+1)y''+(ax^2+a-1)xy'+(bx^2+c)y=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x),\xi^2=x^2+1$, 则得到

$$(\xi^2-1)^2\eta''+a\xi(\xi^2-1)\eta'+(b\xi^2+c-b)\eta=0.$$

当常数之间存在着适当的关系时， 此方程是方程 2.240(13)的特殊情况.

2.358. $x^2(x^2-1)y''-(x^2-2)(xy'-y)=0;$

方程 2.410 的特殊情况.

$$y=C_1x+C_2x\cdot\begin{cases}\arcsin x & 当\ |x|<1\ 时,\\ \ln(x+\sqrt{x^2-1}) & 当\ |x|>1\ 时.\end{cases}$$

2.359. $x^2(x^2-1)y''+2x^3y'+\nu(\nu+1)y=0$; 见 2.240(8).

2.360. $x^2(x^2-1)y''+2x^3y'-\nu(\nu+1)(x^2-1)y=0$;

见 2.240(9).

2.361. $x^2(x^2-1)y''-2x^3y'-[a(a+3)x^2-a(a+1)]y=0$;

见 2.362(当 $n=a$ 时).

2.362. $x^2(x^2-1)y''-2x^3y'-[(a-n)(a+n+1)x^2(x^2-1)+$
$+2ax^2+n(n+1)(x^2-1)]y=0$.

此方程是第一部分 18.6 节 讨论过的 那种类型的方程. 如果 n 是自然数,则通解具有下列形式:

$$y=x^{-n}[C_1e^{\lambda x}P(x)+C_2e^{-\lambda x}Q(x)],$$

其中 $\lambda^2=(a-n)(a+n+1)$, 而 P, Q 是次数$\leqslant 2n+2$ 的多项式.

当 $n=a$ 或 $n=-a-1$ 时(这里 n 不必一定是整数), 则得到 2.410 型的方程. 通解是:

$$y=C_1x^{-a}+C_2\left(\frac{x^{a+3}}{2a+3}-\frac{x^{a+1}}{2a+1}\right),$$

只要这个表达式中的两个分母不等于零.

2.362 a. $x^2(x^2-1)y''+(3x^2-1)xy'+y=0$;

方程 2.363 a 的特殊情况.

假设 $xy=u(x)$,则得到方程 2.315 a,其中未知函数 y 换为 u.

2.362 b. $x^2(x^2-1)y''+3(x^2-1)xy'-y=0$;

方程 2.363 a 的特殊情况.

假设 $u(x)=xy$, 则得到方程 2.316, 其中未知函数 y 换为 u.

2.363. $x^2(x^2-1)y''+(ax^2+a-2)xy'+b(x^2-1)y=0$.

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $2x\xi=x^2+1$,则得到

$$(\xi^2-1)\eta''+a\xi\eta'+b\eta=0.$$

当 $a=3, b=1$ 时，则有

$$y=\frac{x}{x^2-1}(C_1+C_2\ln x).$$

[关于 $a=1$ 的情况，见 2.235.——俄译本编者注.]

2.363 a. $x^2(x^2-1)y''+(ax^2+b)xy'+cy=0.$

如果 $c=(a+b)(a-1)$，则 $y=x^{1-a}$ 是一个特解；其余的解可以根据第一部分 24.2 节(b)中讲的方法求得.

假设 $y=x^r u(x)$，其中 r 是方程 $r^2-(b+1)r=c$ 的根，则得到方程 2.318：

$$x(x^2-1)u''+[(a+2r)x^2+b-2r]u'+ \\ +r(a+r-1)u=0.$$

2.364. $x^2(x^2-1)y''-[2bcx^c(x^2-1)+$
$+2(a-1)x^2-2a]xy'+\{b^2c^2x^{2c}(x^2-1)+$
$+bc(2a-c-1)x^{c+2}-bc(2a-c+1)x^c+$
$+[a(a-1)-\nu(\nu+1)]x^2-a(a+1)\}y=0;$

见 2.240(11).

2.365. $(x^2+1)^2y''+ay=0.$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\begin{cases} C_1\cos(\alpha\,\mathrm{arctg}x)+C_2\sin(\alpha\,\mathrm{arctg}x) & \text{当 } a+1=\alpha^2>0\text{ 时,} \\ C_1\mathrm{ch}(\alpha\,\mathrm{arctg}x)+C_2\mathrm{sh}(\alpha\,\mathrm{arctg}x) & \text{当 } a+1=-\alpha^2<0\text{ 时,} \\ C_1+C_2\mathrm{arctg}x & \text{当 } a=-1\text{ 时.} \end{cases}$$

2.366. $(x^2+1)^2y''+2x(x^2+1)y'+y=0;$

方程 2.79 的特殊情况.

其自共轭的形式是：

$$[(x^2+1)y']'+\frac{y}{x^2+1}=0.$$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$x=\mathrm{tg}\xi$，则得到方程 $\eta''+\eta=0$；其解为：$\sin\xi$, $\cos\xi$. 因此

$$y\sqrt{x^2+1}=C_1+C_2x.$$

2.367. $(x^2+1)^2y''+2x(x^2+1)y'+$
$$+[a^2(x^2+1)^2-n(n+1)(x^2+1)+m^2]y=0.$$

此方程同方程 2.372 相类似.

2.368. $(x^2+1)^2y''+ax(x^2+1)y'+by=0.$

假设

$$\eta(\xi)=y(x),\ \xi=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

则得到

$$(\xi^2-1)\eta''-(a-3)\xi\eta'-b\eta=0.$$

2.369. $(x^2-1)^2y''+ay=0.$

$$y=\begin{cases}\sqrt{|x^2-1|}\left[C_1\cos\left(\alpha\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)+C_2\sin\left(\alpha\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)\right], & \text{当 } a-1=4\alpha^2>0 \text{ 时},\\ (x+1)\left[C_1\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\alpha-\frac{1}{2}}+C_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right], & \text{当 } a-1=-4\alpha^2<0 \text{ 时},\\ \sqrt{x^2-1}\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right), & \text{当 } a=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.370. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-a^2y=0;$

方程 2.79 的特殊情况.

当 $a>0$ 时,则有

$$y=C_1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}a}+C_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}a};$$

相应于具有条件"当 $|x|<1$ 时 $y(x)$ 有界"的边值问题的格林函数为

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a(\xi^2-1)^3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\,\dfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{1}{2}a} & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时,}\\[2ex] \dfrac{1}{2a(\xi^2-1)^3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\,\dfrac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}a} & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时.}\end{cases}$$

2.371. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-[\lambda(x^2-1)+a^2]y=0.$

假设 $y=|x^2-1|^{\frac{1}{2}a}u(x)$，则得到

$$(x^2-1)u''+2(a+1)xu'+[a(a+1)-\lambda]u=0.$$

关于这个方程见 2.244.

假设

$$y(x)=\eta(\xi),\quad x=i\operatorname{ctg}\xi,$$

则得到方程

$$\eta''\sin^2\xi-(a^2\sin^2\xi-\lambda)\eta=0,$$

而假设

$$y(x)=\frac{\eta(\xi)}{\sqrt{|\sin\xi|}},\quad x=\cos\xi,$$

则得到方程

$$\eta''\sin^2\xi+\left[\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)\sin^2\xi-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\right]\eta=0,$$

即 2.424 型的方程．因此，如果 $\lambda=-n(n-1)$ (n 为自然数) 或者如果 $a+\dfrac{1}{2}$ 是自然数，则原方程可积分为有限形式.

E. G C Poole, *Journ London Math Soc* 5(1930), p. 189—191.

如果 $\lambda=\nu(\nu+1)$，而 $a=n$ 是自然数，则原方程同 2.240(12)，即勒让德伴随函数的方程一样．如果 $a=n$ 固定，并且给出边界条件"当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时 $y(x)$ 是正则的"，则特征值是 $\lambda=m(m+1)$，而特征函数是勒让德

伴随函数 $P_m^n(x)$，且这些函数满足正交性关系

$$\int_0^1 P_{m_1}^n(x) P_{m_2}^n(x)\, dx =$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{当 } m_1 \neq m_2 \text{ 时,} \\ \dfrac{2}{2m+1} \dfrac{(m+n)!}{(m-n)!} & \text{当 } m_1 = m_2 = m \geqslant n \text{ 时.} \end{cases}$$

关于如何得到封闭形式的解，见 J. Zbornik, *Akad Wien* **166** (1957), p 42.

2.372. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'+$

$$+[(ax^2+bx+c)(x^2-1)-k^2]y=0.$$

当 $a=b=0$ 时，见 2.371. 在一般情况下，假设

$$y=(x^2-1)^{\frac{k}{2}}\, u(x),$$

则得到方程 2.248

$$(x^2-1)u''+2(k+1)xu'+$$

$$+[ax^2+bx+c+k(k+1)]u=0.$$

A. H Wilson, *Proceedings Soc London A* 118 (1928), p. 617—647.

2.373. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-$

$$-[a^2(x^2-1)^2+n(n+1)(x^2-1)+m^2]y=0.$$

当 $a=0$ 时，得到方程 2.240(12). 借助于此方程的解，原方程可以化为沃尔泰拉积分方程.

H. J Priestley, *Proceedings London Math Soc* (2)20 (1922), p 37—50.

2.374. $(x^2-1)^2y''-2(2a-1)x(x^2-1)y'+$

$$+\{[2a(2a-1)-\nu(\nu+1)]x^2+2a+\nu(\nu+1)\}y=0;$$

见 2.240(13).

2.375. $(x^2-1)^2y''+2(n+1-2a)x(x^2-1)y'+\{4a(a-$

$$-n)x^2-[2a+(\nu+n+1)(\nu-n)](x^2-1)\}y=0;$$

见 2.240(14).

2.376. $x^2(x^2+a)y''+x(2x^2+a)y'+by=0.$

此方程是 2.442 型的方程，经过变换 $\eta(\xi)=y(x)$，$\xi=\frac{1}{x}$，可将其化为方程 2.297，其中变量 x，y 换为 ξ，η.

2.377. $(x^2\pm a^2)^2y''+b^2y=0.$

抛物线断面的双壁压杆的弯曲方程. 当取上面的符号时(壁面收缩的杆)，则有

$$y=\sqrt{x^2+a^2}\,(C_1\cos u+C_2\sin u),$$

其中
$$u=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a};$$

当取下面的符号时(壁面突出的杆)，则有

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\,(C_1\cos u+C_2\sin u),$$

其中

$$u=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x},\quad |x|<a.$$

2.378. $x^2(x-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-2(x^2-x-1)y=0.$

$$y=\frac{x^2}{x-1}\left\{C_1+C_2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right]\right\}.$$

2.378 a. $x(x-1)(x+1)^2y''+2x(x+1)(x-3)y'-$
$-2(x-1)y=0.$

假设 $u(x)=(x+1)^2y$，则得到方程

$$x(x-1)u''-2xu'+2u=0;$$

其通解是：

$$u=C_1x+C_2(1-x^2+2x\ln x).$$

2.379. $(x+1)^2(x^2+2x+3)y''-12y=0.$

$$y=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\times$$

$$\times\left[C_1+C_2\left(x+\frac{x+1}{x^2+2x+3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

2.380. $x^2(x-a)^2y''+by=0.$

$$y=C_1|x|^m|x-a|^{1-m}+C_2|x|^{1-m}|x-a|^m,$$

如果 $m(m-1)a^2=-b.$

2.381. $x^2(x-a)^2y''+by=cx^2(x-a)^2.$

$$y=\frac{-c}{a(2m-1)}\times$$

$$\times\left[|x|^{1-m}|x-a|^m\int|x|^m|x-a|^{1-m}dx-\right.$$

$$\left.-|x|^m|x-a|^{1-m}\int|x|^{1-m}|x-a|^m dx\right],$$

如果 $m(m-1)a^2=-b.$

2.382. $(x-a)^2(x-b)^2y''=cy,\ a\neq b.$

假设 $y=(x-b)\eta(\xi)$, $\xi=\ln\frac{x-a}{x-b}$, 则得到常系数方程

$$(a-b)^2(\eta''-\eta')=c\eta.$$

于是得到

$$y=C_1|x-a|^{\frac{1+\lambda}{2}}|x-b|^{\frac{1-\lambda}{2}}+C_2|x-a|^{\frac{1-\lambda}{2}}|x-b|^{\frac{1+\lambda}{2}},$$

其中

$$\lambda^2=\frac{4c}{(a-b)^2}+1\neq 0.$$

2.383. $(x-a)^2(x-b)^2y''+[(1+\alpha+\beta)(x-a)^2(x-b)+$
$+(1-\alpha-\beta)(x-b)^2(x-a)]y'+\alpha\beta(a-b)^2y=0;$

见 2.407(4).

2.383 a. $x^2(x-1)(2x-1)y''+2(x-2)(2x-1)xy'-$
$2(x-1)y=0.$

假设 $u(x)=x^2y$, 则得到方程

$$(x-1)(2x-1)u''-2(2x-1)u'+4u=0,$$

经过变换 $u(x)=\eta(\xi)$, $\xi=2x-1$，此方程则化为超几何方程 2.260，并且具有通解

$$u=C_1(2x-1)+C_2[2x^2-1-(2x-1)\ln(2x-1)].$$

2.383 b. $2x(x-1)(x+1)^2y''+2(2x-1)(x+1)^2y'+$

$+y=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 则得到方程2.317，

其中变量 x, y 变为 ξ, η.

2.384. $4x^4y''-[(a^2-1)x^2-2(a+3)bx+b^2]y=0.$

$$y=e^{-\frac{b}{2x}}x^{\frac{3-a}{2}}\left(\frac{a+1}{x}-\frac{b}{x^2}\right)\left(C_1+C_2\int x^a e^{\frac{b}{x}}\,dx\right)-$$

$$-C_2e^{\frac{b}{2x}}x^{\frac{3+a}{2}}.$$

2.385. $4(x^2+1)^2y''+(ax^2+a-3)y=0.$

当 $a>1$ 时，

$$y=(x^2+1)^{\frac{1}{4}}(C_1\cos X+C_2\sin X),$$

其中

$$X=\frac{1}{2}\sqrt{a-1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

当 $a<1$ 时，$a-1$, cos , sin 应分别由 $1-a$, ch, sh 来代替.

2.385 a. $4(x^2-1)^2y''+(x^2+2)y=0.$

$$y=\begin{cases}\sqrt[4]{1-x^2}\,(C_1+C_2\arcsin x) & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ \sqrt[4]{x^2-1}\,(C_1+C_2\,\mathrm{arch}\,x) & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

2.386. $(2x+1)^2(x^2+x+1)y''-18y=0.$

$$y=\frac{x^2+x+1}{(2x+1)^2}\left\{C_1+C_2\int\frac{(2x+1)^4}{(x^2+x+1)^2}dx\right\}.$$

2.387. $4(x^2+x+1)^2y''-3y=0.$

$$y=\sqrt{x^2+x+1}\left(C_1+C_2\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.388. $4x^2(x-1)^2y''+2x(x-1)(3x-1)y'+$
$+[\nu(\nu+1)(x-1)-a^2x]y=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $x=\xi^{-2}$, 则得到方程 2.240 (12), 其中 n, x, y 由 a, ξ, η 来代替.

2.389. $4x^2(x-1)^2y''+2x(x-1)(3x-1)y'-$
$-[\nu(\nu+1)(x-1)^2+4n^2x]y=0;$

见 2.260(15).

2.390. $16x^2(x-1)^2y''+3y=0$; 方程 2.382 的特殊情况.

2.391. $x^2(ax^2+1)y''-x(7ax^2+5)y'+5(3ax^2+1)y=0.$

$$y=C_1x^5+C_2x(2ax^2+1).$$

2.392. $a(x^2-1)^2y''+bx(x^2-1)y'+(cx^2+dx+e)y=0.$

如果 p, q 这样选择,即使得

$$4aq(q-1)+2bq+c+d+e=0,$$
$$(p-q)[2a(p+q-1)+b]=d,$$

那么经过变换

$$y(x)=(x+1)^p(x-1)^q\eta(\xi),\quad \xi=\frac{1}{2}(x+1)$$

则化为关于 η 的超几何方程 2.260.

2.393. $ax^2(x-1)^2y''+(bx^2+cx+d)y=0.$

如果 p, q 这样选择,即使得

$$ap(p-1)+d=0,\quad aq(q-1)+b+c+d=0,$$

那么经过变换 $y=x^p(x-1)^q u(x)$ 则化为超几何方程 2.260

$$ax(x-1)u''+2a[(p+q)x-p]u'+$$
$$+(2apq-c-2d)u=0.$$

2.394. $\boldsymbol{x^2(ax+b)^2y''+2x(ax+b)^2y'+cy=0.}$

假设

$$\eta(\xi)=y(x),\quad \xi=\frac{\sqrt{|c|}}{b}\ln\frac{x}{ax+b},$$

则得到常系数方程

$$\sqrt{|c|}\eta''+b\eta'+\mathrm{sign}c\cdot\sqrt{|c|}\eta=0.$$

2.395. $\boldsymbol{(ax+b)^4y''+y=0.}$

假设 $\eta(\xi)=y(x),\xi=ax+b$, 则得到方程 2.14

$$a^2\xi^4\eta''+\eta=0.$$

由此求得

$$\eta=C_1\xi\cos\frac{1}{a\xi}+C_2\xi\sin\frac{1}{a\xi}.$$

2.396. $\boldsymbol{(ax^2+bx+c)^2y''+Ay=0.}$

假设

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}\,\eta(\xi),\ \xi=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

则得到常系数方程

$$\eta''+\left(A+ac-\frac{1}{4}b^2\right)\eta=0.$$

如果三项式 ax^2+bx+c 在所考虑的区间上没有零点，则可采用这个方法。如果三项式具有两个不同的零点,则可采用 2.382 的方法。

397—410. $(ax^n+\cdots)y''+\cdots;\quad n\geqslant 5$

2.397. $\boldsymbol{x^5y''+xy'-y=0}$; 方程 2.442 的特殊情况。

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{1}{x^2}\exp\frac{1}{3x^3}dx.$$

2.398. $x(x^2-1)^2y''+(x^2-1)(3x^2-1)y'+$

$$+[x^2-1-(2\nu+1)^2]xy=0.$$

假设 $y(x)=\eta(\xi)\sqrt{\frac{1}{2}\xi+1}$, $\xi=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,则得到勒让德方程 2.240,其中变量 x, y 换为 ξ, η.

2.399. $(x+1)(x-1)^2(3x+5)^2y''-$

$$-(3x+1)(x-1)(3x+5)^2y'+36(x+1)^3y=0.$$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $12\xi=(x-1)^3(3x+5)$,则得到方程 2.14

$$4\xi^2\eta''+\eta=0.$$

由此求得

$$y=\sqrt{|\xi|}(C_1+C_2\ln|\xi|)$$

2.400. $x^6y''-x^5y'+ay=0.$

假设 $y=x^2\eta(\xi)$, $\xi=x^{-2}$, 则得到

$$4\eta''+a\eta=0.$$

2.401. $x^6y''+(3x^2+a)x^3y'+by=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x^{-2}$, 则化为方程

$$4\eta''-2a\eta'+b\eta=0.$$

2.402. $x^2(x^2-1)^2y''+[(1-4a)x^2-1]x(x^2-1)y'+$

$$+[(x^2-\nu^2)(x^2-1)^2+4a(a+1)x^4-$$

$$-2ax^2(x^2-1)]y=0;$$

见 2.162(19).

2.403. $y''+y'\sum_{n=1}^{3}\frac{1-\alpha_n-\beta_n}{x-c_n}+$

$$+\frac{y}{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{3}\frac{\alpha_n\beta_n(c_n-c_{n-1})(c_n-c_{n+1})}{x-c_n}=0.$$

其中$\sum(\alpha_n+\beta_n)=1, c_{n+3}=c_n$；黎曼方程.

此方程同超几何方程 2.260 密切相关；根据黎曼的建议,其解可表示为

$$P\begin{Bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix}.$$

详见 2.407.

2.404. $4x^6y''+4x^3(2x^2+1)y'-(2x^2-1)y=0.$

$$y=\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{4x^2}\right).$$

2.405. $4x^6y''-4x^3(2x^2+1)y'+(8x^4+10x^2+1)y=0.$

$$y=(C_1+C_2x)x\exp\left(-\frac{1}{4x^2}\right).$$

2.406. $16(x^3-1)^2y''+27xy=0.$

经过变换 $y=(x^3-1)^{\frac{1}{4}}u(x)$, 得到

$$16(x^3-1)u''+24x^2u'-3xu=0;$$

假设 $u=\eta(\xi),\xi=x^3$, 由此得到超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{7}{6}\xi-\frac{2}{3}\right)\eta'-\frac{1}{48}\eta=0.$$

2.407. $y''+y'\sum_{n=1}^{3}(1-\alpha_n-\beta_n)\frac{b_n}{b_nx-a_n}-$

$$-\frac{y}{(b_1x-a_1)(b_2x-a_2)(b_3x-a_3)}\sum_{n=1}^{3}\alpha_n\beta_n\frac{\Delta_n\Delta_{n-1}}{b_nx-a_n}=0,$$

其中

$$\sum(\alpha_n+\beta_n)=1,\quad |a_n|+|b_n|>0,$$

$$\Delta_n=a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n\neq 0,\quad a_{n+3}=a_n,\quad b_{n+3}=b_n.$$

[文献：Whittaker 和 Watson. Sansone,第Ⅷ章；В В Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950.——俄译本编者注.]

将此方程写为下列形式：

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}=0. \tag{1}$$

在文献中讨论过 $b_n=1$ 的情况；$b_n=0$ 的情况可借助于取极限的办法来研究。

当 $a_1=b_2=0$，$a_3=b_3=1$，$\alpha_1=\alpha_3=0$，$\alpha_2=\alpha$，$\beta_1=1-\gamma$，$\beta_2=\beta$，$\beta_3=\gamma-\alpha-\beta$ 时，方程(1)化为超几何方程 2.260.

当 $a_1=b_2=0$，$b_1=a_2=a_3=1$，$b_3=b$，$\alpha_1=\frac{1}{2}+m$，

$$\beta_1=\frac{1}{2}-m,\quad \alpha_2=-\frac{1}{b},\quad \beta_2=0,\quad \alpha_3=-k+\frac{1}{b},\quad \beta_3=k$$

时，由(1)得到

$$y''+\frac{b-1}{bx-1}y'+\frac{y}{x(bx-1)}\left[\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x}+k\frac{1-kb}{bx-1}\right]=0 \tag{2}$$

而当 $b\to 0$ 时，由此得到形式为 2.190 的退化的超几何方程 2.273

$$x^2y''+x^2y'+\left(\frac{1}{4}-m^2+kx\right)y=0. \tag{3}$$

当 $\alpha_3+\beta_3=1$，$\alpha_3\beta_3=0$，$b_n\neq 0$ 时，得到方程

$$y''+\left(\frac{1-\alpha-\beta}{x-a}+\frac{1+\alpha+\beta}{x-b}\right)y'+\frac{\alpha\beta(a-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}y=0. \tag{4}$$

如果 $a\neq b$,则此方程具有解

$$y=\begin{cases} C_1\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^{\alpha}+C_2\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^{\beta} & \text{当 } \alpha\neq\beta \text{ 时,}\\ C_1\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^{\alpha}+C_2\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^{\alpha}\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right| & \text{当 } \alpha=\beta \text{ 时.}\end{cases}$$

经过变换

$$y(x)=\frac{|b_2x-a_2|^{r+s}}{|b_1x-a_1|^{r}|b_3x-a_3|^{s}}\eta(\xi),$$

$$\xi=\frac{Ax+B}{Cx+D},\quad \text{其中}\quad AD-BC\neq 0, \tag{5}$$

则将方程(1)的解 $y(x)$ 化为方程

$$\left\{\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \alpha_1+r & \alpha_2-r-s & \alpha_3+s \\ \beta_1+r & \beta_2-r-s & \beta_3+s \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}=0 \tag{6}$$

的解 $\eta(\xi)$,反之亦然;这里

$$A_n=Aa_n+Bb_n,\quad B_n=Ca_n+Db_n.$$

当 $r=-\alpha_1$, $s=-\alpha_3$, $A=\dfrac{b_1}{\Delta_3}$, $B=-\dfrac{a_1}{\Delta_3}$, $C=-\dfrac{b_2}{\Delta_2}$, $D=\dfrac{a_2}{\Delta_2}$时,方程(6)则化为超几何方程. 所以,在给定的情况下,如果(5)中的 $\eta(\xi)$ 遍及此超几何方程的解,则得到方程(1)的解 $y(x)$.

关于借助于曲线积分表示解,见第一部分 22.6 节.

2.408. $x(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)y''+$

$$+[x^2(x^2-a_1)(x^2-a_2)+x^2(x^2-a_1)(x^2-a_3)+$$
$$+x^2(x^2-a_2)(x^2-a_3)-(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)]y'+$$
$$+(Ax^2+B)y=0;$$ 拉梅方程.

[文献：Whittater 和 Watson，第23章；Янке，Эмде 和 Лёш；М. Д. О Стрэтт，Функции Ламе. Матье и родственные им в физике и технике，Харьков，1935；Ince；Н. И Ахиезер，Элементы теории эллиптических функций，1970；М А Лаврентьев и Б В. Шабат，Методы теории функций комплексного переменного，1965；Кузнецов Bateman 和 Erdelyi ——俄译本编者注.]

如果将偏微分方程

$$\Delta u+k^2u=0$$

化为椭圆坐标，则得到此方程。给定的微分方程的这种来源，也可用以解释其问题的通常提法。

此方程的其他一些写法是：

$$y''+\left(\frac{1}{x^2-a_1}+\frac{1}{x^2-a_2}+\frac{1}{x^2-a_3}-\frac{1}{x^2}\right)xy'+$$
$$+\frac{(Ax^2+B)x^2}{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}y=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}\times$$
$$\times\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}\,y'\right]+$$
$$+(Ax^2+B)y=0. \tag{2}$$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x^2$, 则由(1)得到方程 2.329(14)

$$\eta''+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-a_1}+\frac{1}{\xi-a_2}+\frac{1}{\xi-a_3}\right)\eta'+$$
$$+\frac{A\xi+B}{4(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)}\eta=0. \tag{3}$$

如果 $\mathscr{P}(x)$是满足下列方程的外尔斯特拉斯 $\mathscr{P}$-函数：

$$\mathscr{P}'^2=4(\mathscr{P}-e_1)(\mathscr{P}-e_2)(\mathscr{P}-e_3),$$

$$\text{其中}\quad e_n=a_n-\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3),$$

那么假设

$$\eta(\xi)=y(x),\quad x^2=\mathscr{P}(\xi)+\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3),$$

则由(1)得到方程 2.26：

$$\eta''+[A\mathscr{P})\xi)+B]\eta=0. \tag{4}$$

经过变换

$$\eta(\xi)=y(x),\quad x^2=a_3+(a_2-a_3)\mathrm{sn}^2\xi\quad(a_1>a_2>a)$$

可将方程(1)化为下列形式：

$$\eta''+\left(\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}A\mathrm{sn}^2\xi+\frac{a_3A+B}{a_1-a_3}\right)\eta=0. \tag{5}$$

(4)和(5)按照代换中利用的椭圆函数称为拉梅方程的**外尔斯特拉斯型**和**雅可比型**；(1)和(3)则称为拉梅方程的**代数型**.

数值 A 的特殊选择．通常假设 $A=-n(n+1)$ (n 为非负整数)；其次假设 $B=-\lambda$. 由(1)—(5)这样得到的方程,其标号记为从(1 a)到(5 a)．正如上面指出的，方程 (3 a) 属于 2.329 (14)型，所以如果采用 2.329 中的记号，此方程具有解

$$\eta=y\left(\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3},\ \frac{4n(n+1)a_3+\lambda}{4(a_2-a_3)};\right.$$

$$\left.\frac{n+1}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\xi-a_3}{a_2-a_3}\right)$$

(这里 n 不必一定是整数)．其次,方程(3 a) 有两个解,且它们的乘积是 ξ 的 n 次多项式；此多项式满足（同 3.26 相比较)方程

$$2(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)\eta'''+$$

$$+[9\xi^2-6(a_1+a_2+a_3)\xi+3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]\eta''-$$

$$-2[(n^2+n-3)\xi+a_1+a_2+a_3+\lambda]\eta'-n(n+1)\eta=0, \tag{6}$$

并且由此方程可以求出，只要将表达式

$$\eta=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu(\xi-a_1)^\nu$$

代入方程，而且以适当的方式选择数值c_ν. 这时，正如在方程 2.268 的情况中那样，借助于此多项式即可求得方程(3 a)的解. 从而也就得到方程(1 a)，(4 a)，(5 a)的解. 由(4 a)得到的相应于(6)的方程具有下列形式：

$$\eta'''-[4n(n+1)\mathscr{P}(\xi)+\lambda]\eta'-2n(n+1)\mathscr{P}'(\xi)\eta=0. \tag{7}$$

当 $a_3=0, a_2=a_1=1, \lambda=m^2-n(n+1)$ (m 为自然数)时，(1 a)化为勒让德伴随多项式的方程 2.240(12).

拉梅函数. 其次，考虑下述问题：需要怎样选择参数 λ(特征值)，才能使方程(3 a)具有下列形式的解：

$$P(\xi),\quad \sqrt{\xi-a_\nu}\,P(\xi),$$

$$\sqrt{(\xi-a_\mu)(\xi-a_\nu)}\,P(\xi),\ \sqrt{(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)}\,P(\xi),$$

其中 P 为某一个多项式？这些解称为第一范畴第一、二、三、四类拉梅函数. 问题的提法和解，借助于上述变换可以直接搬到方程(1 a)，(4 a)，(5 a)上去. 例如，将级数

$$\eta=\sum_{\nu\geq 0}c_\nu(\xi-a_2)^{\frac{1}{2}n-\nu}\quad (a_1>a_2>a_3)$$

代入方程可以得知，对于偶数 m，第一类拉梅函数存在. 在一般情况下，数 λ 可以这样选择，即使得当 n 为偶数时第一类和第三类拉梅函数存在，而当 n 为奇数时第二类和第四类拉梅函数存在；例如，当 $n=2$ 时，则有

$$\lambda=\frac{1}{6}\lambda_{1,2},\quad 其中\ \lambda_{1,2}=-2\sum a_\nu\pm\sqrt{\sum a_\nu^2-\sum a_\mu a_\nu}.$$

对于给定的 n，总共存在 $2n+1$ 个线性无关的拉梅函

数.

根据第一部分 24.2 节由第一范畴拉梅函数得到的线性无关的解，称为第二范畴拉梅函数.

2.409. $x^{2a}y''+ax^{2a-1}y'+b^2y=0.$

$y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$, 其中 $u=\dfrac{1}{a-1}x^{1-a}$, $a\neq 1$.

[当 $a=1$ 时，则得到欧拉方程(见第一部分 22.3 节. ——俄译本编者注.]

2.410. $x^2(ax^b-1)y''+(apx^b+q)xy'+(arx^b+s)y=0.$

求出方程

$$A^2-(q+1)A-s=0, B^2-(p-1)B+r=0$$

的根 A_1, A_2, 和 B_1, B_2, 并且由等式

$c=A_1$, $(1-\gamma)b=A_2-A_1$, $b\alpha=A_1+B_1$, $b\beta=A_1+B_2$

确定 c, α, β, γ. 这时，所求的解具有下列形式:

$$y=x^c\eta(ax^b),$$

其中 η 是超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+[(\alpha+\beta+1)\xi-\gamma]\eta'+\alpha\beta\eta=0$$

的解.

关于可以求得封闭形式的解的情况，见 A R. Forsyth. W Jacobsthal. Lehrbuch der Differentialgleichungen, 1912, p.210, 756; L Euler, Institutiones Calculi Integralis, Petersburg, 1824—1827, т. II. p 183.

2.410 a. $y''\mathrm{ch}^2a(x-x_0)=by.$

$$假设\ y(x)=\eta(\xi),\quad a(x-x_0)=\ln\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$(0<\xi<1)$, 其中 x 遍及所有实数，则将给定的方程化为下列形式:

$$\xi(\xi^2-1)\eta''+(3\xi^2-1)\eta'+\frac{4b}{a^2}\xi\eta=0.$$

如果 $4b=a^2$，则得到方程 2.317. 借助于变换

$$y(x)=\eta(\xi),\ a(x-x_0)=\ln\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\ (0<\xi<1)$$

原方程可以化为超几何方程

$$\xi(\xi-1)\eta''+(2\xi-1)\eta'+\frac{b}{a^2}\eta=0.$$

2.410 b. $y''\operatorname{sh}^2 a(x-x_0)=by.$

假设 $y(x)=\eta(\xi),\ a(x-x_0)=\pm\ln\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}(\xi>0)$，

其中 x 遍及所有实数，则将给定的方程化为下列形式：

$$\xi(\xi^2+1)\eta''+(3\xi^2+1)\eta'=\frac{4b}{a^2}\xi\eta.$$

411—445. 其他的微分方程

2.411. $(e^x+1)y''=y.$

假设 $\eta(\xi)=y(x),\ \xi=e^x$，则得到

$$\xi^2(\xi+1)\eta''+\xi(\xi+1)\eta'-\eta=0,$$

$$y=C_1(1+e^{-x})+C_2[-1+(1+e^{-x})\ln(1+e^x)].$$

[更一般的结果，见D Mitrinovitch, *Universitet u Beogradu. Publikacije elektrotehnickog fak., ser. mat. i fiz.* 27 (1959), p. 1—4；译文见本书第 775 页。——俄译本编者注.]

2.412. $xy''\ln x-y'-yx\ln^3 x=0.$

$$y=C_1\left(\frac{x}{e}\right)^x+C_2\left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

2.412 a. $x^2y''\ln x+y=0.$

$$y=C_1\ln x+C_2\left(x-\ln x\int\frac{dx}{\ln x}\right).$$

2.413. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0.$

$$y=\left(C_1+C_2\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx\right)\ln x.$$

2.414. $y''\mathrm{sh}^2x-[a^2\mathrm{sh}^2x+n(n-1)]y=0.$

$$y=\mathrm{sh}^n x\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax})\quad 当\ a\neq 0\ 时.$$

2.415. $y''\mathrm{sh}^2x+2ny'\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x+(n^2-a^2)y\mathrm{sh}^2x=0;$

见 2.65。

2.415 a. $y''\sin x-y'+ay\sin x\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=\cos\frac{x}{2}$，则得到方程 2.160

$$\xi^2\eta''+\xi\eta'+4a\eta=0.$$

2.416. $y''\sin x+(2n+1)y'\cos x+$

$$+(\nu-n)(\nu+n+1)y\sin x=0;$$

见 2.240(19)。

2.417. $y''\sin x+(\sin^2x-\cos x)y'+y\sin^3x=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=\cos x$，则得到方程 2.35

$$\eta''-\eta'+\eta=0;\quad \eta=e^{\frac{\xi}{2}}\left(C_1\cos\frac{\xi\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{\xi\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.417 a. $4y''\sin x+4y'+y\sin x=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，$\xi=\cos\frac{x}{2}$，则得到方程2.315a，

其中变量 x，y 换为 ξ，η。

2.418. $(x\cos x-\sin x)y''+xy'\sin x-y\sin x=0.$

$$y=C_1x+C_2\sin x.$$

2.419. $x^2y''\cos x+(x^2\sin x-2x\cos x)y'+$

$$+(2\cos x-x\sin x)y=0.$$

$$y=C_1x+C_2x\sin x.$$

2.420. $y''\cos^2x-[a\cos^2x+n(n-1)]y=0;$

方程 2.25 的特殊情况.

如果 n 为自然数,则有

$$y=\cos^n x\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{x\sqrt{a}}+C_2e^{-x\sqrt{a}}).$$

2.420 a. $y''\cos^2x+ay'\sin 2x+by=0.$

(a) $b=2a$: $y=\cos^{2a}x\left(C_1+C_2\int\cos^{-2a}x\,dx\right)$;

(b) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{4}$:

$$y=\sqrt{|\cos x|}\left(C_1\sin\frac{x}{2}+C_2\cos\frac{x}{2}\right);$$

(c) $a=-\frac{1}{2},\quad b=-\beta^2<0$:

$$y=C_1\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^\beta+C_2\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^\beta;$$

(d) $a=-\frac{3}{2}, b=-24$:

$$y=\frac{1}{\cos^6 x}\{C_1\sin x(5\sin^2x+3)+$$
$$+C_2(\sin^6x-15\sin^4x-45\sin^2x-5)\}.$$

2.420 b. $y''\cos^2x-y'\sin x\cos x+y(a\cos^4x-1)=0.$

假设 $u(x)=y\cos x$, 则得到方程 2.66 a

$$u''+u'\operatorname{tg}x+au\cos^2x=0.$$

2.420 c. $y''\cos^2x+6y'\cos^2x\operatorname{ctg}2x-24y=0.$

假设 $u(x)=y\cos^6x$, 则得到不包含 u 的方程,因而此方程具有特解 $u=1$. 于是, 我们得到原方程的一个解, 并且根据第一部分 24.2 节 (b), 可以求出所有其余的解.

2.421. $y''\cos^2ax+(n-1)ay'\sin 2ax+$
$$+na^2y[(n-1)\sin^2ax+\cos^2ax]=0.$$

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\ \text{其中}\ y_1=\cos^n ax,\quad y_2=y_1'.$$

2.422. $y''\sin^2x-2y=0.$

$$y=C_1\operatorname{ctg}x+C_2(1-x\operatorname{ctg}x).$$

2.423. $y''\sin^2x+ay=0.$ 也可参阅 2.424.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\operatorname{ctg}x$, 则得到方程 2.226

$$(\xi^2+1)\eta''+2\xi\eta'+a\eta=0.$$

2.424. $y''\sin^2x-[a\sin^2x+n(n-1)]y=0$; 见 2.25.

假设$\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x-\frac{\pi}{2}$,则得到 方程 2.420,其中变量 x, y 换为 ξ, η. 所以,对于自然数 n

$$y=\sin^n x\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{x\sqrt{-a}}+C_2e^{-x\sqrt{-a}}).$$

当 $a=-m^2$时, 则得到周期解.

见 W V Koppenfels. *Math Ann* 112 (1936), p 44.

2.425. $y''\sin^2x-[a^2\cos^2x+(3-2a)\cos x+3(1-a)]y=0.$

$$y=C_1u+C_2u\int\frac{dx}{u^2},$$

其中

$$u=(2a-1)\sin^a x+(3-2a)\sin^{a-2}x(\cos x+1).$$

2.426. $y''\sin^2x-\left[a^2\cos^2x+b\cos x+\left(\frac{b}{2a-3}\right)^2-3a+2\right]y=0.$

特解为:

$$y=[(2\alpha+1)\cos x+2\beta]\sin^{\alpha+\beta}\frac{x}{2}\cos^{\alpha-\beta}\frac{x}{2},$$

其中 $\alpha=a-1,\beta=\frac{b}{2a-3}$; 因此, 其余的解可以根据第一部分 24.2 节求出.

2.427. $y''\sin^2x-\{[a^2b^2-(a+1)^2]\sin^2x+$

$+a(a+1)b\sin 2x+a(a-1)\}y=0.$

$$y=C_1u+C_2\left[v+(2a+1)u\int v^2dx\right],$$

其中

$$u=e^{abx}\sin^a x(\cos x+b\sin x),\quad v=e^{-abx}\sin^{-a-1}x.$$

2.428. $y''\sin^2x+(a\cos^2x+b\sin^2x+c)y=0.$

应当将一个三角函数用另一个三角函数来表示，并且将变量 x 相应地用 $\frac{\pi}{2}-x$ 或 $x-\frac{\pi}{2}$ 来代替. 然后见 2.420, 2.424, 2.431.

2.429. $y''\sin^2x+y'\sin x\cos x-y=0.$

$$y=\frac{C_1}{\sin x}+C_2\operatorname{ctg}x=c_1\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c_2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

2.430. $y''\sin^2x+y'\sin x\cos x+[\nu(\nu+1)\sin^2x-n^2]y=0.$

见 2.240(20).

2.430 a. $y''\sin^2x+y'(\cos x+2)\sin x+ay=0.$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 则得到方程 2.187

$$\xi^2\eta''+3\xi\eta'+a\eta=0.$$

2.430 b. $y''\cos x\sin x-y'(3\cos x+2)\cos x-$

$-2y(\cos x+1)\sin x=0.$

$$y=C_1\cos x+C_2[\sin^2x+2\cos x\ln(\cos x)].$$

2.430 c. $y''\cos x\sin x+(a\sin^2x+b)y'+cy\cos x\sin x=0.$

(a) $c=(b-1)(a+b-1)$; $y=\sin^{1-b}x$;

(b) $c=(b+1)(a+b+1)$; $y=\cos^{a+b+1}x$;

(c) $c=2(a+2)$: $y=\sin^{1-b}x\cos^{a+b+1}x$;

(d) $a=b=1, c=2$: $y=1+\cos^2x$;

(e) $a=2, c=24$:

$$y=\sin^{1-b}x\cos^{b+3}x\,(8\sin^2 x+b-3).$$

在这些情况下，根据第一部分 24.2 节 (b) 可以得到其余的解。

(f) $a=2\nu-1$, $b=1$, $c=-\nu(\nu-1)$: 假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\cos x$, 则得到方程 2.240(18)(其中 $a=\nu$, $b=1$, $c=-1$)

$$\xi(\xi^2-1)\eta''-[2(\nu-1)\xi^2-2\nu]\eta'+\nu(\nu-1)\xi\eta=0.$$

2.431. $y''\sin 2x-y'\cos 2x+2y\sin 2x=0$.

$$y=\left(C_1+C_2\int\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos^2 2x}\,dx\right)\cos 2x.$$

2.432. $4y''\sin^2 x+4y'\sin x\cos x-(17\sin^2 x+1)y=0$;

方程 2.434 的特殊情况。

$$y=\frac{1}{\sqrt{|\sin x|}}(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}).$$

2.433. $4x^2y''\cos^2 x+4x^2y'\sin x\cos x+$

$$+(2x^2+x^2\sin^2 x-24\cos^2 x)\,y=4x^2\cos^{\frac{5}{2}}x.$$

假设 $y=u(x)\sqrt{\cos x}$, 则得到非齐次欧拉方程

$$x^2u''-6u=x^2$$

(见第一部分，22.3 节)，由此

$$u=C_1x^3+C_2x^{-2}-\frac{x^2}{4}.$$

2.434. $ay''\sin^2 x+by'\sin x\cos x+$

$$+(c\cos^2 x+d\cos x+e)y=0.$$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=\cos x$, 则得到方程 2.392，其中 x, y, b 由 $\xi, \eta, a+b$ 来代替。

2.435. $y''\sin^3 x-4y\sin 3x=0$.

$$y=C_1\sin^4x+C_2\frac{\cos x}{\sin^3x}(5+6\sin^2x+8\sin^4x+16\sin^6x).$$

2.436. $4y''\sin^2x+[4\nu(\nu+1)\sin^2x-\cos^2x+2-4n^2]y=0$;

见 2.430。

2.436a. $y''\cos x\sin^2x+y'\sin^3x+ay\cos^3x=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sin x$,则得到方程 2.187

$$\xi^2\eta''+a\eta=0.$$

2.436 b. $y''\cos x\sin^2x-y'\sin^3x-\nu(\nu+1)y\cos x=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sin x$, 则得到方程 2.240(8).

2.437. $y''\sin x\cos^2x-y'(3\sin^2x+1)\cos x-y\sin^3x=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\cos x$, 则得到方程 2.187

$$\xi^2\eta''+4\xi\eta'-\eta=0,\qquad \eta=C_1\xi^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}+C_2\xi^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}}.$$

2.437 a. $y''\cos^2x\sin x+y'(a\sin^2x+b)\cos x+cy\sin x=0$.

(a) $c=a(b+1)$: $\quad y=\cos^a x$;

(b) $c=(a+2)(b-1)$: $\quad y=\mathrm{tg}^{1-b}x$;

(c) $c=2(a+b-1)$: $\quad y=\sin^{1-b}x\cos^{a+b-1}x$;

(d) $b=-(a+3)$, $c=-24$:

$$y=\frac{\sin^{a+4}x}{\cos^6x}[(a-2)\cos^2x+8].$$

根据第一部分 24.2 节(b),由此可以求得其余的解.

2.437 b. $y''\cos^2x\sin x+y'(a\sin^2x-1)\cos x+by\sin^3x=0$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\cos x$,则得到方程 2.187

$$\xi^2\eta''+(1-a)\xi\eta'+b\eta=0.$$

2.438. $y''\cos^2x\sin^2x-[a\cos^2x\sin^2x+$

$$+m(m-1)\sin^2x+n(n-1)\cos^2x]y=0;$$

见 2.25。

2.439. $[\mathscr{P}(x)-\mathscr{P}(a)]y''-\mathscr{P}'(x)y'-$

$$-\{n(n+1)[\mathscr{P}(x)-\mathscr{P}(a)]^2-\mathscr{P}''(a)\}y=0$$

[其中 $\mathscr{P}(x)$ 是外尔斯特拉斯函数；见 2.26——俄译本编者注.]

解法见 G H Halphen: Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, p. 569.

2.440. $(\mathscr{P}'+\mathscr{P}^2)y''+(\mathscr{P}^3-\mathscr{P}\mathscr{P}'-\mathscr{P}'')y'+$

$$+(\mathscr{P}'^2-\mathscr{P}^2\mathscr{P}'-\mathscr{P}\mathscr{P}'')y=0,\ \mathscr{P}=\mathscr{P}(x).$$

$$y=C_1\mathscr{P}(x)+C_2e^{\zeta(x)}.$$

[这里 $\zeta(x)$ 是外尔斯特拉斯函数；见 2.26.——俄译本编者注.]

2.441. $(\mathrm{sn}^2x-\mathrm{sn}^2a)y''-(2\,\mathrm{sn}x+\mathrm{cn}x\mathrm{dn}x)y'+$

$$+2[1-2(k^2+1)\mathrm{sn}^2a+3\,k^2\mathrm{sn}^4a]y=1.$$

[这里 $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ 是雅可比椭圆函数；见 2.74.——俄译本编者注.]

解法见 A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, p. 463.

2.442. $f(x)y''+xy'-y=0.$

特解：$y=x$. 根据第一部分 24.2 节可以求得其余的解.

2.443. $f(x)y''+\frac{1}{2}f'(x)y'+g(x)y=0.$

如果$f>0$,那么经过变换

$$\eta(\xi)=y(x),\ \xi=\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

则化为方程

$$\eta''+g(x)\eta=0,$$

其中的 x 还需要通过 ξ 来表示.

2.443a. $fy''+(f^2-f')y'+af^3y=0,\ f=f(x).$

假设 $y=e^{\alpha F}u(x)$，其中 $F=\int f(x)\,dx$，而 α 是方程 $\alpha^2+\alpha+a=0$ 的根，则得到不包含 u 的，因而具有解 $u\equiv 1$ 的方程。于是，如果 $a\neq\frac{1}{4}$，则得到通解

$$y=C_1e^{\alpha_1F}+C_2e^{\alpha_2F},$$

其中 α_1,α_2 是方程 $\alpha^2+\alpha+a=0$ 的根。

[**2.443b.** $f(x)y''+2f'(x)y'+f''(x)y=Q(x)$.

通解为

$$y=\frac{C_1+C_2x}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}\iint Q(x)\,dx\,dx.$$

这个结果(当$Q\equiv 0$时)，能用来指明上面收集的许多方程(例如：2.303,2.329,2.420c 等等) 可积分为有限形式的一些新的、作者尚未提及的情况——俄译本编者注.]

2.444. $fy''-af'y'+bf^{2a+1}y=0,\ f=f(x)$；见 2.79。

2.444a. $fy''+(fg+f'+1)y'+gy=0,\ f=f(x),\ g=g(x)$.

$$y=e^{-F}\left\{C_1+C_2\int\frac{1}{f}\exp\left(F-\int g\,dx\right)dx\right\},$$

$$\text{其中}\qquad F=\int\frac{dx}{f}.$$

2.445. $f^2g'(g^2-1)y''+$

$$+[2fgg'^2-(g^2-1)(fg''+2f'g')]fy'+$$
$$+\{(g^2-1)[f'(fg''+2f'g')-ff''g']-$$
$$-[2f'g+\nu(\nu+1)fg']fg'^2\}y=0,$$

$f=f(x),\ g=g(x)$；见 2.240(21)。

第三章　三阶线性微分方程

含有指数函数的方程：5，18，27。

含有对数函数的方程：46，55，63。

含有三角函数的方程：5，22，82。

含有椭圆函数的方程：9—14，28。

含有任意函数的方程：15，23—26，33，45，83。

3.1. $y''' + \lambda y = 0$.

$$y = \begin{cases} C_1 + C_2 x + C_3 x^2 & \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时,} \\ C_1 e^{-kx} + e^{\frac{1}{2}kx}\left(C_2 \cos \frac{1}{2} kx\sqrt{3} + C_2 \sin \frac{1}{2} kx\sqrt{3}\right) & \text{当 } \lambda \neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 k 为方程 $\lambda = k^3$ 的实根.

3.2. $y''' + ax^3 y = bx$.

假设 $\eta(\xi) = y(x)$，$\xi = x^2$，则得到方程 3.34

$$2\xi\eta''' + 3\eta'' + \frac{a}{8}\xi\eta = \frac{b}{8}.$$

3.3. $y''' = ax^b y$.

假设 $\eta(\xi) = x^{\frac{b}{3}} y(x)$，　$\xi = cx^{1+\frac{b}{3}}$，则得到方程 3.60

$$\xi^3\eta''' + (1-\nu^2)\xi\eta' + \left(\nu^2 - 1 - \frac{a\nu^3}{c^3}\xi^3\right)\eta = 0,$$

其中 $(b+3)\nu = 3$.

3.4. $y''' + 3y' - 4y = 0$;

第一部分 22.1 节中讨论过的那种类型.

$$y=C_1e^x+(C_2\cos\alpha x+C_3\sin\alpha x)e^{-\frac{x}{2}},$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{15}$.

3.4a. $y'''\pm xy'\pm ny=0$, n 为整数.

$y=u^{(n-1)}$,其中 u 为方程 $u''\pm xu=C$ 的解.

3.5. $y'''-a^2y'=e^{2ax}\sin^2x$.

$$y=C_1+C_2e^{ax}+C_3e^{-ax}+$$

$$+\left(\frac{1}{12a^3}+\frac{(4-11a^2)\sin 2x+3a(4-a^2)\cos 2x}{4(a^2+1)(a^2+4)(9a^2+4)}\right)e^{2ax}.$$

3.6. $y'''+2axy'+ay=0$; 方程 3.15 的特殊情况.

通解为:

$$y=C_1u^2+C_2uv+C_3v^2,$$

其中 u, v 是 2.14 型的方程

$$2y''+axy=0$$

的以贝塞耳函数表示的基本解组.

3.7. $y'''-x^2y''+(a+b-1)xy'-aby=0$.

下面对于所有 x 值均收敛的三个级数构成基本解组:

$$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{ab(a-3)(b-3)\cdots(a-3\nu+3)(b-3\nu+3)}{(3\nu)!}x^{3\nu},$$

$$x+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(a-1)(b-1)(a-4)(b-4)\cdots(a-3\nu+2)(b-3\nu+2)}{(3\nu+1)!}x^{3\nu+1},$$

$$\frac{x^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(a-2)(b-2)(a-5)(b-5)\cdots(a-3\nu+1)(b-3\nu+1)}{(3\nu+2)!}x^{3\nu+2},$$

只要其系数满足一定的不等式.

详见: A R Forsyth, W Jacobsthal. Lehrbuch der Differentialgleichungen. 1912, p. 207, 741.

3.8. $y''' + x^{2c-2}y' + (c-1)x^{2c-3}y = 0$;

方程3.67 的特殊情况.

3.9. $y''' - 3[2\mathscr{P}(x) + a]y' + by = 0$.

$$y = \sum_{\nu=1}^{3} C_\nu \frac{\sigma(x+\alpha_\nu)}{\sigma(x)\sigma(\alpha_\nu)} e^{\lambda_\nu x},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程

$$b\mathscr{P}'(x) + (3a^2 - g_2)\mathscr{P}(x) + \frac{1}{4}b^2 - a^3 - g_3 = 0$$

的根(需要假设这些根是不同的, 并且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$), 而

$$\lambda_\nu = -\zeta(\alpha_\nu) + \frac{2\mathscr{P}'(\alpha_\nu) + b}{2a - 4\mathscr{P}(\alpha_\nu)}.$$

[关于符号见2.26.——俄译本编者注.]

3.10. $y''' + (1-n^2)\mathscr{P}(x)y' + \frac{1}{2}[(1-n^2)\mathscr{P}'(x) - a]y = 0$.

设

$$\mathscr{P}'^2 = 4\mathscr{P}^3 - g_3, \quad 即\ g_2 = 0.$$

当 $n=2$ 时, 得到三个解

$$y = \frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)} e^{-x\zeta(\alpha)},$$

其中 α 是方程 $\mathscr{P}'(\alpha) = a$ 的三个根之一.

当 $n=4$ 时, 得到

$$y=\frac{d^2}{dx^2}\frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)}e^{-x[\zeta(\alpha)+\beta]},$$

其中 α,β 由下列方程来确定：

$$\mathscr{P}'(\alpha)=\frac{a}{45}\frac{\lambda^2-10\lambda-15}{(\lambda-1)^2},$$

$$\beta=-\frac{5\mathscr{P}'(\alpha)+a}{5(\lambda-3)\mathscr{P}(\alpha)},\quad 其中\lambda=\frac{16a^2}{a^2+45^2g_3}.$$

如果 $a^2=135g_3$,则上述公式不适用．在这种情况下，存在解

$$y_1=\mathscr{P}'(x)-\frac{a}{15},\quad y_2=xy_1+2\mathscr{P}(x),$$

$$y_3=\left(\frac{15\mathscr{P}'(x)}{a}+1\right)[\zeta(x-\alpha)+$$

$$+\zeta(x-\varepsilon\alpha)+\zeta(x-\varepsilon^2\alpha)]+6\zeta(x),$$

其中 $15\mathscr{P}'(\alpha)=-a$, ε 是原单位立方根.

3.11. $y'''-[4n(n+1)\mathscr{P}(x)+a]y'-$

$-2n(n+1)\mathscr{P}'(x)y=0$; 见 2.408(7).

3.12. $y'''+[A\mathscr{P}(x)+a]y'+B\mathscr{P}'(x)y=0.$

其解见：G H Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Paris, 1886—1891, T II, p. 564; A R Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, T III, p 462.

3.13. $y'''-(3k^2\text{sn}^2x+a)y'+$

$+(b+c\text{sn}^2x-3k^2\text{sn}x\text{cn}x\text{dn}x)y=0.$

[关于符号见 2.74.——俄译本编者注.]

其解见：A. R Forsyth, Theory of Differential Equations Cambridge, 1900—1902, 卷 III, p 463.

3.14. $y'''-(6k^2\text{sn}^2x+a)y'+by=0.$

其解的出处同 3.13 一样.

3.15. $y''' + 2f(x)y' + f'(x)y = 0$；方程3.26的特殊情况.

$$y = C_1u_1^2 + C_2u_1u_2 + C_3u_2^2,$$

其中 u_1, u_2 是方程

$$2u'' + f(x)u = 0$$

的基本解组.

3.16. $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$；

第一部分22.1节中讨论过的那种类型.

$$y = C_1e^{-2x} + (C_2\cos x + C_3\sin x)e^{2x}.$$

3.17. $y''' - 2y'' - a^2y' + 2a^2y = \operatorname{sh}x$；

第一部分22.2节中讨论过的那种类型.

假设 $u(x) = y' - 2y$, 则得到容易求解的方程

$$u'' - a^2u = \operatorname{sh}x.$$

于是得到

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{ax} + C_3e^{-ax} +$$

$$+\begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sh}x + \operatorname{ch}x}{3(a^2-1)} & \text{当 } a^2 \neq 1 \text{ 时,} \\ -\dfrac{x+1}{2}e^x - \dfrac{3x+1}{36}e^{-x} & \text{当 } a^2 = 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

3.18. $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = e^{ax}$.

$$y = \left(\frac{x^3}{6} + C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{ax}.$$

3.19. $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$；见第一部分22.1节.

3.20. $y''' - 6xy'' + 2(4x^2 + 2a - 1)y' - 8axy = 0$；

方程3.26的特殊情况.

$$y = C_1u^2 + C_2uv + C_3v^2,$$

其中 u, v 是方程2.46的解.

3.21. $y''' + 3axy'' + 3a^2x^2y' + a^3x^3y = 0$.

$$e^{\frac{1}{2}ax^2}y=\begin{cases}C_1+C_2\operatorname{ch}x\sqrt{3a}+C_3\operatorname{sh}x\sqrt{3a} & \text{当 } a>0 \text{ 时},\\ C_1+C_2\cos x\sqrt{|3a|}+C_3\sin x\sqrt{|3a|} & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

3.22. $y'''-y''\sin x-2y'\cos x+y\sin x=\ln x$;

全微分方程。

积分两次，则得到一阶线性方程

$$y'-y\sin x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+C_1+C_2x.$$

3.23. $y'''+f(x)y''+y'+f(x)y=0.$

假设 $u(x)=y''+y$，则得到方程

$$u'+f(x)u=0.$$

由此

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+$$
$$+C_3\left(\sin x\int E\cos x\,dx-\cos x\int E\sin x\,dx\right).$$

其中

$$E=\exp\left(-\int f\,dx\right).$$

3.24. $y'''+f(x)(x^2y''-2xy'+2y)=0$;

方程 3.83 的特殊情况。

$$y=C_1x+C_2x^2+C_3\left(x\int x^{-2}u\,dx-x^2\int x^{-3}u\,dx\right),$$

其中 $$u=\exp\left[-\int x^2f(x)\,dx\right].$$

3.25. $y'''+fy''+gy'+(fg+g')y=0, f=f(x),\ g=g(x).$

其解为二阶方程

$$Ey''+gEy=C$$

的解，其中 $E=\exp\int f\,dx$，而 C 任意。

3.26. $y''' + 3fy'' + (f' + 2f^2 + 4g)y' + (4fg + 2g')y = 0$,

$$f = f(x),\ g = g(x).$$

$$y = C_1u^2 + C_2uv + C_3v^2,$$

其中 $u(x)$, $v(x)$ 是方程

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

的基本解组.

特别是,反自共轭方程

$$[f(fy')']' + 2gy' + g'y = 0,$$

属于可用这种方法化为二阶方程的三阶微分方程；相应的二阶方程具有下列形式：

$$2f(fy')' + gy = 0.$$

详见 Whittaker 和 Watson, p. 298.

3.27. $4y''' - 8y'' - 11y' - 3y = -18e^x$;

第一部分 22.2 节中讨论过的那种类型.

$$y = C_1e^{3x} + (C_2 + C_3x)e^{-\frac{x}{2}} + e^x.$$

3.28. $27y''' - 36n^2\mathscr{P}(x)y' - 2n(n+3)(4n-3)\mathscr{P}'(x)y = 0$.

其解见 G H Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, p. 553.

3.29. $xy''' + 3y'' + xy = 0$.

假设 $u(x) = xy$,则得到 $u''' + u = 0$.

3.30. $xy''' + 3y'' - ax^2y = 0$.

假设 $u(x) = xy(x)$,则得到 $u''' = axu$.

关于这个方程,见 5.3.

3.31. $xy''' + (a+b)y'' - xy' - ay = 0$, $a > 0, b > 0$.

根据第一部分 22.4 节,得到

$$y = \sum_{\nu=1}^{3} C_\nu \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} |t|^{a-1}|t^2-1|^{\frac{1}{2}b-1} e^{-tx}dt;$$

这里 $\alpha_1=-1,\beta_1=\alpha_2=0,\beta_2=+1$；此外，如果 $x>0$，则 $\alpha_3=1,\beta_3=+\infty$，而如果 $x<0$，则 $\alpha_3=-\infty,\beta_3=-1$。

3.32. $xy'''-(x+2\nu)y''-(x-2\nu-1)y'+(x-1)y=0$;

方程 3.83 的特殊情况。

$$y=C_1e^x+x^{\nu+1}[C_2J_{\nu+1}(ix)+C_3Y_{\nu+1}(ix)]$$

其中 J_ν 和 Y_ν 是贝塞耳函数。

3.33. $xy'''+(x^2-3)y''+4xy'+2y=f(x)$.

此方程为全微分方程。进行积分，则得到二阶方程，此二阶方程仍然是全微分方程，并且可以化为线性方程

$$xy'+(x^2-5)y=\int dx\int f(x)dx.$$

3.34. $2xy'''+3y''+axy=b,\quad a\neq0$。

根据第一部分 22.4 节，得到

$$y=\sum_{\nu=1}^{4}C_\nu\int_0^{\alpha_\nu}\frac{e^{xz}}{\sqrt{2z^3+a}}dz;$$

这里 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程 $2\alpha^3+a=0$ 的根，$\alpha_4=-\infty$ 还是 $+\infty$，取决于 $x>0$ 还是 $x<0$；此外，

$$\sqrt{a}(C_1+\cdots+C_4)+b=0;$$

积分沿着直线来取。

3.35. $2xy'''-4(x+\nu-1)y''+(2x+6\nu-5)y'+$
$+(1-2\nu)y=0$;

方程 3.83 的特殊情况。

$$y=C_1e^x+x^\nu e^{\frac{1}{2}x}\left[C_2J_\nu\left(\frac{1}{2}ix\right)+C_3Y_\nu\left(\frac{1}{2}ix\right)\right],$$

其中 J_ν,Y_ν 是贝塞耳函数。(见 2.162)

[见 J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957).——俄译本编者注.]

3.36. $2xy'''+3(2ax+k)y''+6(bx+ak)y'+$

$$+(2cx+3bk)y=0, k>0.$$

根据第一部分 22.4 节，则得到

$$y=\sum_{\nu=1}^{4} C_\nu \int_0^{\alpha_\nu} e^{xz}[P(z)]^{\frac{1}{2}k-1}\,dz,$$

其中

$$P(z)=z^3+3az^2+3bz+c,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是此多项式的根，并且假设这些根是不相同的，当 $x\gtrless 0$ 时 $\alpha_4=\mp\infty$, $C_1+\cdots+C_4=0$.

3.37. $(x-2)xy'''-(x-2)xy''-2y'+2y=0.$

假设 $u(x)=y'-y$，则得到二阶方程

$$x(x-2)u''-2u=0.$$

根据 2.303 的后一半，在此方程的解当中，存在二次多项式，也就是 $u=x(x-2)$；根据第一部分 24.2 节，由此求得第二个解

$$u=x(x-2)\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-2(x-1).$$

于是得到

$$y=C_1x^2+C_2e^x+$$

$$+C_3e^x\int e^{-x}\left[x(x-2)\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-2(x-1)\right]dx.$$

3.38. $(2x-1)y''-8xy'+8y=0.$

x 和 e^{2x} 显然是解。因此，根据第一部分 17.2 节，此方程可以化为一阶线性方程。

3.39. $(2x-1)y'''+(x+4)y''+2y'=0;$

全微分方程。

其解可由下列一阶方程求得：

$$(2x-1)y'+xy=C_1x+C_0.$$

3.40. $x^2y'''-6y'+ax^2y=0.$

假设 $y(x)=x^2u(x)$，则得到方程 3.66，其中未知函数 y 换为 u。

3.41. $x^2y'''+(x+1)y''-y=0.$

存在下列形式的解：

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!},$$

并且此级数对于所有 x 是收敛的；也就是说，选择 a_0, a_1, 使得 $\frac{a_0}{a_1}$ 等于无限连分数(见第一部分 25.3 节)

$$\frac{a_0}{a_1}=\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2^2}+\frac{1|}{|3^2}+\frac{1|}{|4^2}+\cdots,$$

并且假设 $a_{n+2}=a_n-n^2a_{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$。

O. Perron, *Math. Ann.* 66(1909), p. 448.

3.42. $x^2y'''-xy''+(x^2+1)y'=0.$

$$y=C+xZ_1(x),$$

其中 Z_1 是一阶柱函数。

3.43. $x^2y'''+3xy''+(4a^2x^{2a}+1-4\nu^2a^2)y'+$
$+4a^3x^{2a-1}y=0;$

方程 3.66 的特殊情况。

$$y=C_1J_\nu^2(x^a)+C_2J_\nu(x^a)Y_\nu(x^a)+C_3Y_\nu^2(x^a).$$

3.44. $x^2y'''-3(x-m)xy''+[2x^2+4(n-m)x+$
$+m(2m-1)]y'-2n(2x-2m+1)y=0;$

方程 3.26 的特殊情况。

$$y=C_1u^2+C_2uv+C_3v^2,$$

其中 u, v 是方程 2.113(1)的解。

G. Palamà, *Annali di Mat.* (4), 18(1939), p. 320.

3.45. $x^2y''' + 4xy'' + (x^2+2)y' + 3xy = f(x)$.

乘以 x，则得到全微分方程。因此，可以化为方程

$$x^3y'' + x^2y' + x^3y = \int xf(x)\,dx + C.$$

3.46. $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$；全微分方程。

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{4}(\ln x - 2).$$

3.47. $x^2y''' + 6xy'' + 6y' = 0$.

$$y = C_1 + C_2x^{-1} + C_3x^{-2}.$$

3.48. $x^2y''' + 6xy'' + 6y' + ax^2y = 0$.

假设 $u(x) = x^2y$，则得到 $u''' + au = 0$。于是求得

$$x^2y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x} + C_3e^{\alpha_3 x},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程 $\alpha^3 + a = 0$ 的根。

3.49. $x^2y''' - 3(p+q)xy'' + 3p(3q+1)y' - x^2y = 0$,

p, q 为自然数。

$$y = \prod_{\mu=0}^{p-1}(\delta - 3\mu - 1)\prod_{\nu=0}^{q-1}(\delta - 3\nu - 2)\sum_{k=1}^{3}C_ke^{\omega_k x},$$

其中 $\delta = x\dfrac{d}{dx}$，而 ω_ν 是方程 $\omega^3 = 1$ 的三个根。

J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, *Quarterly Journ. Oxford* 1(1930), p. 190. 推广见：J. Zbornik, *Akad. Wien* 166(1957), p. 42.

3.50. $x^2y''' - 2(n+1)xy'' + (ax^2+6n)y' - 2axy = 0$.

设 n 为自然数。这时，此方程属于第一部分 18.6 节中讨论过的那种类型。于是有

$$y = C_1 + C_2x^4 + C_3x^{2n+1} \qquad \text{当 } a = 0 \text{ 时},$$

$$y = C_1(ax^2 + 4n - 2) + C_2e^{x\sqrt{-a}}P(x) + C_3e^{-x\sqrt{-a}}Q(x)$$

当 $a \neq 0$ 时；

这里 P 和 Q 是次数$\leqslant 2n+2$的多项式.

3.51. $x^2y''' - (x^2-2x)y'' - \left(x^2+\nu^2-\frac{1}{4}\right)y' + \left(x^2-2x+\nu^2-\frac{1}{4}\right)y=0;$

方程 3.83 的特殊情况.

$$y=Ce^x+\sqrt{x}\,Z_\nu(ix),$$

其中 Z_ν 是柱函数.

3.52. $x^2y''' - (x+\nu)xy'' + \nu(2x+1)y' - \nu(x+1)y=0;$

方程 3.83 的特殊情况.

$$y=Ce^x+x^{\frac{\nu+1}{2}}Z_{\nu+1}(2\sqrt{\nu x}),$$

其中 $Z_{\nu+1}$ 是柱函数.

3.53. $x^2y''' - 2(x^2-x)y'' + \left(x^2-2x+\frac{1}{4}-\nu^2\right)y' + \left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)y=0;$

方程 3.83 的特殊情况.

$$y=C_1e^x+\sqrt{x}\;e^{\frac{1}{2}x}Z_\nu\left(\frac{1}{2}ix\right),$$

其中 Z_ν 是柱函数.

3.54. $x^2y''' - (x^4-6x)y'' - (2x^3-6)y' + 2x^2y=0.$

点 $x=0$ 是弱奇点. 特征方程(见第一部分18.1节): $r(r+1)(r+2)=0$. $y=x^{-2}$ 是一个解. 因此, 这个方程可以化为二阶线性方程.

3.55. $(x^2+1)y''' + 8xy'' + 10y' = 3-\frac{1}{x^2}+2\ln x;$

全微分方程.

积分之后, 仍然得到全微分方程. 因此, 其解可由一阶方程

$$(x^2+1)y'+4xy=(x^2+1)\ln x+C_0+C_1x$$

求得。

3.56. $(x^2+2)y'''-2xy''+(x^2+2)y'-2xy=0.$

$$y=C_1x^2+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

3.57. $2x(x-1)y'''+3(2x-1)y''+(2ax+b)y'+ay=0.$

此方程是 3.26 型的方程。通解为：

$$C_1y_1^2+C_2y_1y_2+C_3y_2^2,$$

其中 y_1, y_2 是超几何方程

$$2x(x-1)y''+3(2x-1)y'+\left(\frac{a}{2}x+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}\right)y=0$$

的两个线性无关的解。

3.58. $4x^2y'''+(x^2+14x-1)y''+4(x+1)y'+2y=0.$

全微分方程.

$$4x^2y'+(x^2-2x-1)y=C_1+C_2x,$$

$$y=\sqrt{x}\exp\left(-\frac{x^2+1}{4x}\right)\times$$

$$\times\left[C_0++\int\left(C_1x^{-\frac{5}{2}}+C_2x^{-\frac{3}{2}}\right)\exp\frac{x^2+1}{4x}dx\right].$$

点 $x=0$ 是强奇点。仍然根据第一部分 18.4 节，此方程应当具有在点 $x=0$ 的邻域内为正则的解。这样的解之一是

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu,$$

其中

$$a_0=\operatorname{ch}\frac{1}{2},\quad a_1=-\operatorname{sh}\frac{1}{2},$$

$$a_\nu=\left(-\frac{1}{4}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4^{2k}k!\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}.$$

O Perron, *Math Ann* 48(1926), p. 345—351.

3.59. $(ax+b)xy'''+(\alpha x+\beta)y''+xy'+y=f(x)$.

全微分方程. 因此,其解可由方程

$$(ax+b)xy''+[(\alpha-2a)x+\beta-b]y'+(x+2a-\alpha)y=$$
$$=\int f(x)dx+C$$

得到.

3.60. $x^3y'''+(1-\nu^2)xy'+(ax^3+\nu^2-1)y=0$.

也可参阅 3.3.

此方程属于第一部分 18.6 节中讨论过的那种类型. 当 $\nu=\pm1$ 时,得到常系数方程, 当 $a=0$ 时, 得到欧拉方程(第一部分 22.3 节).

如果 $a\neq0$, ν 为$\neq1$ 的自然数,则

$$y=x^{1-\nu}\sum_{k=1}^{3}C_ke^{-\lambda_kx}P_k(x),$$

其中 $\lambda_k^3=a$,而 P 是某一个次数$\leqslant3(\nu-1)$的确定的多项式. 如果用 y_ν 表示当 ν 任意 (包括复数) 时给定方程的解,则有

$$y_{\nu+3}=ay_\nu+(2\nu+3)x^{-1}y_\nu''-$$
$$-(2\nu+3)(\nu+1)(x^{-2}y_\nu'-x^{-3}y_\nu);\quad(1)$$

当 y_ν 遍及所有的解时,我们得到所有的解 $y_{\nu+3}$. 因为相应于满足方程 $\lambda^3=a$ 的三个 λ 值的函数 $y_{\pm1}=\exp(-\lambda x)$, 构成基本解组,所以对于所有不能用 3 整除的那些 n 值,可以借助于(1)求得所有的 y_n; 例如

$$y_2=\left(\frac{1}{x}+\lambda\right)e^{-\lambda x}\quad(\lambda^3=a).$$

封闭形式的解，见 J. Zbornik, *Akad Wien* 166(1957), p. 42.

3.61. $x^3y'''+[4x^3+(1-4\nu^2)x]y'+(4\nu^2-1)y=0$;

方程 3.67 的特殊情况。

$$y=C_1xJ_\nu^2(x)+C_2xJ_\nu(x)Y_\nu(x)+C_3xY_\nu^2(x).$$

3.62. $x^3y'''+(ax^{2\nu}+1-\nu^2)xy'+$

$$+[bx^{3\nu}+a(\nu-1)x^{2\nu}+\nu^2-1]y=0.$$

假设 $\eta(\xi)=x^{\nu-1}y(x)$, $\nu\xi=x^\nu$，则得到常系数方程

$$\eta'''+a\eta'+b\eta=0.$$

A. Chiellini, *Rendiconti Cagliari* 9 (1939), p. 142—155.

3.63. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=$

$$=6x^3(x-1)\ln x-x^3(x+8).$$

齐次方程属于第一部分 22.3 节讨论过的那种类型。

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x^2}+C_3x\ln x+\frac{10x-27}{90}x^3\ln x-\frac{25x+9}{225}x^3.$$

3.64. $x^3y'''+3x^2y''+(1-a^2)xy'=0$;

第一部分 22.3 节讨论过的那种类型。

$$y=C_1+C_2x^a+C_3x^{-a}\qquad\text{当 } a^2\neq1 \text{ 时}.$$

3.65. $x^3y'''-4x^2y''+(x^2+8)xy'-2(x^2+4)y=0.$

假设 $y=xu(x)$, $u''+u=v(x)$，则得到方程 $xv'=v$. 由此求得

$$y=C_1x^2+C_2x\cos x+C_3x\sin x.$$

3.66. $x^3y'''+6x^2y''+(ax^3-12)y=0.$

如果将方程 3.48 除以 x^2，进行微分，然后将 y' 仍用 y 来表示，则得到此方程。

由此求得原方程的解：

$$y=\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2}(C_1e^{\alpha_1x}+C_2e^{\alpha_2x}+C_3e^{\alpha_3x}),\text{ 其中 }\alpha^3+a=0.$$

3.67. $x^3y'''+3(1-a)x^2y''+$

$$+[4b^2c^2x^{2c+1}+(1-4\nu^2c^2+3a(a-1))x]y'+$$

$$+[4b^2c^2(c-a)x^{2c}+a(4\nu^2c^2-a^2)]y=0.$$

$$y=C_1x^aJ_\nu^2(u)+C_2x^aJ_\nu(u)Y_\nu(u)+C_3x^aY_\nu^2(u),$$

其中 $u=bx^c$, J_ν, Y_ν 是贝塞尔函数.

见 N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinder funktionen, Leipzig, 1904, p. 147.

3.68. $x^3y'''+(x+3)x^2y''+5(x-6)xy'+(4x+30)y=0.$

通解为:

$$y=x^5\frac{d^6}{dx^6}\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{-5}e^{-x}\left(\int(C_1+C_2\ln x)x^4e^xdx+C_3\right)\right]\right\}.$$

J. Zbornik, *Akad. Wien* 166(1957).

两个线性无关的解:

$$y_1=x^{-6}-\frac{4^2x^{-5}}{6(30-4\cdot5)}+\frac{3^2\cdot4^2x^{-4}}{5\cdot6(30-3\cdot4)(30-4\cdot5)}-$$

$$-\frac{2^2\cdot3^2\cdot4^2x^{-3}}{4\cdot5\cdot6(30-2\cdot3)(30-3\cdot4)(30-4\cdot5)}+$$

$$+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4x^{2-2}}{3\cdot4\cdot5\cdot6(30-1\cdot2)(30-2\cdot3)(30-3\cdot4)(30-4\cdot5)},$$

$$y_2=x^5-$$

$$-\sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n\frac{7^2\cdot8^2\cdots(n+1)^2)x^n}{5\cdot6\cdots(n-1)(6\cdot7-30)(7\cdot8-30)\cdots(n(n+1)-30)}.$$

3.69. $x^3y'''+x^2y''\ln x+2xy'-y=2x^3.$

除以 x^2,积分两次,则得到线性方程

$$xy'+(\ln x-2)y=\frac{x^3}{3}+C_1+C_2x.$$

3.70. $(x^2+1)xy'''+3(2x^2+1)y''-12y=0.$

乘以 x，则得到全微分方程；将此方程积分，又得到全微分方程，由此方程求得

$$y=C_1(2x^2+1)+C_2xu+C_3\left(2x+\frac{2}{3x}-xu\ln\frac{u+1}{u-1}\right),$$

$$u=\sqrt{x^2+1}.$$

3.71. $(x+3)x^2y'''-3(x+2)xy''+6(x+1)y'-6y=0.$

$$y=C_1x^3+C_2x^2+C_3(x+1).$$

3.72. $2(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)y'''+$

$$+[9x^2-6(a_1+a_2+a_3)x+3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]y''-$$

$$-2[(n^2+n-3)x+b]y'-n(n+1)y=0;$$

见 2.408(6)。

3.73. $(x+1)x^3y'''-(4x+2)x^2y''+$

$$+(10x+4)xy'-4(3x+1)y=0.$$

$$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+C_3(x+x^3+x^2\ln^2x).$$

3.74. $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1.$

齐次方程除以 x 以后则化为第一部分 22.3 节中讨论过的那种类型。

$$y=C_1+C_2x^2+C_3x^2\ln x-\frac{1}{36x}.$$

3.75. $(x^2+1)x^3y'''-(4x^2+2)x^2y''+$

$$+(10x^2+4)xy'-4(3x^2+1)y=0.$$

$$y=C_1x^2+C_2(x^3+x)+C_3x^2\ln|x|.$$

3.76. $x^6y'''+x^2y''-2y=0.$

一个解是 $y=x^2$. 点 $x=0$ 是强奇点，$x=\infty$ 是弱奇点. 假设 $y(x)=\eta(\xi),\xi=\frac{1}{x}$,则得到方程 3.54，其中变量 x, y 换为 ξ,η.

3.77. $x^6y'''+6x^5y''+ay=0.$

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=\frac{1}{x}$,则得到方程3.40,其中变量 x, y 换为 ξ, η.

3.78. $x^2(x^4+2x^2+2x+1)y'''-(2x^6+3x^4-6x^2-6x-1)y''+$
$+(x^6-6x^3-15x^2-12x-2)y'+$
$+(x^4+4x^3+8x^2+6x+1)y=0.$

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{\frac{1}{x}}.$$

3.79. $(x-a)^3(x-b)^3y'''-cy=0, a\neq b.$

假设

$$y(x)=(x-b)^2\eta(\xi),\quad \xi=\ln\frac{x-a}{x-b},$$

则得到常系数方程

$$(a-b)^3(\eta'''-3\eta''+2\eta')-c\eta=0.$$

3.80. $y'''\sin x+(2\cos x+1)y''-y'\sin x=\cos x$;

全微分方程.

其解可由下列一阶线性方程得到:

$$y'\sin x+y=C_0+C_1x-\sin x.$$

3.81. $(\sin x+x)y'''+3(\cos x+1)y''-3y'\sin x-y\cos x=$
$=-\sin x$;

全微分方程.

假设 $u(x)=(\sin x+x)y$, 则得到 $u'''=-\sin x$; 由此求得

$$(\sin x+x)y=-\cos x+C_0+C_1x+C_2x^2.$$

3.82. $y'''\sin^2x+3y''\sin x\cos x+$
$+[\cos 2x+4\nu(\nu+1)\sin^2x]y'+2\nu(\nu+1)y\sin 2x=0.$

$$y=C_1u^2+C_2uv+C_3v^2,$$

其中 u, v 是勒让德方程的基本解组, 并且 u 和 v 中的变量 x 由 $\cos x$ 来代替.

3.83. $\frac{d}{dx}L(y)+A(x)L(y)=0$,

其中 $L(y)\equiv f(x)y''+g(x)y'+h(x)y$, 并且$f\neq 0$, g, h 是连续可微的.

显然，方程 $L(y)=0$ 的解满足此方程. 此外，可以选择 $A(x)$, 使得此方程具有给定的函数 $\varphi(x)$ 作为其解.

(a) 如果

$$L\equiv x^2y''+(1-2a)xy'+(a^2-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c})y,$$

则方程 $L(y)=0$ 的解可由 2.162(1)得知. 如果假设

$$A=-\frac{(x-a+1)^2+x-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c-1}(2c+x)}{(x-a)^2+x-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c}},$$

则相应的方程具有通解

$$y=C_1e^x+x^a[C_2J_\nu(bx^c)+C_3Y_\nu(bx^c)],$$

其中 J_ν, Y_ν 是贝塞耳函数.

(b) 如果

$$L\equiv x^2y''-[(2a-1)x+2bcx^{c+1}]y'+$$
$$+[(a^2-\nu^2c^2)+(2a-c)bcx^c+(b^2+d^2)c^2x^{2c}]y,$$

则方程 $L(y)\equiv 0$ 的解可由 2.162 (17) 得知. 如果选择 $A(x)$, 使得

$$-A[(x-a)^2-\nu^2c^2+x+(2a-c)\ bcx^c-2bcx^{c+1}+$$
$$+(b^2+d^2)c^2x^{2c}]=(x-a+1)^2-\nu^2c^2+x+$$
$$+(2a-c)bc^2x^{c-1}+(2a-3c-2)bcx^c-2bcx^{c+1}+$$
$$+2c^3(b^2+d^2)x^{2c-1}+c^2(b^2+d^2)x^{2c},$$

则相应的方程具有下列形式的通解:

$$y=C_1e^x+x^ae^{bx^c}[C_2J_\nu(dx^c)+C_3Y_\nu(dx^c)].$$

第四章　四阶线性微分方程

含有指数函数的方程：4,40.

含有双曲函数的方程：5,9.

含有三角函数的方程：12,15,41,42.

含有椭圆函数的方程：10.

含有任意函数的方程：2,11,14,43,44.

4.1. $y^{(4)}=0$.

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

利用4.44中对于基本解、边界条件和格林函数引入的符号，则有

$$g_2(x,\xi)=\frac{|x-\xi|^3}{12},$$

而当 $a=0,b=1$ 时

$$\Gamma^{\mathrm{I},\mathrm{I}}=x^2\xi^2(3x+3\xi-2x\xi-6)+x^2(3\xi-x),$$

$$12\Gamma^{\mathrm{I},\mathrm{II}}=-x^3\xi^3+3x^2\xi^2(x+\xi)-9x^2\xi^2+2x^2(3\xi-x),$$

$$6\Gamma^{\mathrm{I},\mathrm{III}}=-x^3+3x^2\xi,$$

$$6\Gamma^{\mathrm{II},\mathrm{II}}=x\xi(x^2+\xi^2+2)-x^3-3x\xi^2.$$

上面写出的公式给出当 $x\leqslant\xi$ 时的 $\Gamma(x,\xi)$；交换右端的 x 和 ξ 的位置，则得到当 $x\geqslant\xi$ 时的 $\Gamma(x,\xi)$. $\Gamma^{\mathrm{II},\mathrm{III}}$ 和 $\Gamma^{\mathrm{III},\mathrm{III}}$ 不存在，因为相应的边值问题具有非平凡解，即 C_1+C_2x. 作为规范化而同这些解正交的广义格林函数，可以得到

$$\tilde{\Gamma}^{\mathrm{II},\mathrm{III}}=\frac{|x-\xi|^3}{12}-\frac{x^3+\xi^3}{12}+$$

$$+x\xi\left(\frac{33}{144}-\frac{x+\xi}{4}+\frac{x^2+\xi^2}{4}-\frac{x^4+\xi^4}{40}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mathrm{III,III}}=\frac{|x-\xi|^3}{12}+\frac{x^5+\xi^5}{20}-(x^4+\xi^4)\left(\frac{x\xi}{10}+\frac{1}{6}\right)+$$

$$+(x^3+\xi^3)\left(\frac{x\xi}{4}+\frac{1}{12}\right)-(x+\xi)\left(\frac{x\xi}{4}+\frac{11}{210}\right)+$$

$$+\frac{13}{35}x\xi+\frac{1}{105}.$$

4.2. $y^{(4)}+4y=f(x)$ 具有边界条件

$$\left.\begin{array}{ll} y=0, & y'=0 \\ y=0, & y''=0 \\ y''=0, & y'''=0 \end{array}\right\} \text{当 } x=0 \text{ 时,以及当 } x=l \text{ 时.}$$

可以求得下列形式的解:

$$y=C_1y_1(x)+\cdots+C_4y_4(x)+\int_0^x y_4(x-\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

其中

$$y_1=\mathrm{ch}x\cos x,\quad y_2=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}x\sin x+\mathrm{sh}x\cos x),$$

$$y_3=\frac{1}{2}\mathrm{sh}x\sin x,\quad y_4=\frac{1}{4}(\mathrm{ch}x\sin x-\mathrm{sh}x\cos x).$$

系数 C_ν 应当这样选择,即使得 y 满足边界条件.

M. Kourensky, *Tôhoku Math. Journ.* 39(1934), p. 192—199.

4.3. $y^{(4)}+\lambda y=0$.

(a) 基本解组:

当 $\lambda=0$ 时: $1, x, x^2, x^3$;

当 $\lambda=4k^2>0$ 时: $\mathrm{ch}kx\cos kx$, $\mathrm{ch}kx\sin kx$, $\mathrm{sh}kx\cos kx$, $\mathrm{sh}kx\sin kx$;

当 $\lambda=-k^4<0$ 时: $\mathrm{ch}kx$, $\mathrm{sh}kx$, $\cos kx$, $\sin kx$.

(b) 特征值问题,其中边界条件具有下列形式:

$$y^{(p)}(a)=y^{(q)}(a)=y^{(r)}(b)=y^{(s)}(b)=0.$$

在下面的表中，这些边界条件用记号$(p, q; r, s)$来表示。其次，为简单起见，假设

$$K=k(b-a),$$
$$\alpha=\cos K \operatorname{ch} K, \quad \beta=\sin K \operatorname{sh} K,$$
$$\gamma=\cos K \operatorname{sh} K, \quad \delta=\sin K \operatorname{ch} K,$$
$$u_1(x, k)=\operatorname{ch} k(x-a)+\cos k(x-a),$$
$$u_2(x, k)=\operatorname{ch} k(x-a)-\cos k(x-a),$$
$$u_3(x, k)=\operatorname{sh} k(x-a)+\sin k(x-a),$$
$$u_4(x, k)=\operatorname{sh} k(x-a)-\sin k(x-a).$$

数$\lambda=-k^4$是特征值，其中k由下列表内第二列的方程来确定。除(2,3;2,3)的情况以外，特征值都是简单的。每一行前面的星号，表示相应的特征值问题是自共轭的。

形式为$(p, q; r, s)$的其他特征值问题，可以经过变换 $\eta(\xi)=y(x), \xi=-x$ 化为表中已指出的问题。

对于同杆的振动问题有关的特征值问题，除了特征值以外，还要求出格林函数，因此得到相应的积分方程的豫解核。

(c) 相应于周期性边界条件

$$y^{(\nu)}(a)=y^{(\nu)}(b) \quad (\nu=0,1,2,3)$$

的特征值是 $\lambda_n=-\left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^4 (n=0,1,2,\cdots)$； 除$\lambda_0$以外，所有的$\lambda_n$都是二重的。相应于特征值$\lambda_n$ $(n>0)$的特征函数是

$$C_1 \cos \frac{2n\pi}{b-a} x+C_2 \sin \frac{2n\pi}{b-a}.$$

相应于特征值$\lambda_0=0$的特征函数是$y=$常数$\neq 0$.

边界条件	特征值	特征函数
*(0,1; 0,1)[1]	$\alpha=1, k\neq 0$	$u_2(b, k)u_4(x, k)-u_4(b, k)u_2(x, k)$
*(0,1; 0,2)[2]	$\gamma=\delta$	
(0,1; 0,3)	$K=n\pi$ $(n=1,2, \ldots)$	
(0,1; 1,2)		$u_1(b, k)u_4(x, k)-u_3(b, k)u_2(x, k)$
*(0,1; 1,3)	$\gamma+\delta=0$	$\cos K\cdot u_2(x, k)+\sin K\cdot u_4(x, k)$
*(0,1; 2,3)[3]	$\alpha+1=0$	$u_1(b, k)u_4(x, k)-u_3(b, k)u_2(x, k)$
*(0,2; 0,2)[4]	$K=n\pi$ $(n=1,2, \ldots)$	$\sin k(x-a)$
(0,2; 0,3)	$\gamma+\delta=0$	$\cos K\cdot \mathrm{sh}k(x-a)+\mathrm{ch}K\cdot\sin k(x-a)$
(0,2; 1,2)	$\gamma+\delta=0$	$\sin K\cdot\mathrm{sh}k(x-a)+\mathrm{sh}K\cdot\sin k(x-a)$
*(0,2; 1,3)	$K=\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1,2, \ldots)$	$\sin k(x-a)$ $\sin K\,\mathrm{sh}k(x-a)+\mathrm{sh}K\sin k(x-a)$
*(0,2; 2,3)[5]	$\gamma=\delta$	$u_3(b, k)u_2(x, k)-u_2(b, k)u_3(x, k)$
(0,3; 0,3)	$\alpha=1$	
(0,3; 1,2)	$\alpha+1=0$	$u_4(b, k)u_2(x, k)-u_1(b, k)u_3(x, k)$
(0,3; 1,3)	$\gamma=\delta$	当 $k=0$ 时，$(x-a)(x+a-2b)$ 此外：$\cos K\cdot u_2(x, k)-\sin K\cdot u_3(x, k)$
(0,3; 2,3)	$K=n\pi$ $(n=0,1, \ldots)$	当 $k=0$ 时，$x-a$，此外： $u_2(b, k)u_2(x, k)-u_3(b, k)u_3(x, k)$
(1,2; 1,2)	$\alpha=1$	当 $k=0$ 时，1，此外： $u_3(b, k)u_1(x, k)-u_2(b, k)u_4(x, k)$
(1,2; 1,3)	$\gamma=\delta$	当 $k=0$ 时，1，此外： $\cos K\cdot u_1(x, k)-\sin K\cdot u_4(x, k)$
(1,2; 2,3)	$K=n\pi$ $(n=0,1, \ldots)$	当 $k=0$ 时，1，此外： $u_1(b, k)u_1(x, k)-u_4(b, k)u_4(x, k)$
*(1,3; 1,3)	$K=n\pi$ $(n=0,1, \ldots)$	$\cos k(x-a)$
*(1,3; 2,3)	$\gamma+\delta=0$	当 $k=0$ 时，1，此外： $\cos K\,\mathrm{ch}k(x-a)+\mathrm{ch}K\cdot\cos k(x-a)$
(2,3; 2,3)[6]	$\alpha=1$	当 $k=0$ 时，C_1+C_2x，此外： $u_4(b, k)u_1(x, k)-u_2(b, k)u_3(x, k)$

1) 对于杆的横向振动，当杆的两端刚性固定时这些边界条件成立。
2) 杆的左端刚性固定，右端铰支。
3) 杆的左端刚性固定，右端自由。
4) 杆的两端铰支。
5) 杆的左端铰支，右端自由。
6) 杆的两端自由

4.4. $y^{(4)}-12y''+12y=16x^4\exp x^2$.

对应的齐次方程不难求解．经过变换$u(x)=e^{-x^2}y$，可将给定的非齐次方程化为方程

$$u^{(4)}+8xu'''+24x^2u''+32x^3u'+16x^4u=16x^4,$$

此方程的一个解是$u=1$．依此得到

$$y=e^{x^2}+C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3e^{\beta x}+C_4e^{-\beta x},$$

其中

$$\alpha^2=6+2\sqrt{6},\quad \beta^2=6-2\sqrt{6}.$$

4.5. $y^{(4)}+2a^2y''+a^4y=\operatorname{ch}ax$;

第一部分22.2节中讨论过的那种类型，当$\lambda=1$时也可参阅4.6.

$$y=(C_1+C_2x)\sin ax+(C_3+C_4x)\cos ax+\frac{1}{4a^4}\operatorname{ch}ax.$$

4.6. $y^{(4)}+(\lambda+1)a^2y''+\lambda a^4y=0$, $a>0$，具有边界条件

$$y(0)=y'(0)=y\left(\frac{2\pi}{a}\right)=y'\left(\frac{2\pi}{a}\right)=0.$$

特征值为：$\lambda=0$(简单的)和$\lambda=n^2$ ($n=1,2,\cdots$,二重的)；特征函数为：

$\cos ax-1$ 和

$C_1(\cos nax-n\cos ax)+C_2(\sin nax-n\sin ax)$.

G. Cimmino, *Math. Zeitschrift* 32 (1930), p 30.

4.7. $y^{(4)}+a(bx-1)y''+aby'+\lambda y=0$.

关于这个方程，当具有一定的齐次边界条件时，见 W. Meyer zur Capellen, *Annalen Phys.* 407 (1932), p 1—27.

4.7 a. $\boldsymbol{y^{(4)}-2a^2y''+a^4y-\lambda(ax-b)(y''-a^2y)=0}$;

湍流理论方程.

假设

$$z(x)=y''-a^2y, \tag{1}$$

则得到

$$z''-a^2z+\lambda(ax-b)z=0. \tag{2}$$

如果给定边界条件

$$y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=y'(1)=0, \tag{3}$$

则

$$2ay=e^{ax}\int_0^x e^{-ax}z\,dx-e^{-ax}\int_0^x e^{ax}z\,dx$$

是方程(1)满足边界条件(3)中前两个条件的解．为了也满足后两个边界条件，应当取方程(2)使得

$$\int_0^1 e^{-ax}z\,dx=\int_0^1 e^{ax}z\,dx=0$$

的解作为 $z(x)$．也可以采用第二部分 § 4 的方法．

4.8. $\boldsymbol{y^{(4)}+(ax^2+b\lambda+c)y''+(\alpha x^2+\beta\lambda+\gamma)y=0}$.

特征值问题：

$$y^{(4)}-2x^2y''+x^4y+iq\left(1-\frac{\lambda}{x}+x^2\right)(y''-xy)+2iqy=0,$$

$$y(-1)=y'(-1)=y(1)=y'(1)=0$$

的近似解法见：S. Goldstein, *Proceedings Cambridge* 32(1936), p. 40—46.

边值问题

$$y^{(4)}-\alpha^2y''-[\alpha^2+\lambda(\beta+x(1-x))](y''-\alpha^2y)=2\lambda y,$$

$$y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$$

在下文中曾研究过：

A. Davidoglu, *C. R. Roumanie* 1 (1936), p. 3—7.

4.9. $y^{(4)}+a\mathscr{P}(x)y''+b\mathscr{P}'(x)y'+[c\mathscr{P}''(x)+d]y=0.$

一些个别的特殊情况，见 G. H. Halphan, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, p. 558; *Mémoires par divers Savants* (2), 28 (1884), № 1, p. 269—291.

4.10. $y^{(4)}-(12k^2\mathrm{sn}^2x+a)y''+by'+(\alpha\mathrm{sn}^2x+\beta)y=0.$

见 A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations. Cambridge, 1900—1902, т. III, p. 463.

4.11. $y^{(4)}+10fy''+10f'y'+3(f''+3f^2)y=0, f=f(x).$

通解为：

$$y=C_1u^3+C_2u^2v+C_3uv^2+C_4v^3,$$

其中 u, v 是方程

$$u''+f(x)u=0$$

的基本解组。

4.12. $y^{(4)}+2y'''-3y''-4y'+4y=32\sin2x-24\cos2x;$

第一部分 22.2 节讨论过的那种类型.

$$y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-2x}+\sin 2x.$$

4.13. $y^{(4)}+4axy'''+6a^2x^2y''+4a^3x^3y'+a^4x^4y=0.$

$$y=\sum_{n=1}^{4}C_ne^{-\frac{1}{2}ax^2+s_nx},$$

其中 s_n 是方程

$$s^4-6as^2+3a^2=0$$

的根. 当这些根是虚数时，应当转化为三角函数.

4.14. $y^{(4)}+6fy'''+(4f'+11f^2+10g)y''+$
$+(f''+7ff'+6f^3+30fg+10g')y'+$
$+3(2f'g+5fg'+6f^2g+g''+3g^2)y=0,$

$$f=f(x),\ g=g(x).$$

$$y=C_1u^3+C_2u^2v+C_3uv^2+C_4v^3,$$

其中 u, v 是方程

$$u''+f(x)u'+g(x)u=0$$

的基本解组。

4.15. $4y^{(4)}-12y'''+11y''-3y'=4\cos x$;

第一部分 22.2 节中讨论过的那种类型。

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{x}{2}}+C_3e^{x}+C_4e^{\frac{3x}{2}}+\frac{18\sin x-14\cos x}{65}.$$

4.16. $xy^{(4)}+5y'''=24$.

$$y=\frac{4}{5}x^3+C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{C_4}{x^2}.$$

4.17. $xy^{(4)}-(6x^2+1)y'''+12x^3y''-$

$$-(9x^2-7)x^2y'+2(x^2-3)x^3y=0.$$

e^{x^2} 和 $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 都是解。因此，根据第一部分 17.2 节，此方程可以化为二阶方程。

4.18. $x^2y^{(4)}-2(\nu^2x^2+6)y''+\nu^2(\nu^2x^2+4)y=0$.

其解为：

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}Z_{\frac{1}{2}}(i\nu x),$$

其中 Z_ν 是柱函数(见 2.162)。

4.19. $x^2y^{(4)}+2xy'''+ay=bx^2$.

通解为：

$$y=\frac{b}{a}x^2+\sqrt{x}\sum_{\nu=1}^{4}C_\nu Z_1(2a_\nu\sqrt{x}),$$

其中 Z_1 是柱函数，而 $a_\nu(\nu=1,2,3,4)$ 是方程

$$u^4=-a$$

的根。

4.20. $\boldsymbol{x^2y^{(4)}+4xy'''+2y''=0}$

此方程可以改写为下列形式：

$$(x^2y'')''=0,$$

因此

$$y=C_1+C_2x+C_3\ln|x|+C_4x\ln|x|.$$

基本解：$g(x,\xi)=-|x-\xi|+\frac{1}{2}(x+\xi)\ln\left|\frac{x}{\xi}\right|.$

相应于具有条件"$y(1)=y'(1)=0$，当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"的边值问题的格林函数是

$$\Gamma(x,\xi)=1-x\xi+\begin{cases}x-\xi+(x+\xi)\ln\xi & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时}, \\ \xi-x+(x+\xi)\ln x & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}.\end{cases}$$

4.21. $\boldsymbol{x^2y^{(4)}+6xy'''+6y''=0}$；见 4.27.

4.22. $\boldsymbol{x^2y^{(4)}+6xy'''+6y''-\lambda^2y=0}$，即 $\boldsymbol{\frac{1}{x}(x^3y'')''-\lambda^2y=0}$.

尖端杆的横向振动方程．方程 4.25 的特殊情况．

$$y=\frac{d}{dx}[C_1J_0(2\sqrt{\lambda x})+C_2Y_0(2\sqrt{\lambda x})+$$

$$+C_3J_0(2i\sqrt{\lambda x})+C_4Y_0(2i\sqrt{\lambda x})]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}[C_1J_1(2\sqrt{\lambda x})+C_2Y_1(2\sqrt{\lambda x})+$$

$$+C_3J_1(2i\sqrt{\lambda x})+C_4Y_1(2i\sqrt{\lambda x})].$$

在边界条件为"$y(1)=y'(1)=0$，当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"的情况下，方程

$$\frac{d}{d\lambda}[J_0(2\sqrt{\lambda})J_0(2i\sqrt{\lambda})]=0$$

的根是特征值，而函数

$$J_0(2i\sqrt{\lambda})\ \frac{d}{dx}J_0(2\sqrt{\lambda x})+J_0(2\sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}J_0(2i\sqrt{\lambda x})$$

是对应于这些 λ 的特征函数．

4.23. $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''=0$; 见 4.34.

4.24. $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''-\lambda^2y=0$;

方程 4.25 的特殊情况。

$$xy=C_1J_2(u)+C_2Y_2(u)+C_3J_2(iu)+C_4Y_2(iu),$$

其 中 $u=2\sqrt{\lambda x}$.在边界条件为"$y(1)=y'(1)=0$, 当 $x\to0$ 时 $y(x)$ 有界"的情况下，方程

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{d}{d\lambda}J_0(2\sqrt{\lambda})\cdot\frac{d}{d\lambda}J_0(2i\sqrt{\lambda})\right]=0$$

的根是特征值，而函数

$$\frac{d}{d\lambda}J_0(2i\sqrt{\lambda})\frac{d^2}{dx^2}J_0(2\sqrt{\lambda x})+$$

$$+\frac{d}{d\lambda}J_0(2\sqrt{\lambda})\frac{d^2}{dx^2}J_0(2i\sqrt{\lambda x})$$

是对应于这些 λ 的特征函数。

边界条件为"$y''(a)=y'''(a)=y(b)=y'(b)=0$"的情况，在下文中曾研究过：

N. Mononobe, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 1(1921), p. 444—451.

4.25. $x^2y^{(4)}+(2n-2\nu+4)xy'''+$

$$+(n-\nu+1)(n-\nu+2)y''-\frac{b^4}{16}y=0;$$

方程 4.37 的特殊情况。

$$y=x^c[C_1J_\mu(u)+C_2Y_\mu(u)+C_3J_\mu(iu)+C_4Y_\mu(iu)],$$

其中

$$2c=\nu-n,\quad \mu=n-\nu,\quad u=b\sqrt{x}.$$

如果用 y_ν 表示相应于 $n=0$ 的解，则对于正的整数值 n, 也有 $y=y_\nu^{(n)}$.

4.26. $x^3y^{(4)}+2x^2y'''-xy''+y'-a^4x^3y=0$;

方程 4.37 的特殊情况。

$$y=C_1J_0(ax)+C_2Y_0(ax)+C_3J_0(aix)+C_4Y_0(aix).$$

4.27. $x^3y^{(4)}+6x^2y'''+6xy''=0$，即 $(x^3y'')''=0$.

$$y=C_1+C_2x+C_3x^{-1}+C_4\ln|x|.$$

基本解：

$$g(x,\xi)=\frac{|x^2-\xi^2|}{4x\xi}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\xi}\right|.$$

对于具有条件"$y(1)=y'(1)=0$，当 $x\to0$ 时 $y(x)$ 有界"的边值问题，格林函数等于

$$\Gamma(x,\xi)=-1+(x+\xi)-\frac{x\xi}{2}-$$
$$-\begin{cases}\left(\dfrac{x}{2\xi}+\ln\xi\right) & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时},\\ \left(\dfrac{\xi}{2x}+\ln x\right) & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时}.\end{cases}$$

4.28. $x^4y^{(4)}-2n(n+1)x^2y''+4n(n+1)xy'+$
$$+[ax^4+n(n+1)(n+3)(n-2)]y=0,$$

n 为自然数；第一部分 18.6 节讨论过的那种方程的特殊情况.

$$y=x^{-n}\sum_{\nu=1}^{4}C_\nu e^{\lambda_\nu x}P_\nu(x) \qquad \text{当 } a\neq0 \text{ 时；}$$

这里 λ_ν 是方程 $\lambda^4+a=0$ 的彼此不同的四个根，而 P_ν 是某个确定的次数 $\leqslant4n$ 的多项式. 当 $a=0$ 时，则得到欧拉方程(第一部分 22.3 节).

4.29. $x^4y^{(4)}+4x^3y'''-(4n^2-1)x^2y''+$
$$+(4n^2-1)xy'-4x^4y=0.$$

特解为：

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+4\nu}}{\nu!(n+\nu)!(n+2\nu)!}.$$

J. C Costello, Philos Magazine (7), 21 (1936), p. 308—318.

4.30. $x^4y^{(4)}+4x^3y'''-(4n^2-1)x^2y''-(4n^2-1)xy'+$
$$+(4n^2-1-4x^4)y=0.$$

特解为(见 4.29)：

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+4\nu+1}}{\nu!(n+\nu)!(n+2\nu+1)!}.$$

4.31. $x^4y^{(4)}+4x^3y'''-(4n^2+3)x^2y''+$
$$+(12n^2-3)xy'-(12n^2-3+4x^4)y=0.$$

特解为(见 4.29)：

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+4\nu-1}}{\nu!(n+\nu)!(n+2\nu-1)!}.$$

4.32. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+[4x^4+(7-\rho^2-\sigma^2)x^2]y''+$
$$+[16x^3+(1-\rho^2-\sigma^2)x]y'+(8x^2+\rho^2\sigma^2)y=0.$$

其解可由 4.33 当 $2\mu=\rho+\sigma$, $2\nu=\rho-\sigma$ 时而得到.

4.33. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+[4x^4+(7-2\mu^2-2\nu^2)x^2]y''+$
$$+[16x^3+(1-2\mu^2-2\nu^2)x]y'+$$
$$+[8x^2+(\mu^2-\nu^2)^2]y=0.$$

$$y=C_1J_\mu(x)J_\nu(x)+C_2J_\mu(x)Y_\nu(x)+$$
$$+C_3Y_\mu(x)J_\nu(x)+C_4Y_\mu(x)Y_\nu(x).$$

如果 $\mu^2=\nu^2$; 这里 J, Y 表示贝塞耳函数(见 2.162)。

更一般的情况见 4.36.

4.34. $x^4y^{(4)}+8x^3y'''+12x^2y''=0$, 即 $(x^4y'')''=0$.

$$y=C_1+C_2x+C_3x^{-1}+C_4x^{-2}.$$

基本解：

$$g(x,\xi)=-\frac{|x-\xi|}{4x\xi}+\frac{|x^3-\xi^3|}{12x^2\xi^2}.$$

相应于具有条件"$y(1)=y'(1)=0$，当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 有界"的边值问题的格林函数是

$$\Gamma(x,\xi)=-1+\frac{x+\xi}{2}-\frac{x\xi}{3}+$$

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{2\xi}-\dfrac{x}{6\xi^2} & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时，}\\[2mm] \dfrac{1}{2x}-\dfrac{\xi}{6x^2} & \text{当 } x\geqslant\xi \text{ 时。}\end{cases}$$

4.35. $x^4y^{(4)}+8x^3y'''+12x^2y''+ay=0$，

即 $(x^4y'')''+ay=0$。

欧拉方程(第一部分 22.3 节)。其解为：

当 $a<1$ 时：$y=x^{-\frac{1}{2}}(C_1x^{m_1}+\cdots+C_4x^{m_4})$，

其中 $m_\nu^2=\frac{5}{4}\pm\sqrt{1-a}$；

当 $a=1$ 时：

$$y=x^{-\frac{1}{2}+m_1}(C_1+C_2\ln x)+x^{-\frac{1}{2}+m_2}(C_3+C_4\ln x),$$

其中 $m_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$；

当 $a>1$ 时：

$$y=x^{-\frac{1}{2}}[(C_1x^\alpha+C_2x^{-\alpha})\cos(\beta\ln x)+$$
$$+(C_3x^\alpha+C_4x^{-\alpha})\sin(\beta\ln x)]$$

其中 $\alpha=\sqrt{r}\cos\frac{\varepsilon}{2}$，$\beta=\sqrt{r}\sin\frac{\varepsilon}{2}$，而 r 和 ε 由条件

$$r^2=a+\frac{9}{16},\quad \sqrt{a-1}=r\sin\varepsilon,\quad 5=4r\cos\varepsilon$$

来确定。

如果考虑具有右端的非齐次方程

$$(x^4y'')''+ay=Ax^2+Bx+C,$$

则其特解为

$$y=\frac{A}{a+24}x^2+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}.$$

4.36. $x^4y^{(4)}+(6-4a)x^3y'''+(4b^2c^2x^{2c}+A)x^2y''+$

$+[4Bb^2c^2x^{2c}+(2a-1)C]xy'+$

$+(4Db^2c^2x^{2c}+E)y=0,$

其中

$A=6(a-1)^2-2c^2(\mu^2+\nu^2)+1,\ B=3c-2a+1,$

$C=2c^2(\mu^2+\nu^2)-2a(a-1)-1,\ D=(a-c)(a-2c),$

$E=(\mu c+\nu c+a)(\mu c+\nu c-a)(\mu c-\nu c+a)(\mu c-\nu c-a).$

通解为:

$y=x^a[C_1J_\mu(u)J_\nu(u)+C_2J_\mu(u)Y_\nu(u)+$

$+C_3Y_\mu(u)J_\mu(u)+C_4Y_\mu(u)Y_\nu(u)],$

其中 $u=bx^c$, 并且假设 $\mu^2\neq\nu^2$. 经过变换 $y=x^az(u)$, 则将此方程化为方程 4.33.

4.37. $x^4y^{(4)}+A_3x^3y'''+A_2x^2y''+A_1xy'+A_0y=0,$

其中

$A_3=6-4a-4c,$

$A_2=2(a^2-\nu^2c^2)+4(a+c-1)^2+4(a-1)(c-1)-1,$

$A_1=[2(\nu^2c^2-a^2)-(2a-1)(2c-1)](2a+2c-1),$

$A_0=(a^2-\nu^2c^2)(a^2+4ac+4c^2-\nu^2c^2)-b^4c^4x^{4c}.$

通解为:

$y=x^a[C_1J_\nu(u)+C_2Y_\nu(u)+C_3J_\nu(iu)+C_4Y_\nu(iu)],$

其中 $u=bx^c$, 而 J_ν, Y_ν 是贝塞耳函数.

4.38. $\nu^4x^4y^{(4)}+(4\nu-2)\nu^3x^3y'''+$

$$+(\nu-1)(2\nu-1)\nu^2x^2y''-\frac{1}{16}b^4x^{\frac{2}{\nu}}y=0.$$

$y=\sqrt{x}[C_1J_\nu(u)+C_2Y_\nu(u)+C_3J_\nu(iu)+C_4Y_\nu(iu)],$

其中 $u=bx^{\frac{1}{2\nu}}$，同 4.37 相比较即可看出这一点。

4.39. $(x^2-1)^2y^{(4)}+10x(x^2-1)y'''+$
$+\{8(3x^3-1)-2[\mu(\mu+1)+\nu(\nu+1)](x^2-1)\}y''-$
$-6x[\mu(\mu+1)+\nu(\nu+1)-2]y'+$
$+\{[\mu(\mu+1)-\nu(\nu+1)]^2-2\mu(\mu+1)-$
$-2\nu(\nu+1)\}y=0;$

见 2.240(22)。

4.40. $(e^x+2x)y^{(4)}+4(e^x+2)y'''+6e^xy''+$

$$+4e^xy'+e^xy+\frac{1}{x^5}.$$

假设 $u(x)=(e^x+2x)y$，则得到 $u^{(4)}=x^{-5}$，因此

$$(e^x+2x)y=\frac{1}{24x}+C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

4.41. $y^{(4)}\sin^4x+2y'''\sin^3x\cos x+y''\sin^2x(\sin^2x-3)+$
$+y'\sin x\cos x(2\sin^2x+3)+(a^4\sin^4x-3)y=0;$

硬加载球壳的微分方程。

如果 $a^4=\lambda^2+1$，则得到

$$LL(y)+\lambda^2y=0,\text{ 其中 } L\equiv\frac{d^2}{dx^2}+\operatorname{ctg}x\frac{d}{dx}-\operatorname{ctg}^2x.$$

此方程可分解为两个二阶共轭方程

$$L(y)+i\lambda y=0,\quad L(y)-i\lambda y=0$$

的乘积，这两个方程具有复共轭的解，因此只限于考虑前一个方程的解即可。

经过变换

$$y=\eta(\xi)\sin x,\quad \xi=\sin^2x,$$

可将此方程化为超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{5}{2}\xi-2\right)\eta'+\frac{1-i\lambda}{4}\eta=0.$$

4.42. $y^{(4)}\sin^6 x+4y'''\sin^5 x\cos x-6y''\sin^6 x-$
$$-4y'\sin^5 x\cos x+y\sin^6 x=f(x).$$

假设 $u(x)=y\sin x$, 则得到
$$u^{(4)}\sin^5 x=f(x).$$

4.43. $f(x)[y^{(4)}-2a^2y''+a^4y]+2f'(x)[y'''-a^2y']=0.$

其解为：$e^{\pm ax}$. 经过变换
$$y=e^{\pm ax}\int z(x)\,dx,$$
可将此方程化为方程
$$fz'''+2(2af+f')z''+2a(2af+3f')z'+4a^2f'z=0,$$
经过变换
$$z=e^{-2ax}\int u(x)\,dx,$$
又将此方程化为方程
$$fu''+2(f'-af)u'-2af'u=0.$$
假设这里 $v(x)=f(x)u(x)$, 则得到
$$(v''-2av')f-f''v=0.$$
如果 $f''=0$,即如果 $f(x)$ 是线性函数,则此方程变得特别简单.

4.44. $[f(x)y'']''=0.$
$$y=C_1+C_2x+\int_a^x\frac{x-t}{f(t)}(C_3+C_4t)\,dt$$
或者
$$y=C_1+C_2x+C_3\varphi(x)+C_4\psi(x),$$
其中
$$\varphi(x)=\int_a^b\frac{|x-t|}{f(t)}dt,\quad \psi(x)=\int_a^b\frac{|x-t|t}{f(t)}dt, \qquad (1)$$
积分取在使得 $f\neq 0$ 并且二次连续可微的每一个区间

$[a, b]$上.

基本解:

$$g_1(x, \xi) = \int_a^b \frac{|x-t||\xi-t|}{4f(t)} dt$$

或者

$$g_2(x, \xi) = \frac{|x-\xi|}{x-\xi} \int_\xi^x \frac{(x-t)(t-\xi)}{2f(t)} dt.$$

在杆的横向振动的情况中，常常遇到下述边界条件:

I. $y = y' = 0$ (刚性固定端或夹持端),

II. $y = y'' = 0$ (简支或铰支端),

III. $y'' = y''' = 0$ (自由端).

下面,格林函数的第一个(第二个)上标表示在左端 $x=a$ (右端$x=b$)给出这些边界条件中的哪一个; 例如, $\Gamma^{\mathrm{I},\mathrm{II}}(x, \xi)$ 表示的格林函数,相应于具有边界条件

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y''(b) = 0$$

的问题. 还引入下列缩写符号:

$$\alpha = \int_a^b \frac{dt}{f(t)}, \quad \beta = \int_a^b \frac{tdt}{f(t)}, \quad \gamma = \int_a^b \frac{t^2 dt}{f(t)}.$$

采用上述符号，各种边值问题的格林函数可按下列方式写出:

$$\Gamma^{\mathrm{I},\mathrm{I}} = g_1(x, \xi) + \frac{1}{4(\alpha\gamma - \beta^2)} \{\varphi(x)[\beta\psi(\xi) - \gamma\varphi(\xi)] + \psi(x)[\beta\varphi(\xi) - \alpha\psi(\xi)]\}.$$

这时，假设 $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$. 如果 $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, 则格林函数不存在,因为相应的边值问题具有非平凡解,即

$$y = C_3\varphi(x) + C_4\psi(x),$$

其中 C_3, C_4 是方程组

$$\alpha C_3+\beta C_4=0,\ \beta C_3+\gamma C_4=0$$

的非零解.

$$N\cdot\Gamma^{\mathrm{I,II}}=N\cdot g_1(x,\xi)+$$
$$+(x-b)[(\xi-b)(\alpha\gamma-\beta^2)+(\gamma-b\beta)\varphi(\xi)+(b\alpha-\beta)\psi(\xi)]-$$
$$-\varphi(x)[(\xi-b)(b\beta-\gamma)+b^2\varphi(\xi)-b\psi(\xi)]+$$
$$+\psi(x)[(\xi-b)(b\alpha-\beta)+b\varphi(\xi)-\psi(\xi)],$$

其中

$$N=4(b^2\alpha-2b\beta+\gamma).$$

如果 $N=0$，则格林函数不存在，因为相应的边值问题具有非平凡解，即

$$y=b\beta-\gamma-(b\alpha-\beta)x-b\varphi(x)+\psi(x).$$

$$4\Gamma^{\mathrm{I,III}}=4g_1(x,\xi)+\gamma-\beta\xi-\psi(\xi)+$$
$$+[\alpha\xi-\beta+\varphi(\xi)]x+\xi\varphi(x)-\psi(x).$$

当 $a=0,\ b=1$ 时，则有

$$4\Gamma^{\mathrm{II,II}}=4g_1(x,\xi)+\gamma+(\beta-2\gamma)\xi-\psi(\xi)+$$
$$+[\beta-2\gamma+(\alpha-4\beta+4\gamma)\xi+2\psi(\xi)-\varphi(\xi)]x-$$
$$-\xi\varphi(x)+(2\xi-1)\psi(x).$$

$\Gamma^{\mathrm{II,III}}$ 和 $\Gamma^{\mathrm{III,III}}$ 不存在，因为相应的边值问题具有非零解，即 $C(x-a)$ 和 C_1+C_2x. 在这些情况下，可以建立广义格林函数.

第五章　五阶和更高阶的线性微分方程

5.1. $y^{(5)}+2y'''+y'=ax+b\sin x+c\cos x.$

$$y=\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{8}x^2\cos x-\frac{c}{8}x^2\sin x+$$
$$+C_1+C_2\sin x+C_3\cos x+C_4x\sin x+C_5x\cos x.$$

5.2. $y^{(6)}+y=\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x.$

右端等于$\Re\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{2ix})$. 所以，根据第一部分 22.2 节，得到

$$y=\frac{x}{12}\sin x+\frac{1}{126}\cos 2x+A_1\cos(x+B_1)+$$
$$+A_2e^{\frac{x}{2}\sqrt{3}}\cos\left(\frac{x}{2}+B_2\right)+A_3e^{-\frac{x}{2}\sqrt{3}}\cos\left(\frac{x}{2}+B_3\right).$$

5.3. $y^{(n)}-axy=b,\ a>0.$

借助于拉普拉斯变换(第一部分，19.2节)，得到

$$y=\sum_{\nu=0}^{n}C_\nu\varepsilon_\nu\int_0^\infty\exp\left(\varepsilon_\nu xt-\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}\right)dt,$$

其中

$$\varepsilon_\nu=\exp\frac{2\nu\pi i}{n+1},\quad\sum_{\nu=0}^{n}C_\nu=\frac{b}{a}.$$

5.4. $y^{(n)}+ax^\nu y'+a\nu x^{\nu-1}y=0.$

此方程是全微分方程，并且可以化为 $n-1$阶方程

$$y^{(n-1)}+ax^{\nu}y=C \quad (C\text{ 任意}).$$

5.4 a. $y^{(n)}=ax^2y'+bxy'+cy.$

借助于积分变换可以得到解:

$$y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^n+v^n}{n}}u^{\alpha}v^{\beta}\sum_{\nu=1}^{n}C_{\nu}e^{\lambda_{\nu}uvx}\,du\,dv$$

$$(\alpha>-1,\beta>-1,\lambda_{\nu}^{n}=a).$$

5.5. $y^{(n)}+ay^{(n-1)}=f(x).$

当 $a=0$ 时，通解为:

$$y=\sum_{\nu=0}^{n-1}C_{\nu}x^{\nu}+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt,$$

其中 x_0 可以任意选取。

当 $a\neq0$ 时，假设 $y^{(n-1)}=u(x)$，则得到线性方程

$$u'+au=f(x).$$

求解此方程以后仍然需要完成的 $n-1$ 重积分计算，同上面的情况一样，可以用单重积分来代替. 如果说要研究大的 x 值时解的性质，则下列写法可能是有用的. 当 $a<0$ 时，则有

$$y=Ce^{-ax}+\sum_{\nu=0}^{n-2}C_{\nu}x^{\nu}+$$

$$+\int_x^{\infty}\left(\frac{f(t)}{|a|^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-2}|a|^{\nu}\frac{(x-t)^{\nu}}{\nu!}-e^{a(t-x)}\right)dt,$$

只要积分

$$\int_x^{\infty}|t|^{n-2}|f(t)|\,dt$$

收敛；当 $a>0$ 时，只需将 $\int_x^{\infty}$ 由 $\int_{\infty}^{x}$ 来代替。

5.6. $xy^{(n)}-mny^{(n-1)}+axy=0$，$m$ 和 n 是自然数，$n\geqslant 2$。

$$y=x^{(m+1)n-1}\left(x^{1-n}\frac{d}{dx}\right)^m\frac{u}{x^{n-1}},$$

其中 $u(x)$ 遍及常系数方程

$$u^{(n)}+au=0$$

的所有的解。

见 J Zbornik. *Akad. Wien*166 (1957)。

5.7. $xP(D)y+Q(D)y=0$，P 和 Q 是多项式，$D=\dfrac{d}{dx}$。

如果

$$\exp\left(xt+\int\frac{Q(t)}{P(t)}dt\right)\Bigg|_a^b\equiv 0,$$

则一个解是

$$y=\int_a^b\frac{1}{P(t)}\exp\left[xt+\int\frac{Q(t)}{P(t)}dt\right]dt.$$

5.8. $xy^{(n)}=\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}[(aA_{\nu+1}-A_\nu)x+A_{\nu+1}]y^{(\nu)}$.

其解为：

$$y=e^{\lambda x},\qquad \text{如果 } f(\lambda)=0,$$

$$y=e^{ax}\left(x-\frac{f'(a)}{f(a)}\right),\ \text{如果 } f(a)\neq 0.$$

这里

$$f(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n-1}A_{\nu+1}\lambda^\nu.$$

5.9. $x^ny^{(2n)}=ay$。

$$y=x^{\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n}Z_n(2\alpha_{kl}\sqrt{x}),$$

其中 Z_n 是柱函数，而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是方程 $\alpha^n=\sqrt{a}$ 的根.

Watson. 106。

5.10. $x^{2n}y^{(n)}=ay, \quad a\neq0$.

借助于不难证明的公式

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}e^{-\frac{a}{x}}=(-1)^n a^n x^{-n-1}e^{-\frac{a}{x}},$$

可以得知 $y=x^{n-1}\exp\left(-\frac{r}{x}\right)$ 是解，如果．$r^n=a$．取满足这个条件的 n 个不同的 r 值，则得到 n 个线性无关的解.

5.11. $x^{n+\frac{1}{2}}y^{(2n+1)}=ay$.

$$y=x^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{2n}C_k\Big[J_{-n-\frac{1}{2}}(2\alpha_k\sqrt{x})+$$

$$+iJ_{n+\frac{1}{2}}(2\alpha_k\sqrt{x})\Big],$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}$ 是方程 $\alpha^{2n+1}=-ai$ 的根.

Watson. 106; J Zbornik. *Akad Wien* 166 (1957).

5.12. $(x-a)^n(x-b)^n y^{(n)}=cy, \ a\neq b$

假设 $y=(x-b)^{n-1}\eta(\xi), \ \xi=\ln\frac{x-a}{x-b}$，则得到常系数方程。

5.13. $\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu C_{\lambda-\nu-1}^{n-\nu}P^{(n-\nu)}(x)y^{(\nu)}+$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu C_{\lambda-\nu-1}^{n-\nu-1}Q^{(n-\nu-1)}(x)y^{(\nu)}=0.$$

$P=\prod_{\nu=1}^{n-1}(x-a_\nu), \quad Q=P(x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}b_\nu\frac{P(x)}{x-a_\nu}$; 蒂索方程.

见第一部分，22.6 节.

第六章　二阶非线性微分方程

含有代数无理式的方程：13,15, 22, 25, 60—67,88, 100—102, 166,177,218,220,231,234.

含有指数函数的方程：14,15,83,242.

含有对数函数的方程：113,222。

含有双曲函数的方程：16.

含有三角函数的方程：17—19,29,48,49,121,223.

含有任意函数的方程：20,29,33—39,41,44,51—55,59, 68—70, 72,85,101,103,114—116, 122,123, 129, 131, 136, 139, 148, 149, 152, 161, 167, 170, 187, 196—204, 224, 225, 230, 235, 241, 247—249.

〔本章所讨论的许多方程的研究，以及其他许多非线性方程，可以在下列著作中找到：P Painlevé. *Acta Math* .25(1902),p 1 以及以后；B Gambier, 同上, 33 (1910), p 1 以及以后；R Garnier. *Annales Ecole Norm* (3),34 (1917), p 239—353.〔某些细节可在 Bellman 一书中找到；在 Sansone 第 Ⅻ 章分析了几个方程.——俄译本编者注.〕

1—72. $ay''=F(x, y, y')$

6.1. $y''=y^2$.

根据第一部分 23.1 节，得到

$$x=\int\frac{dy}{\left(\frac{2}{3}y^3-C_1\right)^{\frac{1}{2}}}+C_2,$$

因而，$y=\mathscr{P}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}-C_2\right)$，其中 $\mathscr{P}$ 是外尔斯特拉斯函数，其不变量 $g_2=0, g_3=C_1$（C_1 任意）.

［关于外尔斯特拉斯函数，见2.26.——俄译本编者注.］

6.2. $y''=6y^2$.

假设 $p(y)=y'(x)$，则得到

$pp'=12y^2$，因而 $y'=\pm\sqrt{4y^3-C_1}$，

由此，$y=\mathscr{P}(x+C_2)$，其中 $\mathscr{P}$ 是外尔斯特拉斯函数，其不变量 $g_2=0, g_3=C_1$.

6.3. $y''=6y^2+x$.

此方程定义了所谓潘勒韦超越函数.

详见：Ince; P. Appell, *Bulletin Soc Math France* 45 (1917), p 150—153; E Jüttner, *Zeitschrift f Math Phys*. 58 (1910) p 385—409(对于化学问题的应用).［关于潘勒韦方程理论的详细阐述，以及原始参考文献，见下列一书：В В Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950, 第3章.——俄译本编者注.］

6.4. $y''-6y^2+4y=0$.

由第一部分23.1节得知，此方程可以化为方程

$$y'^2-4y^3+4y^2+C=0.$$

解这个方程将导致椭圆积分，在解之中包含(当 $C=0$)函数

$$y=\frac{1}{\sin^2(x+C_1)}.$$

关于借助于函数论的方法求解，见 Whittater 和 Watson, 438.

6.5. $y''+ay^2+bx+c=0$.

根据第一部分23.1节，当 $b=0$ 时，此方程等价于可

用椭圆函数求解的方程

$$y'^2+\frac{2}{3}ay^3+cy=C;$$

同 1.71 相比较．当 $b\neq 0$ 时，经过变换

$$y(x)=\alpha\eta(\xi),\quad \xi=\beta\left(x+\frac{c}{b}\right)$$

可将原方程化为下列形式：

$$\eta''+\frac{a\alpha}{\beta^2}\eta^2+\frac{b}{\alpha\beta^3}\xi=0;$$

当适当选择数量 α 和 β 时，则得到方程 6.3

$$\eta''=6\eta^2+\xi.$$

6.6． $\boldsymbol{y''-2y^3-xy+a=0.}$

此方程将导致新的函数，所谓潘勒韦超越函数；见 6.3．

6.7． $\boldsymbol{y''=ay^3.}$

例如，函数

$$y=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{1}{x-C}\ (C\ 任意)$$

是解．

根据第一部分 23.1 节，给定的方程可以化为方程

$$y'^2=\frac{1}{4}ay^4+C,$$

根据 1.71，此方程可用椭圆函数求解．

6.8． $\boldsymbol{y''-2a^2y^3+2abxy-b=0.}$

黎卡提方程

$$y'+ay^2-bx=0$$

的每一个解，也满足给定的方程．

其次，见 B Gambier, *Acta Math* 33 (1910), p 32 以及以后．

6.9. $y''+ay^3+bxy+cy+d=0$.

当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，得到比较简单的特殊情况．如果 $a\neq0$ 和 $b\neq0$，则借助于变换

$$y=\lambda\eta(\xi),\ \xi=\mu(bx+c)$$

给定的方程可以化为潘勒韦曾研究过的标准形式

$$\eta''=2\eta^3+\xi\eta+\alpha.$$

最后这个方程将导致新的函数，所谓潘勒韦超越函数；见6.3.

6.10. $y''+ay^3+by^2+cy+d=0$.

根据第一部分23.1节，得到方程1.71：

$$y'^2+\frac{1}{2}ay^4+\frac{2}{3}by^3+cy^2+2dy+C=0.$$

6.11. $y''+ax^\nu y^n=0$；埃姆登方程.

特解为：$y=\alpha x^\beta$,

其中 $\beta=\dfrac{2+\nu}{1-n},\quad \alpha^{n-1}=-\dfrac{(\nu+2)(\nu+n+1)}{a(n-1)^2}$.

假设 $\eta(\xi)=y(x)$，$\xi=\dfrac{1}{x}$，则得到方程6.74

$$\xi\eta''+2\eta'+a\xi^{-\nu-3}\eta^n=0.$$

当 $a=-1,\nu=1-n$ 时，见6.102；当 $a=-1,\nu=-\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{3}{2}$，见6.100.

[埃姆登方程理论的详细论述，见 Bellman 一书第Ⅶ章．——俄译本编者注.]

6.12. $y''+(n+1)a^{2n}y^{2n+1}-y=0$.

将 y 取作为自变量，并且假设 $p(y)=y'(x)$，则由于 $y''=pp'(y)$，得到一阶方程，此一阶方程可以化为可分离变量的方程

$$y'(x)=\pm y\sqrt{a^{2n}y^{2n}-1}+C.$$

6.13. $\boldsymbol{y''=(ay^2+bxy+cx^2+\alpha y+\beta x+\gamma)^{-\frac{3}{2}}}$, $a\neq 0$.

假设

$$2au(x)=2ay+bx+\alpha,$$

则得到方程 6.101

$$(Ax^2+Bx+C)^{\frac{3}{2}}u''=\left(\frac{au^2}{Ax^2+Bx+C}+1\right)^{-\frac{3}{2}},$$

其中 A, B, C 由等式

$$4aA=4ac-b^2,\ 2aB=2a\beta-b\alpha,\ 4aC=4a\gamma-\alpha^2$$

来确定.

6.14. $\boldsymbol{y''=e^y}$.

利用第一部分 23.1 节中指出的方法,则得到

$$x=\int(2\exp y+C_1)^{-\frac{1}{2}}dy+C_2;$$

积分可以借助于变换

$$t=(2\exp y+C_1)^{\frac{1}{2}}$$

来计算.

6.15. $\boldsymbol{y''+ae^xy^{-\frac{1}{2}}=0}$; 见 6.242.

6.16. $\boldsymbol{y''+e^x\operatorname{sh}y=0}$.

满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的解可表示为下列级数:

$$y=x-\frac{x^3}{3!}-2\frac{x^4}{4!}-3\frac{x^5}{5!}-2\frac{x^6}{6!}+$$

$$+17\frac{x^7}{7!}+128\frac{x^8}{8!}+549\frac{x^9}{9!}+\cdots$$

M Chini, *Giornale Mat* 58(1920), p 35—53.

6.17. $\boldsymbol{y''+a\sin y=0}$; 摆的振动方程.

通常将摆的振动方程写为下列形式:

$$\varphi''(t)+\frac{g}{l}\sin\varphi(t)=0. \tag{1}$$

根据第一部分23.1节，对于满足初始条件$y(x_0)=\alpha$, $y'(x_0)=\beta$ 的解 $y(x)$，可以得到

$$y'=\pm\sqrt{2a\cos y+\beta^2-2a\cos\alpha},$$

因而

$$x-x_0=\int_\alpha^y[2a\cos y+\beta^2-2a\cos\alpha]^{-\frac{1}{2}}dy,$$

而如果假设

$$\sin\frac{1}{2}y=ku,\quad k^2=\sin^2\frac{1}{2}\alpha+\frac{\beta^2}{4a},$$

则有

$$\sqrt{a}\;(x-x_0)=\int_{\frac{1}{k}\sin\frac{\alpha}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

这是椭圆积分．当 $\alpha=0$, $|k|<1$ 时，则得到

$$\sin\frac{1}{2}y=k\,\mathrm{sn}\sqrt{a}\,(x-x_0),$$

其中雅可比函数 sn 的模为 k.

[例如，见：Ш.—Ж. де ла Валле Пуссен, Лекции по теоретической механике, ИЛ, 1948, т. I. р. 183, 或者 Дж Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ. 1953, р. 24; О. Блькьер, Анализ нелинейных систем, 1969.——俄译本编者注.]

6.18. $y''+\alpha^2\sin y=\beta\sin x$; 特殊的都芬格方程．见6.19.

6.19. $y''+\alpha^2\sin y=\beta f(x)$; 广义的都芬格方程.

[文献：Дж Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953; И. Г. Малкин, Не-

которые задачи теории нелинейных колебаний, 1955; Sansone; Т Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, 1968; О. Блакьер, Анализ нелинейных систем, 1969. 这里也指出了某些原始论文. ——俄译本编者注.]

当研究振动时，特别是研究摆的振动时，常常遇到方程 6.18 和 6.19. $\beta=0$ 的情况，见 6.17. 这里我们假设 $\beta\neq 0$.

对于方程 6.18，可以提出具有下列周期边界条件的边值问题：

$$\text{“}y(0)=y(2\pi),\ y'(0)=y'(2\pi)\text{”}. \tag{1}$$

如果 $\alpha^2<1$，则对于任何 β，此边值问题具有唯一的解；当 $\alpha^2>1$ 时，则有多个解. 假设 $y\approx A\sin x$, 其中 A 由方程

$$A^2-2\alpha^2J_1(A)+\beta=0\quad (J_1\text{ 为贝塞耳函数})$$

确定，则其解可以近似地求得.

对于方程 6.18 和 6.19，可以提出具有下列边界条件的边值问题：

$$\text{“}y(0)=y(\pi)=0\text{”}. \tag{2}$$

根据第二部分 10.1 节，对于任意的 α, β, 相应的边值问题至少存在一个解，而当 $\alpha^2<1$ 时，则只有一个解. 对于固定的 α 和所有足够大的 $|\beta|$，如果方程 6.19 中的函数 $f(x)$ 使得边值问题

$$u''=f(x),\ u(0)=u(\pi)$$

之解的导数 $u'(x)$ 只有有限个零点，则解的唯一性成立. 对于常数 β, 方程 6.19 满足边界条件(2)的解的个数，当 $\alpha\to\infty$ 时无限增加. 其次，存在着所谓分支解，即对于这样一些解 $y(x)$, 边值问题

$$\varphi''(x)+\alpha^2\cos y(x)\cdot\varphi(x)=0,\quad \varphi(0)=\varphi(\pi)=0$$

具有解 $\varphi(x)\neq 0$。

6.20. $y''=x^{-\frac{3}{2}}f(yx^{-\frac{1}{2}})$.

假设 $u(x)=yx^{-\frac{1}{2}}$，则得到

$$\frac{d}{dx}(u'x)^2=\frac{1}{2}uu'+2f(u)u',$$

即

$$(u'x)^2=C_1+\frac{1}{4}u^2+2\int f(u)du,$$

由此得到

$$\int\left[C_1+\frac{1}{4}u^2+2\int f(u)dx\right]^{-\frac{1}{2}}du=C_2+\ln|x|.$$

6.21. $y''-3y'-y^2-2y=0$；见 6.73.

6.22. $y''-7y'+12y-y^{\frac{3}{2}}=0$；见6.100(1)。

6.23. $y''+5ay'-6y^2+6a^2y=0$.

$$y=a^2C_1^2e^{-2ax}\mathscr{P}(C_1e^{-ax}+C_2,0,-1).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p 53，方程(6).

6.24. $y''+3ay'-2y^3+2a^2y=0$.

$$y=-iaC_1e^{-ax}\mathrm{sn}_{k^2=-1}(C_1e^{-ax}+C_2).$$

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 53，方程(5).

6.25. $y''-\frac{3n+4}{n}y'-\frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}y\left(y^{\frac{n}{n+1}}-1\right)=0$；

见 6.102(2)。

6.26. $y''+ay'+by^n+\frac{a^2-1}{4}y=0$.

假设 $y=\xi^\alpha\eta(\xi)$，$\xi=e^x$，$\alpha=\frac{1}{2}(1-a)$，则得到方程

6.74

$$\xi\eta''+2\eta'+b\xi^{\alpha n-\alpha-1}\eta^n=0.$$

6.27. $y''+ay'+bx^{\nu}y^{n}=0$；见 6.74.

6.28. $y''+ay'+be^{y}=2a$；见 6.76(3).

6.29. $y''+ay'+\varphi(x)\sin y=0$, $\varphi(x)$——周期函数.

见：A Erdélyi, *Zeitschrift f. angew Math. Mech* 14 (1934), p. 235—247；F. Tricomi, *C. R. Paris*, 193(1931), p. 635 以及以后. *Atti Accad Lincei* (6), 18 (1933), p. 26—28, *Annali Pisa* (2), 2(1933), p. 1—20.

6.30. $y''+yy'-y^{3}=0$；见 6.32 和 6.33.

6.31. $y''+yy'-y^{3}+ay=0$, $a\neq0$；方程 6.35 的特殊情况.

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}\frac{\mathscr{P}'(u,12,C_1)}{\mathscr{P}(u,12,C_1)-1},\quad u=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}+C_2.$$

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 54, 方程(8).

6.32. $y''+(y+3a)y'-y^{3}+ay^{2}+2a^{2}y=0$.

$$y=C_1e^{-ax}\frac{\mathscr{P}'(u,0,1)}{\mathscr{P}(u,0,1)},\ \text{其中}$$

$$u=\begin{cases}\dfrac{C_1}{a}e^{-ax}+C_2 & \text{当 } a\neq0 \text{ 时},\\[2ex] C_1x+C_2 & \text{当 } a=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p 54, 方程(7).

6.33. $y''+(y+3f)y'-y^{3}+y^{2}f+y(f'+2f^{2})=0$,

$$f=f(x).$$

(a)假设 $y(x)=\xi'(x)\eta(\xi)$，其中 $\xi(x)$ 满足方程 $\xi''=-f\xi'$，则得到方程

$$\eta''+\eta\eta'-\eta^{3}=0,$$

即原方程当 $f=0$ 时的特殊情况；关于这个新的方程，见 6.32.

(b)假设 $u(x)=\exp(-\int fdx)$, $v(x)=\exp\int ydx$,

则可将给定的方程写为下列形式：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v''}{u^2v^2}-\frac{u'v'}{u^3v^2}\right)=0.$$

由此得到

$$\frac{v''}{u^2v^2}-\frac{u'v'}{u^3v^2}=\frac{3}{2}C_1 \text{ 或 } \frac{d}{dx}\ \frac{v'^2}{u^2}=3\,C_1v^2v',$$

可以化为可分离变量的方程

$$v'^2=u^2(C_1v^3+C_2).$$

Ince, p 331 以及以后.

6.34. $y''+yy'-y^3-\left(\frac{f'}{f}+f\right)(3\,y'+y^2)+$

$$+\left(af^2+3f'+3\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)y+bf^3=0,\ f=f(x).$$

(a)假设

$$y(x)=\xi'\eta(\xi),\quad \xi=\exp\int f dx,$$

则得到

$$\eta''+\eta\eta'-\eta^3+(a-2)\frac{\eta}{\xi^2}+\frac{b}{\xi^3}=0,$$

即原方程当 $f=\frac{1}{x}$时的特殊情况.

(b)当 $a=14, b=24$ 时，给定的方程具有解：

$$y(x)=f\frac{\xi^3u'+2}{\xi^2u-1},$$

其中 $\xi=\exp\int f dx$，而 $u(\xi)$ 是方程 $u''=6\,u^2$ 的任意解.

Ince, p 332.

6.35. $y''+\left(y-\frac{3f'}{2f}\right)y'-y^3-\frac{f'}{2f}y^2$

$$+\left(f+\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{2f}\right)y=0,\ f=f(x).$$

(a) 假设 $y=\xi'(x)\,\eta(\xi)$，$a\xi'^2=f(x)$，则得到方程 6.31，其中变量 y, x 换为 ξ, η。

(b) 假设

$$u(x)=1+\exp\int y\,dx,\quad v(x)=2u''-u'\frac{f'}{f}-(u^2-1)f,$$

则由原方程得到

$$\frac{v'}{v}-\frac{f'}{f}-\frac{2u'}{u-1}=0,\text{ 因而 } v=C(u-1)^2 f,$$

这意味着

$$2\frac{u'u''}{f}-u'^2\frac{f'}{f^2}=[C(u-1)^2+u^2-1]u',$$

因此，最后得到方程

$$u'^2=f(x)[C_1(u-1)^3+(u-1)^2+C_2],$$

根据第一部分 4.1 节，此方程可用椭圆函数求解（见 1.71）。

P. Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p. 33, 方程(10)；Ince, p. 332.

6.36. $\boldsymbol{y''+2yy'+f(x)y'+f'(x)y=0}$.

假设 $u(x)=y+\frac{1}{2}f$，则得到黎卡提方程

$$u'+u^2=\frac{1}{2}f'+\frac{1}{4}f^2+C.$$

6.37. $\boldsymbol{y''+2yy'+f(x)(y'+y^2)=g(x)}$.

假设 $u(x)=y'+y^2$，则得到

$$u'+f(x)u=g(x).$$

于是，原方程化为特殊的黎卡提方程和一阶线性方程。

P. Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p. 31, 方程 (2)；Ince, p. 331.

6.38. $\boldsymbol{y''+3yy'+y^3+f(x)y=g(x)}$.

假设 $u'(x)=yu$, 则得到线性方程

$$u'''+f(x)u'-g(x)u=0.$$

6.39. $y''+[3y+f(x)]y'+y^3+f(x)y^2=0$.

假设 $u'=yu$, 则得到

$$u'''=f(x)u''.$$

Ince. p. 331.

6.40. $y''-3yy'-(3ay^2+4a^2y+b)=0$; 见 1.43(1).

6.41. $y''-[3y+f(x)]y'+y^3+f(x)y^2=0$.

假设 $y(x)=-u(x)$, 则得到方程 6.39, 其中 y, f 由 u, $-f$ 来代替.

6.42. $y''-2ayy'=a$; 见 1.40(2).

6.43. $y''+ayy'+by^3=0$.

此方程是第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型的方程. 假设 $p(y)=y'(x)$, 则得到方程

$$pp'+ayp+by^3=0,$$

经过变换

$$p(y)=y^2u(t), t=\ln y,$$

可将其化为方程

$$uu'+2u^2+au+b=0;$$

由此求得

$$t=-\int\frac{udu}{2u^2+au+b}+C_1.$$

这个积分可以算出来; 求出 u 以后, 我们还应当求解方程

$$y'(x)=y^2u(\ln y),$$

由此得到

$$x=\int\frac{dy}{y^2u(\ln y)}+C_2.$$

只要 $y'(x)\neq 0$，就可采用这种方法。

当 $a=-4$，$b=2$ 时解的详细研究，见 H. Seifert, *Jahresbericht DMV* 52 (1942), p 75—79.

6.44. $\boldsymbol{y''+f(x,y)y'+g(x,y)=0}$.

如果

$$g_y-f_x=fX-X^2-X',$$

其中 X 是某一个只依赖于 x 的函数，则在 xy 平面上每个单联通域内，原方程的解同一阶方程

$$\varphi(x)y'+\psi(x,y)=C$$

的解是一样的，其中 φ,ψ 由条件

$$\varphi=\exp\int X\,dx,\ \psi_x=g\varphi,\ \psi_y=(f-X)\varphi$$

来确定。

6.45. $\boldsymbol{y''+ay'^2+by=0}$.

当研究含阻尼的微振动时，如果阻尼同速度的平方成正比，就会遇到这个方程；也可参阅 6.46 和 6.48.

假设 $v(y)=y'^2$，则得到线性方程

$$v'+2av+2by=0;$$

由此求得

$$y'^2=Ce^{-2ay}+\frac{b}{2a^2}(1-2ay), \tag{1}$$

最后

$$x=C_1+\int\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

其中 Y 表示方程(1)的右端。

6.46. $\boldsymbol{y''+ay'|y'|+by'+cy=0}$, $a>0,\ b\geq 0,\ c>0$.

具有平方阻尼的微振动的方程（关于具有任意阻尼规律的振动方程，见 6.72）。

经过变换

$$y(x)=\frac{\eta(\xi)}{2a},\quad \xi=x\sqrt{c},$$

此方程可化为标准形式

$$\eta''+\frac{1}{2}\eta'|\eta'|+B\eta'+\eta=0,\quad 其中\quad B=\frac{b}{\sqrt{c}}. \tag{1}$$

这个方程的解由下列两个方程的解组成：

$$\eta''\pm\frac{1}{2}\eta'^2+B\eta'+\eta=0; \tag{2}$$

如果函数 $\bar{\eta}$ 遍及取下方符号时方程的所有的解，则显然函数 $-\bar{\eta}$ 是取上方符号时方程的解 η.

详细地研究一下此方程(以及对于复数值 ξ) 当 $B=0$ 时的情况．在这种情况下，方程

$$\eta''+\frac{1}{2}\eta'|\eta'|+\eta=0 \tag{3}$$

的解，可按下述方式由方程

$$\eta''-\frac{1}{2}\eta'^2+\eta=0 \tag{4}$$

满足初始条件

$$\eta(0)=a,\ \eta'(0)=0$$

的解 $\eta=S(\xi,a)$ 得到．如果应当建立的解在 $\xi_0<\xi<\infty$ 上存在，并且如果这个解在点$\xi_1<\xi_2<\cdots$上具有振幅 a_1, a_2, $\cdots$，其中，比如说，$\eta(\xi_1)<0$，即$\eta(\xi_1)=-a_1$，则应当假设

$$\eta=\begin{cases} S(\xi-\xi_1,-a_1) & 当\ \xi_0<\xi\leqslant\xi_1\ 时, \\ -S(\xi-\xi_1,a_1)=-S(\xi-\xi_2,-a_2) & 当\ \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2\ 时, \\ S(\xi-\xi_2,a_2)=\ S(\xi-\xi_3,-a_3) & 当\ \xi_2\leqslant\xi\leqslant\xi_3\ 时, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

W. E. Milne, *Oregon Publication* 2_2 (1923); *Oregon Publication Math.* 1_1 (1929).这里刊载了求方程(1)和(3)的解时所

用的各种数表。

关于近似解法，见 W. Müller, *Iugenieur-Archiv* 5 (1934), 306—315; M. Hampl, 同上, 6 (1935), 213—216.

[也可参阅 Sansone, 第Ⅻ章, § 1,2; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953, 第三章, § 11; Андронов, Витт 和 Хайкин. ——俄译本编者注.]

6.47. $y''+ay'^2+by'+cy=0$.

假设 $v(y)=y'(x)$，则得到阿贝耳方程（见第一部分, 4.11 节）

$$vv'+av^2+bv+cy=0.$$

6.48. $y''+ay'^2+b\sin y=0$.

当研究摆的阻尼振动，而阻尼同速度的平方成正比时，常常遇到此方程. 假设 $v(y)=y'^2$，则得到线性方程

$$v'+2av+2b\sin y=0.$$

由此得到可分离变量的方程

$$[y'(x)]^2=Ce^{-2ay}+\frac{2b}{4a^2+1}(\cos y-2a\sin y).$$

当研究微振动时，可以取 y 来代替 $\sin y$. ——见 6.45.

[关于振动问题的物理上和数学上的详细研究，见下列著作：Андронов, Витт 和 Хайкин; Б. В. Булгаков, Колебания, 1955; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953; 等等.——俄译本编者注.]

6.49. $y'+ay'|y'|+b\sin y=0$.

此方程的解可以这样得到：即根据 6.48，求出方程

$$y''+ay'^2+b\sin y=0 \qquad 当\ y'>0 时$$

和

$$y''-ay'^2+b\sin y=0 \qquad 当\ y'<0\ 时$$

的解，然后由这些解组成给定的方程的解。

6.50. $\boldsymbol{y''+ayy'^2+by=0}$；6.53 型。

假设 $p(y)=y'(x)$，则得到伯努利方程

$$pp'+ayp^2+by=0.$$

6.51. $\boldsymbol{y''+f(y)y'^2+g(x)y'=0}$.

除以 y'，则得到全微分方程．其解可由下列等式求得：

$$\ln|y'|+\int f(y)\,dy+\int g(x)\,dx=C.$$

此外，$y=C$（C 任意）显然是解。

6.52. $\boldsymbol{y''-\dfrac{f'(y)}{f(y)}y'^2+g(x)y'+h(x)f(y)=0}$.

假设 $y(x)=\eta(\xi)$，其中 $\xi=\xi(x)$ 是方程

$$\xi''+g(x)\xi'+h(x)=0$$

的解，此方程可化为一阶线性方程，则得到

$$\xi'^2\eta''-\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}\xi'^2\eta'^2+h(x)\ [f(\eta)-\eta']=0;$$

例如，方程

$$\eta'(\xi)=f(\eta)$$

的解显然满足这个方程。

求解下列方程组，我们亦能得到原方程的积分：

$$y'(x)=uf(y),\ u'(x)=-g(x)u-h(x),$$

这里首先应当积分第二个方程，然后积分第一个方程。

6.53. $\boldsymbol{y''+\varphi(y)y'^2+f(x)y'+g(x)\psi(y)=0}$.

如果

$$\varphi(y)=\frac{1-\psi'(y)}{\psi(y)},\ F(x)=\int f(x)\,dx,$$

$$g(x)=e^{-2F(x)}\left[\pm\exp\left(2\int e^{-F(x)}dx\right)-\nu^2\right],$$

那么假设

$$\eta(\xi)=\exp\int\frac{dy}{\psi(y)},\quad \xi=\exp\int e^{-F(x)}dx,$$

则得到贝塞耳方程 2.162

$$\xi^2\eta''+\xi\eta'+(\pm\xi^2-\nu^2)\eta=0.$$

R. Müller. *Zeitschrift f angew Math Mech* 19 (1939), p. 46.

6.54. $y''+f(y)y'^2+g(y)y'+h(y)=0$;

第一部分 15.3 节 (a) 中讨论过的那种类型. 假设 $p(y)=y'(x)$,则得到阿贝耳方程(见第一部分 4.11 节)

$$pp'+f(y)p^2+g(y)p+h(y)=0.$$

如果 $g\equiv0$,则此方程化为伯努利方程；当 $h\equiv0$ 时，则得到线性方程. 也可参阅 6.224.

6.54 a. $y''+f(x,y)y'^3=0$.

如果将 y 取作为自变量，则得到对于 $x=x(y)$ 的方程 $x''=f(x,y)$.

6.55. $y''+(y'^2+1)[f(x,y)y'+g(x,y)]=0$.

如果对于给定的 f 和 g，存在这样的函数 $\psi(x,y)$，即使得 $\psi_x=g$, $\psi_y=f$，则给定的方程的解可由方程

$$y'+\operatorname{tg}(\psi+C)=0$$

得到.

6.56. $y''+ay(y'^2+1)^2=0$.

高斯曲率为常数 a 的旋转曲面子午线的方程.

根据第一部分 15.3 节(a),得到

$$x=\int\sqrt{\frac{ay^2+C_1}{1-ay^2-C_1}}dy+C_2.$$

6.57. $y''=a(xy'-y)^{\nu}$；方程 6.59 的特殊情况.

假设 $y=xu(x)$，则得到对于 u' 的伯努利方程，或者(当 $\nu=1$ 时)线性方程

$$xu''+2u'=ax^{2\nu}u'^{\nu}.$$

6.58. $y''=kx^{a}y^{b}y'^{c}$.

如果 $b+c\neq1$，则此方程可以看作为广义齐次方程(第一部分，15.2 节). 假设

$$y=x^{\frac{c-a-2}{b+c-1}}\eta(\xi),\ \xi=\ln x,$$

在这种情况下则得到

$$\eta''+\frac{c-2a-b-3}{b+c-1}\eta'-\frac{a+b+1}{b+c-1}\,\frac{c-a-2}{b+c-1}\eta=$$

$$=k\eta^{b}\left(\eta'+\frac{c-a-2}{b+c-1}\eta\right)^{c},$$

而假设 $\eta'(\xi)=p(\eta)$，则由此得到

$$pp'+\frac{c-2a-b-3}{b+c-1}p-\frac{a+b+1}{b+c-1}\,\frac{c-a-2}{b+c-1}\eta=$$

$$=k\eta^{b}\left(p+\frac{c-a-2}{b+c-1}\eta\right)^{c}.$$

6.59. $y''+\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)^{a}f(x,y)=0$.

这里假设 f 或者只依赖于 x，或者是 x, y 的 -1 次齐次函数，即

$$f(x,y)=\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

经过变换 $y(x)=x\eta(\xi),\ \xi=\ln x$，则化为方程

$$\eta''+e^{\xi}f(e^{\xi},e^{\xi}\eta)\eta'^{a}+\eta'=0. \tag{1}$$

如果 f 只依赖于 x，则方程(1)是对于 $u(\xi)=\eta'$ 的伯努利方程(第一部分 4.5 节). 如果 f 是上述类型的齐次函

数，则方程(1)给出

$$\eta''+\varphi(\eta)\eta'^a+\eta'=0;$$

于是得到对于 $p(\eta)=\eta'(\xi)$ 的一阶线性方程

$$pp'+\varphi(\eta)p^a+p=0$$

A Chiellini, *Bolletino Unione Mat Italiana* 12 (1933), p 14.

6.60. $y''=a\sqrt{y'^2+1}$.

此方程是第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型的方程，即为悬链线方程．对于悬链线来说，$a=\gamma/H$，其中 γ 是单位链长的重量，H 是水平张力．如果悬置点 (ξ_1,η_1) 和 (ξ_2,η_2) $(\xi_1<\xi_2)$，链长 $L>\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2}$，而 γ 给定，则

$$H=\frac{\gamma}{2\rho}(\xi_2-\xi_1),$$

其中 ρ 是由方程

$$\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}=\frac{\sqrt{L^2-(\eta_2-\eta_1)^2}}{\xi_2-\xi_1}$$

单值地确定的解；所求的解具有下列形式：

$$y=\frac{H}{\gamma}\operatorname{ch}\frac{\gamma}{H}(x-C_1)+C_2;$$

C_1 和 C_2 由曲线应当通过点 (ξ_1,η_1) 和 (ξ_2,η_2) 这个条件来确定．

6.61. $y''=a\sqrt{y'^2+1}+b$；悬索桥方程．

$b=0$ 的情况，见 6.60．一般情况：第一，如果假设 $y'(x)=v(x)$，则得到方程 1.59，其中未知函数 y 换为 v；因此，根据 1.59，得到关于 u 的函数 x，而且 $\operatorname{tg}u=y'$；第二，如果在原方程中假设 $\operatorname{tg}u=y'(x)$，并且把 u 看作为 y 的函数，则得到

$$\frac{\sin u}{\cos^2 u(a+b\cos u)}\frac{du}{dy}=1,$$

因而

$$a^2y=C^*+a\frac{1}{\cos u}+b\ln\left|\frac{(a+b)\cos u}{a+b\cos u}\right|.$$

这个等式同 1.59 中导出的 x 的表达式一起，构成所求解的参数表达式，其参数为 u。

Ira Freeman, *Bulletin Americ Math Soc* **31** (1925), p 425—429.

6.62. $y''=a\sqrt{y'^2+by^2}$.

假设 $p(y)=y'(x)$，则得到齐次方程

$$pp'=a\sqrt{p^2+by^2}.$$

6.63. $y''=a(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

假设 $u(x)=y'$，不难得到

$$(y-C_1)^2+(x-C_2)^2=a^{-2}$$

6.64. $y''=2ax(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$；见第一部分 15.3 节(b)。

$$y=C_1+\int\frac{ax^2+C_2}{\sqrt{1-(ax^2+C_2)^2}}dx.$$

6.65. $y''=ay(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

假设 $p(y)=y'(x)$，则得到

$$\frac{pp'}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}=ay;\text{ 因而 }2(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}+ay^2=C.$$

所以剩下的只是解方程

$$y'=\pm\frac{1}{ay^2-C}\sqrt{4-(ay^2-C)^2}.$$

边值问题

$$y''+\lambda y(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}=0;\quad y(-a)=y(+a)=0,$$

$y(x)>0$ 当 $|x|<a$ 时

对于每一个满足不等式

$$\frac{2\gamma^2}{a^2}<\lambda<\frac{\pi^2}{a^2},\ 其中\ \gamma=\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{s}{1-s^2}}ds$$

的 λ，具有一个且仅具有一个解；积分曲线关于 y 轴 是对称分布的，解的最大值 η 满足不等式 $2a\lambda(\pi-\gamma)\eta<\pi^2$.

R. Caccioppoli, *Portugaliae Mathematica* 3(1942), p.79—86.

6.66. $y''=2a(y+bx+c)(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

假设 $u(x)=y+bx+c$，则得到

$$u''[(u-b)^2+1]^{-\frac{3}{2}}=2au.$$

将此方程乘以 u' 并且进行积分，则得到

$$\frac{bu'-(b^2+1)}{\sqrt{(u'-b)^2+1}}=au^2+C,$$

其次，如果将 u 取作自变量，由此则有

$$x'(u)=\frac{b}{b^2+1}\pm\frac{au^2+C}{b^2+1}[(b^2+1)-(au^2+C)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

因此，x 可以借助于椭圆积分通过 u 来表示.

I. Malkin, *Math. Zeitschrift* 101(1929), p.3.

6.67. $y''+y^3y'-yy'\sqrt{4y'+y^4}=0$.

假设 $u^2=4y'+y^4$，如果 $u\neq0$，则由给定的方程得到

$$u'=2yy',\ 即\ u=y^2+C.$$

因此，最后得到解

$$y=C,\quad 3(x+C)y^3=4,$$

$$y=C_1\mathrm{tg}(C_1^3x+C_2),\ y=C_1\mathrm{th}(C_1^3x+C_2).$$

6.68. $y''=f(y',ax+by)$, $b\neq0$.

假设 $u(x)=ax+by(x)$，则得到第一部分 15.3 节 (a) 中讨论过的那种类型的方程

$$u''=f\left(\frac{u'-a}{b},u\right).$$

6.69. $y''=yf\left(x,\ \frac{y'}{y}\right)$.

假设 $y'=u(x)y$, 则得到一阶方程

$$u'=f(x,u)-u^2.$$

6.70. $y''=x^{a-2}f\left(\frac{y}{x^a},\ \frac{xy'}{x^a}\right)$; 广义齐次方程.

假设 $y(x)=x^a\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 则得到第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型的方程

$$\eta''+(2a-1)\eta'+a(a-1)\eta=f(\eta,\eta'+a\eta).$$

6.71. $8y''+9y'^4=0$.

$$(y+C_1)^3=(x+C_2)^2.$$

6.72. $ay''+R(y')+cy=0$;

具有任意阻尼规律 $R(y')$ 的阻尼振动方程.

如果 $a>0$, $b\geqslant 0$, $c>0$ 是一些常数,而

$$R(v)=[b+f(v)]v$$

是在整个直线 $-\infty<v<+\infty$ 上连续的偶函数; 其次, 设 $f(0)=0$, 当 $v\geqslant 0$ 时 $f'(v)$ 存在, 并且是连续的、非负的, 而当 $v>0$ 时 $f'(v)$ 甚至是严格正的. 这时, 对于给定的方程的解, 下述结论成立($v=y'$).

在某一个区间 $X<x<\infty$ 内, 每一个解都存在, 并且在此区间内, 当 x 增大时 av^2+cy^2 单调减少, 其次, 当 $x\to\infty$ 时 $av^2+cy^2\to 0$, 而当 $x\to X$ 时 $av^2+cy^2\to\infty$. 如果 $4ac-b^2\leqslant 0$, 则每一个解的零点不多于一个, 因而不会出现振动.

现在设 $4ac-b^2>0$. 这时, 每一个解都具有无穷多个零点, 每一个解的振幅单调地趋向于零. 此外, 如果

$$\lim_{v\to\infty}f(v)>a+c-b,$$

则每一个解存在最小的零点和第一个极值, 而每两个零

点或每两个极值点之间的距离大于$\sqrt{\frac{a}{c}}$；其次，在这种情况下，存在临界解 $y=\eta(x)$，其振幅 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$同任意一个解的振幅 a_1, a_2, $\cdots$ 之间的关系是 $a_1 \geqslant a_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_2 > \cdots$

[见 6.46 和 6.48 中指出的文献.——俄译本编者注.]

73—103. $f(x)y''=F(x, y, y')$

6.73. $\boldsymbol{xy''+2y'-xy^n=0}$.

此方程是埃姆登方程6.74的另一种形式. 可将 6.74 中指出的变换用于此方程，这时例如得到方程

$$u''=x^{1-n}u^n$$

这个方程同方程6.74(3)相类似. 关于这个方程见6.100和6.102.

如果$n=2$，则 $y=2x^{-2}$是一个解，并且经过变换

$$y(x)=x^{-2}\eta(\xi), \xi=\ln x$$

则化为方程

$$\eta''-3\eta'-2\eta=\eta^2,$$

而假设 $\eta'(\xi)=p(\eta)$，由此得到

$$p'(\eta)=3+\frac{\eta(\eta-2)}{p}.$$

最后一个方程的数值解可在下文中找到：D. R. Hartree, *Memoires Manchester* 81(1937), p.1—9，其中包括这样一些解：当$x\to\infty$时 $y\sim 2x^{-2}$.

6.74. $\boldsymbol{xy''+2y'+ax^{\nu}y^n=0}$, $a>0$；埃姆登方程.

[文献：Bellman, 第Ⅶ章；Sansone, 第Ⅻ章§5. 在这些书中有关于埃姆登方程理论的详细阐述，并指出了原始出处. ——俄译

本编者注.]

也可参阅 6.76.

$a=-1$ 的情况，见 6.73. 这里我们假设 $a>0$.

当 $n=1$ 时，得到 2.162(1)型的方程. 当 $n\neq1$ 时，经过变换 $y=a^{\frac{1}{n-1}}\bar{y}$，则化为方程

$$xy''+2y'+x^{\nu}y^{n}=0, \tag{1}$$

其中我们将 $\bar{y}$ 仍然写为 y. 当 $\nu=1$ 时，则得到多方气球的埃姆登方程. 方程(1)的特解为：

$$y=cx^{-\mu},\quad 其中\ \mu=\frac{\nu+1}{n-1},\ c^{n-1}=\mu(1-\mu).$$

假设 $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\frac{1}{x}$，则由(1)得到方程

$$\eta''+\xi^{-\nu-3}\eta^{n}=0, \tag{2}$$

而假设 $u(x)=xy$，则得到方程

$$u''+x^{\nu-n}u^{n}=0; \tag{3}$$

经过变换 $\eta(\xi)=\xi^{\mu}v(t)$, $t=\ln\xi$, 则将方程 (2) 化为下列形式：

$$v''+(2\mu-1)v'+\mu(\mu-1)v+v^{n}=0, \tag{4}$$

假设 $v'(t)=p(v)$，由此得到

$$pp'+(2\mu-1)p+\mu(\mu-1)v+v^{n}=0. \tag{5}$$

这些方程的解只是在某些特殊情况下才能表示为有限形式(见后面).

关于方程 (1)，可以证明下述结论：如果 $n\geqslant0$, $\nu>-1$，则对于每一个 $C>0$，有一个且仅有一个当 $x>0$ 时存在的解 $y(x)$，当 $x\to+0$ 时 $y(x)\to0$；这个解在区间

$$0<x<[C^{1-n}\nu(\nu+1)]^{\frac{1}{\nu+1}}$$

上为正，其导数满足初始条件

$$x^{2}y'\to0\quad 当\ x\to0\ 时;$$

如果注意到对于 y 和 y'的这些初始条件，则可用逐次逼近法求出 y. 其次，如果 $2\nu-n+3>0$，则方程 $y(x)=0$ 至少具有一个正根；如果 $2\nu-n+3\leqslant 0$，则对于所有 $x>0$, $y>0$，而当 $x\to+\infty$时，$y\to 0$.

现在设 $\nu=1$(埃姆登方程)．当 $n=0$ 时，方程 (1) 的通解是

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{6},$$

而当 $n=1$ 时，则是

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

对于 $p=p(v)$的方程(5)，在这种情况下可以写为下列形式：

$$pp'-\frac{n-5}{n-1}p-\frac{2(n-3)}{(n-1)^2}v+v^n=0, \tag{5 a}$$

因而，特别有

$$pp'+p+v^3=0 \quad \text{当 } n=3 \text{ 时}, \tag{6}$$

$$pp'=\frac{1}{4}v-v^5 \quad \text{当 } n=5 \text{ 时}. \tag{7}$$

最后这个方程具有通解

$$v'^2(t)=p^2=\frac{v^2}{4}-\frac{v^6}{6}+C_1,$$

而如果假设 $C_1=0$，则当 $n=5$ 时，方程(1)具有解

$$y^2=\frac{3C}{x^2+3C^2}.$$

如果 $y(x)$是方程(1) 的某一个解，则 $C^{\frac{2}{n-1}}y$ 也是解．所以，如果满足条件 $y(0)=0$ 和 $y(0)=1$ 的解已知，则可以得到通过 y 轴的积分曲线．

6.75. $xy''+2y'+xe^y=0$；见6.76和6.172.

6.76. $xy''+ay'+bxe^y=0.$

文献：R Emden, Gaskugeln, Leipzig und Berlin. 1907；H. Lemke, *Journ. f. Math* 142(1913), p. 118—137。也可参阅6.74.

规定用编号(1)来表示原方程.如果 $b(a-1)>0$，则

$$y=\ln\frac{2a-2}{bx^2} \tag{2}$$

是一个解. 经过变换 $y(x)=\bar{y}(\bar{x})$, $\bar{x}=x\sqrt{b}$, 则将方程(1)化为同样形式的方程.其中 $b=\pm1$,而经过变换 $y=\eta(\xi)-2\xi$, $\xi=\ln x$, 则化为方程

$$\eta''+(a-1)\eta'+be^\eta=2a-2; \tag{3}$$

假设 $\eta'(\xi)=p(\eta)$, 则得到

$$pp'+(a-1)p+be^\eta=2a-2. \tag{4}$$

方程(1)也同方程6.77有关系. 假设

$$u(t)=xy'(x),\ t=x^2e^y,$$

则由(1)得到方程1.237

$$t(u+2)u'+(a-1)u+bt=0. \tag{5}$$

当 $b(a-1)>0$ 时，经过变换

$$y=r(s)+\ln\frac{2a-2}{bx^2},\quad s=x^{1-a}$$

则将方程(1)化为下列形式：

$$(a-1)s^2r''+2(e^r-1)=0. \tag{6}$$

(a) $a=0$. 可以得到

$$y'=\pm\beta\sqrt{C_1\mp e^y},\qquad 其中\ \beta=\sqrt{2|b|},$$

根号前应当取正号还是取负，取决于 $b>0$ 还是 $b<0$. 其次，可以得到：

当 $C_1=c^2>0$ 时：

$$c^2e^{-y}=\begin{cases}\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}c\beta(x-C_2) & \text{当 } b>0 \text{ 时},\\ \operatorname{sh}^2\frac{1}{2}c\beta(x-C_2) & \text{当 } b<0 \text{ 时};\end{cases}$$

当 $C_1=-c^2<0$ 时：

$$c^2e^{-y}=\sin^2\frac{1}{2}c\beta(x-C_2);$$

当 $C_1=0$ 时：

$$e^{-y}=-\frac{1}{2}b(x-C_2)^2.$$

当 $b<0$ 时，可能出现后面两种情况.

(b) $a=1$. 这时，由(5)得到

$$u^2+4u+2bt+4C=0;$$

因而，如果考虑到(1)，则得到对于 y' 的黎卡提方程

$$2x^2y''=x^2y'^2+2xy'+4C;$$

经过变换

$$y'=-2\frac{v'}{v},$$

则将此方程化为欧拉方程(第一部分 22.3 节)

$$x^2v''-xv'+Cv=0.$$

(c) $a=2$. 由(2)得到一个解. 在这种情况下，方程(1)的一般形式显然不能用初等函数求解. 方程(4)的积分曲线以螺线的形式同点 $\eta=\ln 2, p=0$ 相连接；曲线图形见已指出的埃姆登的著作.

(d) $a\neq 0$ 并且 $\neq 1$. 对于这种情况，莱姆基(Lemke)利用级数展开研究了解在点 $x=0$ 附近的形状.

6.77. $xy''+ay'+bx^{5-2a}e^y=0$.

假设 $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x^{3-a}$ $(a\neq 3)$，则得到方程 6.76

$$\xi\eta'' + \frac{2}{3-a}\eta' + \frac{b}{(3-a)^2}\xi e^{\eta} = 0.$$

6.78. $xy'' + (y-1)y' = 0.$

假设 $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \ln|x|$，则得到

$$\eta'' - 2\eta' + \eta\eta' = 0.$$

所以，给定的二阶方程可以化为一阶方程

$$2\eta' = 4\eta - \eta^2 + C,$$

此方程可以根据第一部分 4.1 节的方法来求解。

6.79. $xy'' - x^2y'^2 + 2y' + y^2 = 0.$

广义齐次方程．根据第一部分 15.2 节，可得到解：

$y = 0$ 和

$$x = \exp\left\{\int (C_1 e^{\eta} + 2\eta + 1)^{-1} d\eta + C_2\right\},\quad \eta = xy.$$

6.80. $xy'' + a(xy' - y)^2 = b.$

假设 $y = xu(x)$，则得到对于 u' 的黎卡提方程

$$x^2u'' + ax^4u'^2 + 2xu' = b,$$

假设 $ax^2u' = \frac{v'}{v}$，由此得到线性方程

$$v'' = abv.$$

6.81. $2xy'' + y'^3 + y' = 0.$

$$(y + C_1)^2 = 2C_2x - C_2^2.$$

6.82. $x^2y'' = a(y^n - y).$

假设 $y(x) = x^{\frac{1}{2}(1-k)}\eta(\xi),\ \xi = x^k,\ k = \sqrt{1-4a}$，则得到方程 6.11

$$\eta'' = \frac{a}{1-4a}\xi^{\frac{n-1}{2k} - \frac{n+3}{2}}\eta^n.$$

6.83. $x^2y'' + a(e^y - 1) = 0$；见 6.76(6)．

6.84. $x^2y'' - (2a + b - 1)xy' + [\lambda^2 b^2 x^{2b} + a(a+b)]y = 0,$

$\lambda\neq 0, b\neq 0.$

$$y=x^{a}(C_1\cos\lambda x^{b}+C_2\sin\lambda x^{b}).$$

6.85. $\boldsymbol{x^2y''+(a+1)xy'=x^af(x^ay, xy'+ay)}.$

假设 $y=x^{-a}\eta(\xi),\ \xi=\dfrac{x^a}{a}$，则得第一部分 15.3 节(a)中讨论过的方程

$$\eta''=f(\eta,\eta').$$

6.86. $\boldsymbol{x^2y''+a(xy'-y)^2=bx^2}.$

假设 $y=xu(x)$，则得到

$$xu''+ax^2u'^2+2u'=b.$$

此方程是对于 u' 的黎卡提方程。假设 $axu'=\dfrac{v'}{v}$，由此得到方程 2.162(1)

$$x^2v''+xv'-abx^2v=0.$$

6.87. $\boldsymbol{x^2y''+ayy'^2+bx=0}.$

假设 $y(x)=x\eta(\xi),\ \xi=\ln x$，则得到第一部分 15.3 节(a)中讨论过的方程

$$\eta''+a\eta(\eta'+\eta)^2+\eta'+b=0.$$

6.88. $\boldsymbol{x^2y''=\sqrt{ax^2y'^2+by^2}}.$

第一部分 15.2 节中讨论过的那种类型的广义齐次方程．假设 $y(x)=x\eta(\xi),\ \xi=\ln x$，则得到第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型的方程

$$\eta''+\eta'=\pm\sqrt{a(\eta'+\eta)^2+b\eta^2},$$

经过变换 $p(\eta)=\eta'(\xi)$，此方程则化为齐次方程

$$p(p'+1)=\pm\sqrt{a(p+\eta)^2+b\eta^2}.$$

6.89. $\boldsymbol{(x^2+1)y''+y'^2+1=0}.$

假设 $p(x)=y'$，则可求得

$$y=C_1+C_2x+(C_2^2+1)\ln|x-C_2| \quad 和 \quad y=-\frac{1}{2}x^2+C.$$

6.90. $4x^2y''-x^4y'^2+4y=0$.

第一部分 15.2 节中讨论过的那种类型的广义齐次方程. 假设 $y(x)=x^{-2}\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 则得到方程

$$4\eta''-\eta'^2+4\eta\eta'-20\eta'+4\eta(7-\eta)=0,$$

根据第一部分 15.3 节(a), 此方程可以化为一阶方程.

6.91. $9x^2y''+ay^3+2y=0$.

假设 $y=x^{\frac{1}{3}}\eta(\xi)$, $\xi=x^{\frac{1}{3}}$, 则得到方程

$$\eta''+a\eta^3=0,$$

根据第一部分 23.1 节中叙述的方法, 此方程可以化为能用椭圆函数求解的一阶方程.

6.92. $x^3(y''+yy'-y^3)+12xy+24=0$;

方程 6.34(b) 的特殊情况.

$$y=\frac{x^3u'+2}{x(x^2u-1)},$$

其中 u 是方程 $u''=6u^2$ 的任意解.

6.93. $x^3y''=a(xy'-y)^2$.

第一部分 15.2 节中讨论过的那种类型的广义齐次方程. 假设 $y(x)=x\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 则得到不难求解的方程, 由此方程求得

$$y=\frac{x}{a}\ln\frac{x}{C_1x+C_2}.$$

6.94. $2x^3y''+(2x^3y+9x^2)y'-$
$$-2x^3y^3+3x^2y^2+axy+b=0.$$

(a) 假设 $y(x)=\xi'(x)\eta(\xi)$, $\xi=-\frac{2}{\sqrt{|x|}}$, 则得到

$$\xi^3(\eta''+\eta\eta'-\eta^3)+(2a-12)\xi\eta-4b=0.$$

(b) 当 $a=12$, $b=-6$ 时, 存在解

$$y=\frac{u'-1}{u-x}, \tag{1}$$

其中 u 是方程

$$x^3u'^2=u^3+C \quad (C\text{ 任意})$$

的任意解．不难验证，公式(1)的确给出了解；在解(1)中可以找出满足在任何点 $x\neq 0$ 上对于 y 和 y' 的任意初始条件的解，由此得知，公式(1)给出所有的解．

6.95． $\mathbf{2(4x^3-x^k)(y''+yy'-y^3)+}$
$\mathbf{+(12x^2-kx^{k-1})(3y'+y^2)+axy+b=0.}$

(a) 假设 $y(x)=\xi'(x)\eta(\xi)$, $\xi'=(4x^3-x^k)^{-\frac{1}{2}}$, 则得到

$$2(\eta''+\eta\eta'-\eta^3)+$$
$$+[(a-24)x+k(k-1)x^{k-2}]\eta+b\sqrt{4x^3-x^k}=0,$$

其中 x 仍然需要通过 ξ 来表示；当 $k=0,1,2$ 时，可以借助于椭圆函数做到这一点．

(b)如果 $k=1$, $a=48$, $b=-24$，则给定的方程具有解：

$$y=\frac{u'-1}{u'-x}, \tag{1}$$

其中 $u(x)$ 是方程

$$(4x^3-x)u'^2=4u^3-u+C \quad (C\text{ 任意})$$

的任意解；因而，这个解可以通过椭圆函数来表示．不难验证，表达式(1)的确是解；在形如(1)的解中，可以找出满足对于 y 和 y' 在任何 x 点上的初始条件的解，由此可知，公式(1)给出所有的解．

6.96． $\mathbf{x^4y''+a^2y^\nu=0.}$

当 $\nu=1$ 时，得到2.14型的方程．如果 $\nu\neq 1$，则

$$y=\left(\frac{2(\nu-3)x^2}{a^2(\nu-1)^2}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$$

是一个解。见6.74和6.76.

6.97. $x^4y''-(2xy+x^3)y'+4y^2=0$.

广义齐次方程. 利用变换 $y(x)=x^2\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, 然后假设 $\eta'(\xi)=u(\eta)$, 则得到

$$u'=2(\eta-1) \quad 和 \quad u=0,$$

因而

$$\eta'=(\eta-1)^2+C \quad 和 \quad \eta=C,$$

由此得到

$$\eta-1=\begin{cases} C_1\operatorname{tg}(C_1\xi+C_2) & 当\ C=C_1^2\ 时, \\ -C_1\operatorname{th}(C_1\xi+C_2),\ -C_1\operatorname{cth}(C_1\xi+C_2) & 当\ C=-C_1^2\ 时; \end{cases}$$

此外还有 $(\xi+C)(1-\eta)=1$ 和 $\eta=C$.

6.98. $x^4y''-x^2y'^2-x^3y'+4y^2=0$.

广义齐次方程. 利用第一部分15.2节中的方法,则得到 $y=0$,以及

$$x=\exp\left\{\int(C_1e^{\eta}-4\eta-2)^{-1}d\eta+C_2\right\},\quad y=x^2\eta.$$

6.99. $x^4y''+(xy'-y)^3=0$.

假设 $y(x)=x\eta(\xi)$, $\xi=\dfrac{1}{x}$ 或者 $u(x)=xy'-y$, 则得到不难求解的方程,由此方程求得

$$y=C_1x+x\arcsin\frac{C_2}{x}.$$

6.100. $y''\sqrt{x}=y^{\frac{3}{2}}$; 托马斯-费米方程

[关于此方程解的存在和唯一性定理,见 Sansone, 第XII章,§7. 那里还指出了原始文献.——俄译本编者注.]

一个解是:

$$y=144x^{-3}.$$

但是,在托马斯-费米的理论中要求找出这样的解,即

$$y(0)=1, \quad \text{当}x\to\infty\text{时 } y(x)\to 0;$$

由卡拉西奥多里定理（第一部分，5.3 节）和马莫布里安尼(Mambriani) 的结果(第二部分，10.2 节(a))，可以得知，这种解存在．对于这个解，在点 $x=0$ 附近有

$$x=1-1.58\,x+\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

而对于大的 x, 则有

$$y\approx(1+z)^{-3.886}, \text{其中 } z=\left(\frac{x}{\sqrt[3]{144}}\right)^{0.772}.$$

这个解已被制成表 (V. Bush, S. H. Caldwell, *Physical Review*(2),38(1931),p.1898—1901).

如果在所讨论的方程的右端存在负号，则得到埃姆登方程 6.74 (2)和(3) 中所包含的方程．那里指出的变换也可用于托马斯-费米方程．这个方程是广义齐次方程，而经过变换

$$y=x^{-3}\eta(\xi), \quad \xi=\ln x,$$

则化为方程

$$\eta''-7\,\eta'+12\,\eta-\eta^{\frac{3}{2}}=0. \tag{1}$$

假设 $p(\eta)=\eta'(\xi)$, 由此方程得到

$$pp'-7\,p+12\,\eta-\eta^{\frac{3}{2}}=0. \tag{2}$$

经过变换 $y=x^{-3}\xi$, $x=\exp\int\eta(\xi)\,d\xi$, 则化为阿贝耳方程

$$\eta'+7\,\eta^2+(\sqrt{\xi}-12)\xi\eta^3=0.$$

6.101. $(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}y''=f\left(\dfrac{y}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}\right).$

假设 $u(x)=(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}\,y(x)$，则得到可分离变量的方程

$$(ax^2+bx+c)^2u'^2=\left(\frac{1}{4}b^2-ac\right)u^2+2\int f(u)\,du.$$

6.102. $x^{\frac{n}{n+1}}y''=y^{\frac{2n+1}{n+1}}$.

当 $n=1$ 时，得到托马斯-费米方程6.100；也可参阅6.73和6.74. 一个解是：

$$y=\varphi(x)=\left[2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^{1+\frac{1}{n}}x^{-1-\frac{2}{n}}. \qquad (1)$$

但是，这个解不满足托马斯-费米问题的边界条件

$y(0)=y_0\neq 0$, 当 $x\to\infty$ 时 $y(x)\to 0$.

由第二部分10.2节可知，满足这些条件的解是存在的.

经过变换

$$\eta(\xi)=\frac{y(x)}{\varphi(x)},\ \xi=\ln x,$$

则化为方程

$$\eta''-\frac{3n+4}{n}\eta'-\frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}\eta\left(\eta^{\frac{n}{n+1}}-1\right)=0. \qquad (2)$$

将 η 取作自变量，并且假设 $u(\eta)=\eta'(\xi)$, 由此得到

$$uu'=\frac{3n+4}{n}u+\frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}\eta\left(\eta^{\frac{n}{n+1}}-1\right). \qquad (3)$$

最后，利用变换

$$u(\eta)=\frac{n+2}{n}\eta\left[1-t^{n(n+1)}v(t)\right],\quad \eta=t^{(n+1)(n+2)},$$

则得到方程

$$v'(t)=-2(n+1)^2\frac{t^{n(n+1)-1}v^2-t^{n-1}}{t^{n(n+1)}v-1}. \qquad (4)$$

G Lampariello, *Atti Accad. Lincei* (6), 19 (1934), p 284—

290,386—393.

6.103. $f^2y''+ff'y'=\Phi(y,fy'),f=f(x)$.

假设 $y(x)=\eta(\xi),\xi=\int\frac{dx}{f(x)}$，则得到第一部分15.3节(a)那种类型的方程

$$\eta''=\Phi(\eta,\eta').$$

104—187. $f(x)yy''=F(x,y,y')$

6.104. $yy''=a$；见第一部分23.1节.

$$x=\int(2a\ln y+C_1)^{-\frac{1}{2}}dy+C_2.$$

6.105. $yy''=ax,a\neq0$.

当求满足初始条件 $y(0)=c_0,y'(0)=c_1$ 的解时，可能有下列情况：

$$c_0=c_1=0:\qquad y=\pm\sqrt{\frac{4a}{3}x^3};$$

$$c_0=0,c_1\neq0:\ y=c_1x+c_2x^2+\cdots;$$

当 $|x|<\frac{c_1^2}{|a|}$时，这个级数显然收敛；它的前面一些系数是：

$$c_2=\frac{a}{2c_1},\ c_3=-\frac{c_2^2}{3c_1},\ c_4=\frac{2c_2^3}{9c_1^2},\ c_5=-\frac{17c_2^4}{90c_1^3};$$

$c_0\neq0$：根据一般定理（见第一部分6.3节），在点 $x=0$ 的邻域上，解可以表示为收敛的幂级数。

6.106. $yy''=ax^2,a\neq0$.

如果 $y(x)$ 表示满足初始条件 $y(0)=c_0$，$y'(0)=c_1$ 的解，则可能有下述情况：

$c_0=c_1=0$:　　$y=\pm x^2\sqrt{\frac{a}{2}}$;

$c_0=0,\ c_1\neq 0$: $y=c_1x(1+b_1x^2-b_2x^4+b_3x^6-\cdots)$;

当 $|x|<\sqrt{\frac{3c_1^2}{|a|}}$时，这个级数显然收敛；它的前面一些系数是：

$$b_1=\frac{a}{6c_1^2},\ b_2=\frac{3}{10}b_1^2,\ b_3=\frac{13}{70}b_1^3,\ b_4=\frac{25}{168}b_1^4;$$

如果 $a>0,\ c_1>0,\ x>0$，则 y 为正，并且同 x 一起单调增加，而当 $x\to\infty$ 时，则有

$$\frac{y'}{2x}\to\sqrt{\frac{1}{2}a},\quad y''\to\sqrt{2a};$$

$c_0\neq 0$：根据一般定理，在点 $x=0$ 的邻域内，可以把解表示为收敛的幂级数。

F. Mertens. *Akad Wien* 126(1917), p.3—7; W. Wirtinger, 同上, 128(1919), p 3—8.

6.107. $yy''+y'^2-a=0$.

$$y^2=ax^2+C_1x+C_2\quad 和\quad y=\pm x\sqrt{a}+C.$$

6.108. $yy''+y^2=ax+b$.

关于图解法，见 J. J. Muller, *Revue Électricité* 42 (1937), p. 389—406, 419—434.

6.109. $yy''+y'^2-y'=0$；见第一部分 15.3 节(a)。

$$y=C\quad 和\quad x=y+C_1\ln|y-C_1|+C_2.$$

6.110. $yy''-y'^2+1=0$;

6.165 型，也可参阅第一部分 15.3 节(a)。

$C_1y=\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$; $C_1y=\sin(C_1x+C_2)$ 和 $y=\pm x+C$.

6.111. $yy''-y'^2-1=0$:

6.165 型，也可参阅第一部分 15.3 节(a)。

$C_1y=\mathrm{ch}(C_1x+C_2)$，悬链线。

6.112. $yy''-y'^2+e^{2x}(ay^4+b)+e^xy(cy^2+d)=0$.

假设 $\eta(\xi)=y(x)$，$\xi=e^x$，则得到方程 6.171

$\xi(\eta\eta''-\eta'^2)+\eta\eta'+\xi(a\eta^4+b)+c\eta^3+d\eta=0$.

6.113. $yy''-y'^2-y^2\ln y=0$.

假设 $u(x)=\ln y$，则不难得到

$$\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

6.114. $yy''-y'^2-y'+fy^3+y^2\frac{d}{dx}\frac{f'}{f}=0$, $f=f(x)$.

其解可由一阶方程

$$\left(y'+\frac{f'}{f}y+1\right)^2+2y^2\left(yf+\int f dx\right)=0$$

得到。

Ince, p 335.

6.115. $yy''-y'^2+f(x)y'-y^3-f'(x)y=0$.

其解可由一阶方程

$$(y'-f)^2=2y^2\left(y-\int f dx+C\right)$$

得到。

P Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p 24, 方程(3).

6.116. $yy''-y'^2+f'y'-y^4+fy^3-f''y=0$; $f=f(x)$.

其解可由一阶方程

$$(y'-f')^2-y^2(y-f)^2=Cy^2$$

得到。

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), p. 24, 方程(2); Ince, p. 335.

6.117. $yy''-y'^2+ayy'+by^2=0$.

假设 $y'=yu(x)$，则得到线性方程

$$u'+au+b=0.$$

P. Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 55, 方程(15).

6.118. $yy''-y'^2+ayy'+by^3-2ay^2=0$; 见 6.172(2).

6.119. $yy''-y'^2-(ay-1)y'-2b^2y^3+2a^2y^2+ay=0$.

当 $a\neq 0$ 时,

$$y=-\frac{1}{2a}+e^{2ax}(u^2+C),$$

其中 $u'=be^{-ax}\left[(u^2+C)e^{2ax}-\frac{1}{2a}\right]$;

当 $a=0$, $b\neq 0$ 时.

$$y=-x+u^2+C, \quad 其中\ u'=b(u^2+C-x).$$

P. Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 54, 方程(12).

6.120. $yy''-y'^2+a(y-1)y'-y(y+1)(b^2y^2-a^2)=0$.

$$y=-1+Ce^{-ax}\frac{1+u^2}{1-u^2},$$

其中 $\frac{2}{b}u'=Ce^{-ax}(u^2+1)+u^2-1$.

P. Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 54, 方程(11).

6.121. $yy''-y'^2+(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)yy'+$
$+(\cos^2x-\nu^2\operatorname{ctg}^2x)y^2\ln y=0$.

$y=\exp[Z_\nu(\sin x)]$, Z_ν 为柱函数.

R. Müller, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 19(1939), p. 46.

6.122. $yy''-y'^2+f(x)yy'+g(x)y^2=0$.

假设 $y'=yu(x)$, 则得到线性方程

$$u'+fu+g=0.$$

P. Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p. 38, 方程(6).

6.123. $yy''-y'^2+(fy^2+g)y'+f'y^3-g'y=0$,

$$f=f(x),\ g=g(x).$$

其解为黎卡提方程

$$y'+fy^2+Cy-g=0$$

的解.

P. Painlevé, *Acta Math* 25 (1902), 方程 (1); Ince, p. 335.

6.124. $\boldsymbol{yy''-3y'^2+3yy'-y^2=0}$.

第一部分 15.2 节讨论过的那种类型的广义齐次方程。假设 $y'=yu(x)$, 则得到黎卡提方程 $u'=2u^2-3u+1$, 其通解为 $(1-2Ce^x)u=1-Ce^x$, 由此最后求得

$$(2e^x-C_1)y^2=C_2e^{2x}.$$

6.125. $\boldsymbol{yy''=ay'^2}$.

除以 yy', 则得到全微分方程. 进行积分, 得到 $y'=C|y|^a$, 由此

$$y=\begin{cases}|C_1x+C_0|^{\frac{1}{1-a}} & 当\ a\neq1,\\ C_1e^{Cx} & 当\ a=1.\end{cases}$$

6.126. $\boldsymbol{yy''+a(y'^2+1)=0}$; 见 6.165 和 6.54.

$$x=\int(C_1y^{-2a}-1)^{-\frac{1}{2}}dy+C_2$$

当 $a=1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ 时, 分别得到半圆, 悬链线, 摆线和抛物线.

6.127. $\boldsymbol{yy''+ay'^2+by^3=0}$; 见 6.165 和 6.54.

假设 $p(y)=y'(x)$, 则得到

$$ypp'+ap^2+by^3=0;$$

经过变换

$$p(y)=y^{\frac{3}{2}}u(t),\ t=\ln y,$$

可将此方程化为伯努利方程

$$uu'+\left(a+\frac{3}{2}\right)u^2+b=0.$$

由此得到

$$t = -\int \frac{u\,du}{\left(a+\frac{3}{2}\right)u^2+b} + C =$$

$$= -\frac{1}{2a+3}\ln\left[\left(a+\frac{3}{2}\right)u^2+b\right]+C,$$

因而

$$y'^2 = y^3\left(Cy^{-2a-3} - \frac{2b}{2a+3}\right).$$

经过变换 $y'(x)=u(y)$之后，也可得到伯努利型方程：

$$yu' - au - by^3u^3 = 0.$$

6.128. $\boldsymbol{yy'' + ay'^2 + byy' + cy^2 + dy^{1-a} = 0.}$

假设

$$y = \begin{cases} e^u & 当\ a=-1\ 时, \\ u^{\frac{1}{a+1}} & 当\ a\neq -1\ 时, \end{cases}$$

则得到对于 $u(x)$的常系数方程

$$u'' + bu' + c + d = 0,$$

因而

$$u'' + bu' + (a+1)cu = -(a+1)d.$$

6.129. $\boldsymbol{yy'' + ay'^2 + f(x)yy' + g(x)y^2 = 0.}$

假设 $y = u^{\frac{1}{a+1}}$，则得到线性方程

$$u'' + fu' + (a+1)gu = 0.$$

6.130. $\boldsymbol{yy'' + ay'^2 + by^2y' + cy^4 = 0}$；见 6.54 和 6.165.

假设 $p(y)=y'(x)$, 则得到

$$ypp' + ap^2 + by^2p + cy^4 = 0;$$

其次，经过变换 $p(y)=y^2u(t)$, $t=\ln y$, 则化为不难求解的方程

$$uu' + (a+2)u^2 + bu + c = 0;$$

其解为：

$$t=-\int\frac{udu}{(a+2)u^2+bu+c}+C_1.$$

算出这个积分，并且由所得方程解出 u 之后，仍然要解方程

$$y'(x)=y^2u(\ln y),$$

由此得到

$$x=\int\frac{dy}{y^2u(\ln y)}+C_2.$$

6.131. $yy''-\frac{a-1}{a}y'^2-fy^2y'+\frac{a}{(a+2)^2}f^2y^4-$

$$-\frac{a}{a+2}f'y^3=0,\ f=f(x).$$

假设

$$u(x)=y\exp\left(-\frac{a}{a+2}\int yf\,dx\right),$$

则得到

$$auu''-(a-1)u'^2=0.$$

借助于变换 $u'=uv(x)$，由此得到 $u=C|x+C^*|^a$；因而，由于按照 u 的定义，函数 $w(x)=\frac{1}{y}$满足线性方程

$$w'+\frac{u'}{u}w+\frac{a}{a+2}f=0,$$

所以有

$$y=-\frac{(a+2)|x+C_1|^a}{a\int|x+C_1|^af(x)dx+C_2}.$$

Ince, p. 338.

6.132. $yy''-(y'^2+1)-2ay(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}=0.$

平均曲率为常数 a 的旋转曲面子午线的微分方程。

当 $a=0$ 时，得到悬链线 $C_1 y=\operatorname{ch}(C_1 x+C_2)$。

当 $a=\pm 1$ 时，得到椭圆积分

$$x=\int \frac{y^2+C_1}{\sqrt{y^2-(y^2+C_1)^2}} dy+C_2.$$

积分曲线是由沿某一条直线滚动的二次曲线的焦点的轨迹。

6.133. $(y+x)y''+y'^2-y'=0$；

全微分方程

$$(y+x)y'-2y=C.$$

6.134. $(y-x)y''-2y'(y'+1)=0$；方程6.136的特殊情况。

$$y=C,\ y=C-x,\ y=C_1+\frac{C_2}{x-C_1}.$$

6.135. $(y-x)y''+(y'+1)(y'^2+1)=0$；

方程 6.136 的特殊情况。

可以得到 $y+x=C_1$，以及由方程 1.502

$$(y-x)^2(y'^2+1)-C_2^2(y'+1)^2=0,$$

求出的另一些解，即

$$(x-C_3)^2+(y-C_3)^2=C_2^2.$$

6.136. $(y-x)y''+f(y')=0$.

其解为：$y=ax+C_1$，其中 a 是方程 $f(a)=0$ 的根。其他的解可由方程

$$(y-x)\varphi(y')=C_2,\ \text{其中}\ \varphi(u)=\exp\left(\int\frac{u-1}{f(u)}\,du\right)$$

求得。

6.137. $2yy''+y'^2+1=0$；方程 6.165 和 6.54 的特殊情况。

$$C_1 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}-\sqrt{y(C_1-y)}=x+C_2$$

或参数形式（摆线方程）

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,\quad y=C_1(1-\cos t).$$

6.138. $2yy''-y'^2+a=0$;

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况。

其解可由方程

$$y'^2-a=Cy$$

得到。

6.139. $2yy''-y'^2+f(x)y^2+a=0,\ a>0$.

方程 6.165 的特殊情况. 如果 u, v 是线性方程

$$4y''+f(x)y=0$$

满足条件 $(uv'-u'v)^2=a$ 的两个解，则 $y=uv$ 是原方程的解。

6.140. $2yy''-y'^2-8y^3=0$;

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况。

其解可由方程

$$y'^2=4y^3+Cy$$

得到，此方程可用椭圆函数求解. 见 6.146。

6.141. $2yy''-y'^2-8y^3-4y^2=0$;

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况。

其解可由方程

$$y'^2=4y^3+4y^2+Cy$$

得到，此方程可用椭圆函数求解. 见 6.146。

6.142. $2yy''-y'^2-8y^3-4xy^2=0$.

假设 $y=\pm u^2$，则分别得到方程 6.9 和 6.6:

$$u''\mp 2u^3-xu=0.$$

6.143. $2yy''-y'^2+ay^3+by^2=0$;

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况.

假设 $y=u^2$, 则得到

$$4u'' + au^3 + bu = 0,$$

假设 $p(u) = u'(x)$, 由此得到

$$2(p^2)' + au^3 + bu = 0.$$

6.144. $\boldsymbol{2yy'' - y'^2 + ay^3 + 2xy^2 + 1 = 0},\ a \neq 0.$

如果 $y(x) \neq 0$ 是此方程的解，则由等式

$$y' = 2uy - 1$$

来确定 $u(x)$. 这时，由给定的方程得到

$$ay = -4u' - 4u^2 - 2x \tag{1}$$

和

$$u'' - 2u^3 - xu - \frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 0. \tag{2}$$

反之，如果 u 是方程(2)的解，则由(1)可以得到原方程的解. 因此，原方程可化为方程(2)，即化为 6.6 型的方程.

Ince, p. 340.

6.145. $\boldsymbol{2yy'' - y'^2 + ay^3 + bxy^2 = 0}.$

假设 $y = u^2$, 则得到方程 6.9

$$4u'' + au^3 + bxu = 0.$$

6.146. $\boldsymbol{2yy'' - y'^2 - 3y^4 = 0}$;

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况.

其解可由方程

$$y'^2 = y^4 + Cy$$

得到，此方程可由椭圆函数求解.

Ince, p. 339.

6.147. $\boldsymbol{2yy'' - y'^2 - 3y^4 - 8xy^3 - 4(x^2 + a)y^2 + b = 0}.$

在一般形式下，此方程不能用初等函数求解；其解是所谓的潘勒韦超越函数(见 6.3).

B Gambier, *Acta Math.* **33** (1910), p. 31, 方程(3); Ince, p. 345 以及以后.

6.148. $2yy''-y'^2+3fyy'-8y^3+2(f'+f^2)y^2=0,$

$$f=f(x).$$

此方程可以化为一阶方程

$$(y'+fy)^2=4y\left\{y^2+C\exp\left(-2\int f dx\right)\right\}.$$

P Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p. 35, 方程(3).

6.149. $2yy''-y'^2+4y^2y'+y^4+f(x)y^2+1=0.$

假设 $y=\frac{u'}{u}$,则得到

$$2u'u'''-u''^2+fu'^2+u^2=0,$$

进行微分,则化为线性方程

$$u^{(4)}+fu''+\frac{1}{2}f'u'+u=0.$$

Ince, p 338 以及以后.

6.150. $2yy''-3y'^2=0$; 方程 6.224 的特殊情况.

将此方程除以 yy',则可进行积分:

$$y=C_1(x+C_2)^{-2} \text{ 和 } y=C.$$

6.151. $2yy''-3y'^2-4y^2=0$; 6.224 型.

将 y 取作自变量,则得到对于 $p(y)=y'(x)$ 的齐次方程

$$2ypp'-3p^2-4y^2=0,$$

由此得到

$$y\cos^2(x+C_1)=C_2.$$

6.152. $2yy''-3y'^2+f(x)y^2=0.$

假设 $u(x)=|y|^{-\frac{1}{2}}$,则得到线性方程

$$4u''=f(x)u.$$

6.153. $2yy''-6y'^2+ay^5+y^2=0$; 6.224 型.

假设 $p(y)=y'$,则得到伯努利方程

$$p'-\frac{3p}{y}+\frac{ay^4+y}{p}=0;\quad 4p^2=4ay^5+y^2+Cy^6.$$

6.154. $2yy''-y'^2(y'^2+1)=0$;

第一部分 15.3 节 (a) 中讨论的那种类型。

假设 $p(y)=y'(x)$, 则得到方程

$$y=2C\frac{y'^2}{y'^2+1},$$

即第一部分 4.17 节(a)中讨论过的那种类型的方程. 因此

$$x=2C_1\frac{t}{t^2+1}+2C_1\operatorname{arctg}t+C_2,\ y=2C_1\frac{t^2}{t^2+1},$$

或者,如果假设 $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}u$, 则有

$$x=C_1u+C_1\sin u+C_2,\quad y=C_1(1-\cos u),$$

即得到恢复点处于 x 轴上的摆线族.

Ince, p.61.

6.155. $2(y-a)y''+y'^2+1=0$. 也可参阅 6.224.

利用第一部分 15.3(a)的方法,则得到

$$2x=C_1\pm\sqrt{(y-a+C_2)(a-y)}\mp C_2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-y}{y-a+C_2}}.$$

6.156. $3yy''-2y'^2=ax^2+bx+c$.

微分三次,则得到

$$3yy^{(5)}+5y'y^{(4)}=0,$$

因此

$$y^{(4)}=C|y|^{-\frac{5}{3}};$$

由这些方程消去高阶导数,得到

$$(2Ry'-3R'y)^2=9(b^2-4ac)y^2-2R^3+CR|y|^{\frac{4}{3}},$$

其中

$$R=ax^2+bx+c.$$

如果用等式 $u^3y^2=R^3$ 引入函数 $u(x)$，则此函数可由方程

$$\int u^{-1}[9(b^2-4ac)+C_1u-2u^3]^{-\frac{1}{2}}du\pm\int\frac{dx}{3R}=C_2$$

来确定，只要其中所包含的分母不等于零。

6.157. $\boldsymbol{3yy''-5y'^2=0}$；6.224 型。

$$y^2=(C_1x+C_2)^{-3}.$$

6.158. $\boldsymbol{4yy''-3y'^2+4y=0}$；方程 6.238 的特殊情况。

假设 $y=\pm u^2$，则得到方程 6.138

$$2uu''-u'^2\pm1=0.$$

假设 $y'(x)=\sqrt{u(y)}$，则得到线性方程

$$2yu'-3u+4y=0.$$

6.159. $\boldsymbol{4yy''-3y'^2-12y^3=0}$；方程 6.224 的特殊情况。

经过 6.158 中指出的那些变换，分别得到：

$$2uu''-u'^2\mp3u^4=0\ (6.146\ 型),$$

$$2yu'-3u-12y^3=0.$$

6.160. $\boldsymbol{4yy''-3y'^2+ay^3+by^2+cy=0}$；

方程 6.165 和 6.224 的特殊情况。

6.158 中讨论过的那些变换，可以用于这个方程。

6.161. $\boldsymbol{4yy''-3y'^2+\left(6y^2-2\frac{f'}{f}y\right)y'+}$

$$\boldsymbol{+y^4-2\frac{f'}{f}y^3+gy^2+fy=0,}$$

$$f=f(x),\ g=g(x).$$

$$4y=-f\left(2u'+u^2-\frac{f'}{f}+\frac{g}{4}\right)^{-1},$$

其中 $u=\frac{v'}{v}$，这里 v 是线性方程

$$v''' = \frac{3f'}{2f}v'' + \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} - \frac{g}{4}\right)v' + \frac{1}{8}\left(\frac{f'}{f}g - f - g'\right)v$$

的解.

6.162. $4yy'' - 5y'^2 + ay^3 = 0$; 方程 6.224 的特殊情况.

当 $a = -4\alpha^2$ 时,例如函数 $y = (\alpha x + C)^{-2}$ 是解.

假设 $y = u^{-4}$, 则得到方程 6.209

$$u^3 u'' = \frac{a}{16}.$$

利用6.224 中指出的方法,得到可分离变量的方程

$$y'^2 + ay^3 = A|y|^{\frac{5}{2}},$$

由此方程求得

$$x + B = \int \frac{dy}{\sqrt{A|y|^{\frac{5}{2}} - ay^3}}\cdot$$

为了计算这个积分,可以利用变换 $y = \pm u^{-2}$.如果 $a \neq 0$,则得到

$$y = \frac{\pm 16\, C_1^2}{[(C_1 x + C_2)^2 \pm a]^2},$$

以及 $y = (Dx + C)^{-2}$, 其中 $4D^2 = -a$, 而如果 $a = 0$, 则 $y = (C_1 x + C_2)^{-4}$.

也可参阅: E Makai, *Zeitschrift f angew. Math Mech.* 22(1942), p.167.

6.163. $12yy'' - 15y'^2 + 8y^3 = 0$; 方程 6.224 的特殊情况.

$$y[(x + C_1)^2 + C_2]^2 = 6C_2.$$

6.164. $nyy'' - (n-1)y'^2 = 0$; 方程 6.224 的特殊情况.

$$y = (C_1 x + C_2)^n.$$

6.165. $ayy''+by'^2+c_4y^4+c_3y^3+c_2y^2+c_1y+c_0=0$;

6.224 型.

此方程可以化为容易求解的关于函数 $u=u(y)$ 的线性方程

$$\frac{1}{2}ayu'+bu+c_4y^4+c_3y^3+c_2y^2+c_1y+c_0=0;$$

为此,应当假设 $y'(x)=p(y)$, $p^2=u$.在 $a=1, b=-1$ 的情况下,由该线性方程得到

$$y'^2+c_4y^4+2c_3y^3+2c_2y^2\ln|y|-2c_1y-c_0=Cy^2,$$

而在 $a=2,, b=-1$ 的情况下,则得到

$$y'^2+\frac{1}{3}c_4y^4+\frac{1}{2}c_3y^3+c_2y^2+c_1y\ln|y|-c_0=Cy.$$

如果对数项不存在,则这些方程的解可以通过椭圆函数来表示.

如果 $a=-2b$, $c_1=0$,则可以按下述方式进行:将原方程对 x 微分,并且除以 y;得到

$$ay'''+4c_4y^2y'+3c_3yy'+2c_2y'=0,$$

因而

$$ay''+\frac{4}{3}c_4y^3+\frac{3}{2}c_3y^2+2c_2y+C=0;$$

将此方程同原方程联立,则有

$$by'^2=\frac{1}{3}c_4y^4+\frac{1}{2}c_3y^3+c_2y^2+Cy-c_0.$$

B. Gambier, *Acta Math.* 33(1910), p 27.

6.166. $ayy''+by'^2-\dfrac{yy'}{\sqrt{x^2+c^2}}=0$.

假设 $y'=yu(x)$,则得到伯努利方程

$$u' - \frac{u}{a\sqrt{x^2+c^2}} + \left(1+\frac{b}{a}\right)u^2 = 0.$$

也可按下述方式来进行：将原方程除以 yy', 则得到

$$\frac{d}{dx}\{a\ln|y'| + b\ln|y| - \ln(x+\sqrt{x^2+c^2})\} = 0,$$

由此

$$y^{1+\frac{b}{a}} = C_1 + C_2(x+\sqrt{x^2+c^2})^{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+c^2} - ax).$$

6.167. $ayy'' - (a-1)y'^2 + (a+2)fy^2y' + f^2y^4 + af'y^3 = 0,$

$$f = f(x).$$

假设

$$y = \frac{v(x)}{\int fv\,dx},$$

则得到

$$vv'' = \frac{a-1}{a}v'^2,$$

因而

$$v = (C_1x + C_0)^a.$$

6.168. $(ay+b)y'' + cy'^2 = 0.$

如果将此方程除以 $(ay+b)y'$ 以后，则可积分．得到

$$ay + b = \begin{cases} (C_1x + C_0)^{\frac{a}{a+c}} & \text{当 } a+c\neq 0 \text{ 时}, \\ C_0e^{C_1x} & \text{当 } a+c=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

6.169. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$

此方程可以写为 $x(y^2)'' = (y^2)'$ 的形式．由此得到

$$y^2 = C_1x^2 + C_2.$$

6.170. $xyy'' + xy'^2 + ayy' + f(x) = 0.$

假设 $u(x) = y^2$, 则得到线性方程

$$xu'' + au' + 2f(x) = 0,$$

由此

$$u = C_1 + C_2 x^{1-a} - 2\int x^{-a}\left(\int x^{a-1} f(x)\,dx\right)dx.$$

6.171. $xyy'' - xy'^2 + yy' + axy^4 + by^3 + cy + dx = 0$.

在一般情况下，此方程不能用初等函数求解.

Ince, p 335(Ⅷ).

6.172. $xyy'' - xy'^2 + ayy' + bxy^3 = 0$.

此方程可以写为下列形式：

$$x\frac{d^2}{dx^2}\ln y + a\frac{d}{dx}\ln y + bxy = 0.$$

因此，假设 $u(x) = \ln y$, 则得到方程 6.76，其未知函数 y 换为 u.

如果假设 $b = \pm\beta^2$, 那么经过变换 $y(x) = \bar{y}(\bar{x})$, $\bar{x} = \beta x$, 则化为方程

$$xyy'' - xy'^2 + ayy' \pm xy^3 = 0, \tag{1}$$

其中 x 和 y 上的横线省略. 方程(1)的一个解是

$$y = \pm(2a-2)x^{-2}.$$

经过变换 $y = x^{-2}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, 则将方程(1)化为下列形式：

$$\eta\eta'' - \eta'^2 + (a-1)\eta\eta' \pm \eta^3 + (2-2a)\eta^2 = 0, \tag{2}$$

其次，假设 $\eta'(\xi) = p(\eta)$, 则得到

$$\eta pp' - p^2 + (a-1)\eta p \pm \eta^3 + (2-2a)\eta^2 = 0. \tag{3}$$

以后的步骤，见 6.76 .

6.173. $xyy'' + 2xy'^2 + ayy' = 0$; 方程 6.51 的特殊情况.

假设 $u(x) = y^3$, 则得到方程 $xu'' + au' = 0$,

由此

$$y^3 = C_1 + C_2 x^{1-a}.$$

6.174. $xyy''-2xy'^2+(y+1)y'=0$;

广义齐次方程(第一部分 15.2 节).

假设 $y(x)=\eta(\xi),\ \xi=\ln|x|$,则得到第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型的方程。其解为:

$$y=C,\ y=\frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$2Cy=\operatorname{tg}(C\ln|x|),\ 2Cy=\operatorname{cth}(C\ln|x|).$$

6.175. $xyy''-2xy'^2+ayy'=0$; 方程 6.51 的特殊情况。

假设 $u(x)=\dfrac{1}{y}$, 则得到 $xu''+au'=0$。

由此求得

$$\frac{1}{y}=\begin{cases}C_1+C_2x^{1-a} & \text{当 } a\neq 1 \text{ 时},\\ C_1+C_2\ln x & \text{当 } a=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

6.176. $xyy''-4xy'^2+4yy'=0$.

除以 xy, 则得到 6.51 型的方程。

$$y^{-3}=C_1+C_2x^{-3}.$$

6.177. $xyy''+\left(\dfrac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}-x\right)y'^2-yy'=0$.

假设 $y'=yu(x)$, 则得到对于 u 的伯努利方程. 因此,求得解 $y=C$ 和

$$y=C_1\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{b^2-x^2}+\frac{C_2}{a^2}\ln\left(C_2-a\sqrt{b^2-x^2}\right)\right\}.$$

6.178. $x(y+x)y''+xy'^2-(y-x)y'-y=0$;

广义齐次方程.

假设 $u(x)=y+x,\ v=\dfrac{u'}{u}$, 仍然得到齐次方程;解此方程,得到

$$(y+x)^2=C_1x^2+C_2.$$

利用变换 $u(x)=(y+x)^2$，可以较快地达到目的；经过这个变换，化为方程 $xu''-u'=0$.

6.179. $2xyy''-xy'^2+yy'=0$; 6.51 型的方程.

$$y=C_1(\sqrt{|x|}+C_2)^2.$$

6.180. $x^2(y-1)y''-2x^2y'^2-2x(y-1)y'-2y(y-1)^2=0$

假设 $y=1+\frac{1}{u(x)}$，则得到第一部分 22.3 节中讨论过的那种类型的方程

$$x^2u''-2xu'+2u=-2,$$

此方程的通解是

$$u=-1+C_1x+C_2x^2.$$

6.181. $x^2(y+x)y''-(xy'-y)^2=0$.

假设$y+x=xu(x)$，$v=\frac{u'}{u}$，则得到方程$xv'+2v=0$；于是求得

$$y=-x+xC_1\exp\frac{C_2}{x}.$$

6.182. $x^2(y-x)y''=a(xy'-y)^2$.

经过变换 $y-x=xu(x)$，则化为方程

$$xuu''-axu'^2+2uu'=0,$$

假设 $v(x)=\frac{u'}{u}$，由此得到伯努利方程

$$xv'+(1-a)xv^2+2v=0.$$

经过变换 $w(x)=\frac{1}{v}$，则可将其化为线性方程

$$w'-\frac{2}{x}w=1-a,$$

此方程的通解是 $w=(a-1)x+Cx^2$. 因此，当 $a\neq 1$ 时，

得到

$$u=\pm\left|C_0+\frac{C_1}{x}\right|^{\frac{1}{1-a}}.$$

6.183. $2x^2yy''-x^2(y'^2+1)+y^2=0$;

方程 6.139 的特殊情况.

$$y=x(C_1+\sqrt{4C_1C_2-1}\ln|x|+C_2\ln^2|x|).$$

6.184. $ax^2yy''+bx^2y'^2+cxyy'+dy^2=0$.

如果 $a+b=0$,则假设 $y'=yu(x)$;得到线性方程

$$ax^2+cxu+d=0.$$

如果 $a+b\neq0$,则假设

$$y=u^\alpha,\quad u=u(x),\quad \alpha=\frac{a}{a+b},$$

得到欧拉方程

$$a\alpha x^2u''+c\alpha xu'+du=0.$$

6.185. $x(x+1)^2yy''-x(x+1)^2y'^2+2(x+1)^2yy'-$
$-a(x+2)y^2=0$.

假设 $y'=u(x)y$,则得到对于 u 的线性方程,由此方程求得

$$y=C_1|x+1|^a\exp\frac{C_2}{x}.$$

6.186. $8(x^3-1)yy''-4(x^3-1)y'^2+12x^2yy'-3xy^2=0$.

假设 $y=\eta^2(\xi)$, $\xi=x^3$,则得到超几何方程 2.260

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{7}{6}\xi-\frac{2}{3}\right)\eta'-\frac{1}{48}\eta=0.$$

6.187. $f(x)yy''+g(x)y'^2+h(x)yy'+k(x)y^2=0$.

假设 $u(x)=\dfrac{y'}{y}$,则得到黎卡提方程

$$fu'+(f+g)u^2+hu+k=0;$$

如果 $g=-f$，则所得到的方程甚至是线性的.

188—225. $f(x, y)y''=F(x, y, y')$

6.188. $\boldsymbol{y^2y''=a}$；自由降落的方程.

可以得到 $yy'^2+2a=Cy$. 如果将 y 取作自变量，即如果考虑方程

$$y=(Cy-2a)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2,$$

则此方程不难求解.

6.189. $\boldsymbol{y^2y''+yy'^2+ax=0}$. 也可参阅6.190.

假设$\frac{1}{y}=u'(x)$，则得到

$$-u'u'''+3u''^2+axu'^5=0.$$

然后，将 u 取作自变量，则得到线性方程

$$x'''(u)+ax(u)=0.$$

6.190. $\boldsymbol{y^2y''+yy'^2=ax+b}$. 当 $b=0$ 时，也可参阅6.189.

假设 $u(x)=y^2$，则得到方程

$$u''\sqrt{u}=2ax+2b.$$

将此方程乘以$\frac{u'^2}{\sqrt{u}}-4(ax+b)$，则得到全微分方程. 进行积分，得到

$$u'^3-12u'\sqrt{u}(ax+b)+8a\sqrt{u^3}+\frac{8}{a}(ax+b)^3=C,$$

即

$$y^3y'^3-3y^2y'(ax+b)+ay^3+\frac{1}{a}(ax+b)^3=C.$$

6.191. $\boldsymbol{(y^2+1)y''-(2y-1)y'^2=0}$.

根据第一部分15.3节(a)，得到

$$y=\mathrm{tg}\ln(C_1x+C_2)$$

也可以利用这种情况：原方程除以 y^2+1 时，则化为全微分方程。

6.192. $(y^2+1)y''-3yy'^2=0$； 6.224 型的方程.

$$[1-(C_1x+C_2)^2]y^2=(C_1x+C_2)^2.$$

6.193. $(y^2+x)y''+2(y^2-x)y'^3+4yy'^2+y'=0$.

将 y 取作自变量代替 x，则得到对于 $x=x(y)$ 的方程

$$(y^2+x)x''-2(y^2-x)-4yx'-x'^2=0;$$

其次，经过变换 $v(y)=y^2+x$，则化为方程 $vv''=v'^2$，由此方程求得

$$y^2+x=C_1\exp C_2y,\ \text{以及}\ y=C.$$

6.193 a. $(y^2+x^2)y''+(y'^2+1)(xy'-y)=0$.

同方程 6.194 的情况一样，可以得到

$$\mathrm{arctg}\,y'+\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=C_1'\quad\text{或者}\quad y'+\frac{y}{x}=\left(1-y'\frac{y}{x}\right)C_1.$$

此方程是齐次方程. 假设 $y=xu(x)$，则得到可分离变量的方程

$$x(C_1u+1)u'+C_1u^2+2u-C_1=0.$$

由此方程求得

$$x^2(C_1u^2+2u-C_1)=C_2,\quad \text{即}\ 2xy+C_1(y^2-x^2)=C_2.$$

6.194. $(y^2+x^2)y''-(y'^2+1)(xy'-y)=0$.

由给定的方程得到

$$\mathrm{arctg}\,y'-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=C_1\quad\text{或者}\quad y'-\frac{y}{x}=\left(1+y'\frac{y}{x}\right)C_1.$$

然后，引入极坐标

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$

于是得到

$$r=C_2e^{\sigma_1\varphi}.$$

6.195. $(y^2+x^2)y''-2(y'^2+1)(xy'-y)=0.$

积分曲线是通过坐标原点的上半圆和下半圆

$$x^2+y^2+C_1x+C_2y=0,$$

以及直线 $y=Cx$.

6.196. $2y(y-1)y''-(2y-1)y'^2+f(x)y(y-1)y'=0.$

其解可由方程

$$y'^2=Cy(y-1)\exp\left(-\int f dx\right)$$

得到。

P Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p.40, 方程(3)。

6.197. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2+f(y)=0.$

6.224型的方程.

如果$f\equiv 0$,则

$$y=-\mathrm{tg}^2(C_1x+C_2) \text{ 和 } y=\mathrm{th}(C_1x+C_2)$$

是解.

6.198. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2+4yy'(fy+g)+$
$+4y^2(y-1)(g^2-f^2-g'-f')=0,$

$$f=f(x),\ g=g(x).$$

其解可由下列方程得到:

$$[y'-2(f+g)y]^2=y(y-1)^2u^2.$$

其中 $u=C\exp\int(g-f)dx$,

P. Painlevé, *Acta Math.* 25(1902), p. 39, 方程(1).

6.199. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2-$
$-4(fy+g)yy'-(y-1)^3(\varphi^2y^2-\psi^2)-$
$-4y^2(y-1)(f^2-g^2-f'-g')=0,$

f, g, φ, ψ 是这样一些 x 的函数:$\varphi'=2f\varphi$, $\psi'=-2g\psi$.

此方程等价于方程组

$$y' = -2(y-1)u + y(y-1)\varphi - 2y(f+g),$$

$$yu' = -(y-1)u^2 - 2yug + \frac{y-1}{4}\psi^2.$$

由此消去 y，则得到对于 $u(x)$的方程，这个方程等价于黎卡提方程

$$u' + u^2 + (2g-\varphi)u = \frac{1}{4}\psi^2 + v,$$

其中 $v' = 2(f-g)v$。

6.200. $3y(y-1)y'' - 2(2y-1)y'^2 + f(y) = 0$.

第一部分 15.3 节(a) 以及 6.224 中讨论的 那种类型的方程。

如果 $f \equiv 0$，则由此方程解出 $\frac{y''}{y'}$；得到

$$y'^3 = Cy^2(y-1)^2;$$

关于此方程的进一步的研究，见 1.519。

6.201. $4y(y-1)y'' - 3(2y-1)y'^2 + f(y) = 0$.

6.224 型的方程。

其解可由一阶方程

$$|y(y-1)|^{-3/2}y'^2 \pm \int f(y)|y(y-1)|^{-5/2}dy = C$$

得到。在某些情况下，采用变换

$$u^2(x) = 1 - \frac{1}{y}$$

很方便。如果 $f \equiv 0$，则由原方程解出 $\frac{y''}{y'}$ 更为简单。这时得到

$$y'^4 = Cy^3(y-1)^3.$$

见 Ince, p. 342.

6.202. $ay(y-1)y'' + (by+c)y'^2 + f(y) = 0$.

将此方程乘以

$$y^{-\alpha}(y-1)^{-\beta}, \text{其中} \alpha=1+\frac{c}{a}, \quad \beta=1-\frac{b+c}{a},$$

则得到形式为6.224的方程.

6.203. $ay(y-1)y''-(a-1)(2y-1)y'^2+$
$+f(x)y(y-1)y'=0.$

其解可由方程

$$y'=Cy^{1-\frac{1}{a}}(y-1)^{1-\frac{1}{a}}\exp\left(-\frac{1}{a}\int f dx\right)$$

得到.

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p 41.

6.204. $aby(y-1)y''-[(2ab-a-b)y+(1-a)b]y'^2+$
$+f(x)y(y-1)y'=0.$

其解可由方程

$$y'=Cy^{1-\frac{1}{a}}(y-1)^{1-\frac{1}{b}}\exp\left(-\frac{1}{ab}\int f dx\right)$$

得到.

P Painlevé, *Acta Math*, 25(1902), p 41.

6.205. $xy^2y''=a.$

此方程可以化为6.101的形式,其中 $a=1, b=c=0$, $f(s)=as^{-2}$. 假设 $y=xu(x)$, 则得到可分离变量的方程

$$x^4u'^2=\frac{-2a}{u}+C.$$

6.206. $(x^2-a^2)(y^2-a^2)y''-(x^2-a^2)yy'^2+$
$+x(y^2-a^2)y'=0.$

假设 $u(x)=|y^2-a^2|^{-\frac{1}{2}}y'$, 则得到 $(x^2-a^2)u^2=$
$=C$, 即可分离变量的方程

$$(x^2-a^2)y'^2=C(y^2-a^2).$$

6.207. $2x^2y(y-1)y''-x^2(3y-1)y'^2+2xy(y-1)y'+$
$+(ay^2+b)(y-1)^3+cxy^2(y-1)+dx^2y^2(y+1)=0$.

此方程不能用古典的超越函数求解.

Ince, p. 341(XXXIX).

6.208. $x^3y^2y''+(xy'-y)^3(y+x)=0$; 6.59 型的方程.

假设 $y(x)=x\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$，则得到

$$\eta^2\eta''+(\eta+1)\eta'^3+\eta^2\eta'=0;$$

由此得到对于 $p(\eta)=\eta'(\xi)$ 的黎卡提方程

$$\eta^2p'+(\eta+1)p^2+\eta^2=0.$$

6.209. $y^3y''=a$; 第一部分 15.3 节(a)中讨论过的那种类型.

$$(C_1x-C_2)^2+C_1y^2+a=0 \text{ 和 } y^2=2x\sqrt{-a}+C.$$

也可以利用这种情况：这个微分方程当乘以 $2yy'$ 时，则化为全微分方程.

6.210. $(y^3+y)y''-(3y^2-1)y'^2=0$;

第一部分 15.3 节 (a) 中讨论过的那种类型的方程.

$$y=C \text{ 和 } (C_1x+C_0)(y^2+1)=1.$$

6.211. $2y^3y''+y^4-a^2xy^2=1$.

显然，任何一条积分曲线同 x 轴都没有公共点.因为如果 $y(x)$ 是解则 $-y$ 也是解，所以可以只限于研究 $y>0$ 的半平面. 每一条积分曲线在两侧可以无限地延拓. 由方程可知，任何一个解当 $x\to\infty$ 时都不能单调减小. 确切地说存在一条积分曲线对于一切足够大的 x 值是向上凸的(例外的解)；对于这条积分曲线，渐近展开式

$$y\sim\sqrt{x}\left(a_0+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_4}{x^4}+\cdots\right)$$

成立. 其余的积分曲线中的每一条，都有无穷多个拐点，并且具有这种性质：函数 $y(x)-a\sqrt{x}$ 具有无穷多个

极值，这些极值随 $x\to\infty$ 而减小，其横坐标则趋向于∞；对于这些解，当选取适当常数时，则有

$$y=a\sqrt{x}+C_1\sin\left(x+\frac{C_1^2}{12x^2}\ln x-C_1\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

G.Ascoli, *Rendiconti Istituto Lombardo*(2), 69(1936), p. 167—197.

6.212. $2y^3y''+y^2y'^2=ax^2+bx+c.$

如果对于某一个解 $y(x)\neq 0$，将

$$\xi=\int\frac{dx}{y(x)}$$

取作自变量，并且假设 $\eta(\xi)=y(x)$，则得到方程

$$2\eta\eta''-\eta'^2=ax^2+bx+c.$$

对 x 微分两次，得到

$$2\eta'''=2ax+b,\quad \eta^{(4)}=a\eta \qquad (1)$$

于是，得到关于 $\eta(\xi)$ 的线性方程 4.3. 如果 $\eta(\xi)$ 是此方程的解，则由(1)的第一个方程，得到 x 作为 ξ 的函数，因而，ξ 可作为 x 的函数，最后得到 $y(x)=\eta(\xi(x))$. 用这样的方式求得的函数中，应当包含着原方程的解.

L. Euler Institutiones Calculi Integralis, Petersburg, 1824—1827，卷Ⅱ, p. 138—143. 其中也有将此方程化为一阶方程的方法.

6.213. $2(y-a)(y-b)(y-c)y''-$

$$-[(y-a)(y-b)+(y-a)(y-c)+(y-b)(y-c)]y'^2+$$
$$+[(y-a)(y-b)(y-c)]^2\times$$
$$\times\left\{A+\frac{B}{(y-a)^2}+\frac{C}{(y-b)^2}+\frac{D}{(y-c)^2}\right\}=0.$$

方程 6.224 的特殊情况.

见 Ince, p 343 以及以后，其中指出，此方程可用椭圆函数求解. 也可参阅 B Gambier, *Acta Math.* 33(1910), p 48.

6.214. $(4y^3-g_2y-g_3)\, y''-\left(6y^2-\frac{1}{2}g_2\right)y'^2=0$,

g_2, g_3 为常数.

$$y=\mathscr{P}(C_1x+C_0,\ g_2,\ g_3).$$

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p 25, 方程(1).

6.215. $(4y^3-g_2y-g_3)\,[y''+f(x)y']=\left(6y^2-\frac{1}{2}g_2\right)y'^2$.

其解可由方程

$$y'=C\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}\,\exp\left(-\int f dx\right)$$

得到.

P Painlevé, *Acta Math* 25(1902), p 42, 方程(1).

6.216. $2x(x-1)y(y-1)(y-x)y''-$

$$-x(x-1)(3y^2-2xy-2y+x)y'^2+$$
$$+2y(y-1)(2xy-y-x^2)y'-$$
$$-y^2(y-1)^2-f(x)[y(y-1)(y-x)]^{\frac{3}{2}}=0.$$

如果 $\varphi(u,x)$ 是由积分

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{ds}{\sqrt{s(s-1)(s-x)}}$$

定义的椭圆函数，其周期为(依赖于 x 的) $2\omega_1(x)$, $2\omega_2(x)$, 则给定的方程具有解

$$y=\varphi(u+C_1\omega_1+C_2\omega_2,\ x),\tag{1}$$

其中 $u(x)$ 是线性方程

$$4x(x-1)u''+4(2x-1)u'+u=f(x)$$

的解.

如果 $f\equiv0$, 则在表达式(1)中，可以假设 $u=0$.

Ince. 354, p. 344.

6.217. $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)y''-$

$$-x^2(x-1)^2(3y^2-2xy-2y+x)y'^2+$$

$$+2x(x-1)y(y-1)(2xy-y-x^2)y'+$$

$$+ay^2(y-1)^2(y-x)^2+bx(y-1)^2(y-x)^2+$$

$$+c(x-1)y^2(y-x)^2+dx(x-1)y^2(y-1)^2=0.$$

一般说来，此方程不能用古典的超越函数求解。$a=b=c=0, d=-1$ 的情况，见6.216.

见 Ince, p. 344.

6.218. $(k^2y^2-1)(y^2-1)y''+$

$$+[(k^2+1-2k^2y^2)y+a\sqrt{(k^2y^2-1)(y^2-1)}]y'^2=0,$$

$a, k\neq0$；方程6.54的特殊情况.

$$y=\mathrm{sn}\left[\frac{1}{a}\ln(C_1x+C_0), k\right].$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), p. 5; Ince, p. 344 以及以后.

6.219. $(y^2+ax^2+2bx+c)^2y''+dy=0.$

除以 y'' 的系数，乘以 $ax(xy'-y)+b(2xy'-y)+cy'$，则化为全微分方程. 积分之后，得到

$$(ax^2+2bx+c)y'^2-2(ax+b)yy'+ay^2+$$

$$+\frac{dy^2}{y^2+ax^2+2bx+c}=C.$$

也可借助于变换

$$y=u(x)\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

来简化给定的方程.

特别是，如果原方程具有下列形式：

$$(y^2+x^2)^2y''+ay=0,$$

那么，将它乘上 $2x(x^2+y^2)^{-2}(xy'-y)$，则得到全微分方程．积分之后，则化为齐次方程

$$(xy'-y)^2-\frac{ax^2}{x^2+y^2}=C.$$

6.220. $y''\sqrt{y}=a$.

第一部分 23.1 节中讨论过的那种类型．

假设 $p(y)=y'(x)$，则得到 $pp'=y^{-\frac{1}{2}}$，因而

$$y'(x)=p=2\sqrt{a\sqrt{y}+C}.$$

6.221. $\sqrt{y^2+x^2}\,y''=a(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$；广义齐次方程．

$$x=C_1\frac{\cos t}{\sin s-a},\quad y=C_1\frac{\sin t}{\sin s-a},$$

$$\text{其中}\qquad t=C_2-\int\frac{\sin s}{\sin s-a}ds.$$

6.222. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$.

假设 $u(x)=\ln y$，则得到不难求解的方程，由此方程求得

$$y=C\quad\text{和}\quad \ln y=\frac{x+C_1}{x+C_2}.$$

6.223. $(a\sin^2y+b)y''+ay'^2\sin y\cos y+$

$$+A(a\sin^2y+c)y=0.$$

将 y 取作自变量，则得到对于 $u(y)=y'^2$ 的线性方程 1.200，其中数量 y, x, A 分别换为 $u, y, 2A$.

6.224. $f(y)y''+af'(y)y'^2+g(y)=0$.

将此方程除以 $f(y)$，则得到 6.54 型的方程．用 6.54 中指出的方法可将这个方程化为某个伯努利方程．第二个方法：如果将给定的方程乘以 $\pm2|f|^{2a-1}y'$（取上面的符号还是取下面的符号，取决于 $f>0$ 还是 <0），则

前两项之和等于$|f|^{2a}y'^2$的导数，即原方程等价于方程

$$|f|^{2a}y'^2 \pm 2\int |f|^{2a-1}g\,dy = C.$$

6.225. $f(y)y'' - f'(y)y'^2 = f^2(y)\Phi\left(x,\ \dfrac{y'}{f(y)}\right).$

假设 $u(x) = \dfrac{y'}{f(y)}$，则得到

$$u' = \Phi(x, u).$$

226—249．其他的微分方程

6.226. $y'y'' - x^2yy' - xy^2 = 0.$

全微分方程．可以得到

$$y'^2 - x^2y^2 = C.$$

6.227. $(xy' - y)y'' + 4y'^2 = 0.$

假设 $u(x) = \dfrac{y'}{y}$，则得到广义齐次方程．然后，假设 $\eta(\xi) = xu(\xi)$，$\xi = \ln|x|$，则得到可分离变量的方程

$$(1-\eta)\eta' = \eta(\eta+1)^2.$$

经过变换

$$t(\xi) = \frac{1}{\eta+1},$$

最后得到

$$(2t-1)t' = t-1,$$

由此求得参数形式的解：

$$x = C_1(t-1)e^{2t},\ y = C_2te^{-2t}.$$

6.228. $(xy' - y)y'' = (y'^2+1)^2.$

圆心在坐标原点的所有圆的渐伸线方程．

见 Serret, Scheffers, Lehrbuch der Differential-und

Integralrechnung, 卷 III, Leipzig und Berlin, 1924, p. 347.

6.229. $ax^3y'y''+by^2=0$.

假设 $u(x)=\dfrac{y'}{y}$，则得到

$$ax^3u(u'+u^2)+b=0.$$

此方程为广义齐次方程. 经过变换 $xu=\eta(\xi)$, $\xi=\ln|x|$，得到

$$a\eta(\eta'-\eta+\eta^2)+b=0.$$

6.230. $f_1y'y''+f_2yy''+f_3y'^2+f_4yy'+f_5y^2=0$,

$$f_\nu=f_\nu(x),\ f_1\neq0.$$

如果 f_1 和 f_2 是连续可微的，则经过变换

$$\eta(\xi)=y(x)\exp\int\frac{f_2}{f_1}dx,\ \frac{d\xi}{dx}=\exp\int\frac{2f_2-f_3}{f_1}dx$$

可将此方程化为下列形式:

$$\eta'\eta''+g(\xi)\eta\eta'+h(\xi)\eta^2=0.$$

如果这里 $h(\xi)=\dfrac{1}{2}g'(\xi)$，则此方程的解显然满足方程

$$\eta'^2+g\eta^2=C.$$

经过变换 $u(x)=\dfrac{y'}{y}$，则将原方程化为阿贝耳型方程(第一部分 4.11 节).

如果 f_ν 是一些常数，则此方程具有形如 Ce^{ax} 的解.

6.231. $(2y^2y'+x^2)y''+2yy'^3+3xy'+y=0$.

全微分方程. 所以其解可由方程

$$y^2y'^2+x^2y'+xy=C$$

求得.

6.232. $(y'^2+y^2)y''+y^3=0$. 广义齐次方程.

假设 $y=e^u$，则得到

$$u=C_1+\frac{1}{2}\ln|\sin(x\sqrt{3}+C_2)|\pm$$

$$\pm\int\left[1+\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2(x\sqrt{3}+C_2)\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

6.233. $[y'^2+a(xy'-y)]y''=b.$

将此方程对x微分，然后借助于原方程消去$xy'-y$. 假设$p(x)=y'(x)$, 则有

$$bp''+(2p+ax)p'^3=0,$$

或者，如果将p取作自变量，则对于$x=x(p)$得到不难求解的方程

$$x''-\frac{a}{b}x=\frac{2}{b}p.$$

6.234. $(a\sqrt{y'^2+1}-xy')y''=y'^2+1.$

利用第一部分 15.3 节(b)中指出的变换，可以得到一阶方程；参数形式的解为

$$x=\frac{at+C_1}{v},\quad y=\frac{C_1t-a}{v}-C_1\ln(t+v)+C_2,$$

其中

$$v=\sqrt{t^2+1}.$$

6.235. $f(y')y''+g(y)y'+h(x)=0.$

由给定的方程得到

$$\int f(y')dy'+\int g(y)dy+\int h(x)dx=C,$$

即此二阶方程可以化为一阶方程.

6.236. $y''^2=ay+b.$

假设$p(y)=y'(x)$，则得到$(pp')^2=ay+b$, 由此可以化为不难求解的一阶方程

$$y'^2=\frac{4}{3a}(ay+b)^{\frac{3}{2}}+C.$$

6.237. $a^2y''^2-2axy''+y'=0$，即$(ay''-x)^2=x^2-y'$.

假设 $y'=u(x)$，则得到一阶方程．原方程可以写为下列形式：

$$(ay''-x)^2=x^2-y'.$$

6.238. $2(x^2+1)y''^2-x(4y'+x)y''+2(y'+x)y'-2y=0$.

微分之后，得到

$$[4(x^2+1)y''-4xy'-x^2]y'''=0,$$

由此求得

$$16y=(X+C)^2+2x(X+C)\sqrt{x^2+1}-3x^2,$$

其中

$$X=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

以及

$$y=C_1x^2+C_2x+4C_1^2+C_2^2.$$

第一族曲线是第二族曲线的包络.

6.239. $3x^2y''^2-2(3xy'+y)y''+4y'^2=0$.

此方程的解是函数 $y=C_1x^2+C_1C_2x+C_2^2$ 和函数 $y=Cx^{1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}}$，且后者是线性方程 $3x^2y''-3xy'-y=0$ 的解.

6.240. $(9x^3-2x^2)y''^2-6x(6x-1)y'y''-6yy''+$ $+36xy'^2=0$.

此方程的解是函数

$$y=C_1^2x^3+C_1C_2x+C_2^2,$$

以及函数

$$y=CEx\sqrt{4x-1} \text{ 和 } y=\frac{C}{E}x\sqrt{4x-1},$$

且后两者是线性方程

$$(9x^3-2x^2)y''-3x(6x-1)y'-3y=0$$

的解，其中 $E=\exp\int\frac{2\sqrt{9x^2-2x}}{4x^2-x}dx$。

6.241. $\sum_{p,q=0} f_{pq}(x)y^{(p)}y^{(q)}=0$. 同 6.230 相比较.

此方程的解可以表示为下列形式的条件是已知的：

$$y=C_1^2u_1+C_1C_2u_2+C_2^2u_3,$$

其中 u_1, u_2, u_3 是某一个三阶线性方程的解，并且此方程同时还存在着满足某一个二阶线性方程的奇异解的条件也是知道的。

P Appell, *Journ de Math* (4),5(1889),p 410.

6.242. $yy''^2=ae^{2x}$

圆柱电容器中空间位移电流的方程。

假设 $y=x^{\frac{4}{3}}u$，则得到方程

$$\left(x^2u''+\frac{8}{3}xu'+\frac{4}{9}u\right)\sqrt{u}=\pm\sqrt{a}e^x.$$

如果其解满足条件 $y(0)=y'(0)=0$，则可以得到计算起来很方便的按 x 幂的展开式。

6.243. $(a^2y^2-b^2)y''^2-2a^2yy'^2y''+(a^2y'^2-1)y'^2=0$.

假设 $p(y)=y'(x)$，将 y 取作自变量，并且对 y 微分，则得到可以分解的方程

$$[(a^2y^2-b^2)p'-a^2yp]p''=0.$$

由此求得

$$y=C_1e^{C_2x}\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2+C_2^{-2}} \quad 和 \quad y=\pm\frac{b}{a}\cos\frac{x+C}{b}.$$

6.244. $(x^2yy''-x^2y'^2+y^2)^2=4xy(xy'-y)^3$.

假设 $y=xu(x)$，则得到

$$(uu''-u'^2)^2=4uu'^3,$$

假设 $v=\frac{u'}{u}$,由此求得

$$v'^2=4v^3$$

由此方程得到$(x+C)^2v=1$, 因而

$$u=C_0\exp\frac{1}{C-x}.$$

6.245. $(2yy''-y'^2)^3+32y''(xy''-y')^3=0.$

$$C_1C_2^3y=(C_1^2x+1)^2+2C_2^2 \quad 和 \quad y^2=8x.$$

6.246. $\sqrt{ay''^2+by'^2}+cyy''+dy'^2=0;$

第一部分 15.3 节中讨论过的那种类型的方程.

假设 $p(y)=y'(x)$, 则得到

$$\sqrt{ap'^2+b}+cyp'+dp=0.$$

6.246 a. $f(y''+y)=y''^2+y'^2.$

微分之后,得到

$$[f'(y''+y)-2y''](y'''+y')=0.$$

由方程 $y'''+y'=0$ 得到解

$$y=A\sin(x+B)+C, 其中 A^2=f(C).$$

如果令方括号中的表达式等于零,并假设 $y''+y=u$, 则得到参数形式的奇异解

$$x=\int\frac{2-f''(u)}{\sqrt{4f(u)-f'^2(u)}}du,\quad y=u-\frac{1}{2}f'(u)$$

E Goursat, *Nouvelles Annales Math* (4), 20(1920),p. 385.

6.247. $F\left(y+\frac{y'^2}{y''},\ x+\frac{y'-y'^3}{2y''}\right)=0.$

其解可由等式

$$(y-a)^2=2C(x-b)+C^2$$

得到,如果这里 $F(a,b)=0$. 关于用这种方法 能否得到

所有的解的问题，需要专门的研究．

见．G. Boole, A Treatise of Differential Equations, Cambridge, 1859, p. 225.

6.248. $F\left(y'', y'-xy'', y-xy'+\frac{1}{2}x^2y''\right)=0.$

所有形式为

$$y=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$$

的函数，显然是此方程的解，如果$F(a, b, c)=0$.

Ince, p. 45.

6.249. $F\left(x-\frac{y'^2+1}{y''}y', y+\frac{y'^2+1}{y''}, \frac{(y'^2+1)^{3/2}}{y''}\right)=0.$

此方程是二阶克莱罗方程．如果数 a, b, r 属于函数 $F(u, v, w)$ 的定义域，并且如果这些数满足方程 $F(a, b, r)=0$，则圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

是一条积分曲线．

见 Serret, Scheffers, Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung, 卷 III, Leipzig und Berlin, 1924, p 403—406.

第七章 三阶和更高阶的非线性微分方程

7.1. $y''' = a^2(y'^5 + 2y'^3 + y')$.

由 7.19 得到解的参数表达式

$$ax = \int \Omega(u)\,du + C_2,\ ay = \int u\Omega(u)\,du + C_3,$$

其中

$$\frac{1}{\Omega} = \sqrt{C_1 + \frac{1}{3}(u^2+1)^3}.$$

7.2. $y''' + yy'' - y'^2 + 1 = 0$.

在粘性流体力学中常常遇到此方程.

由此方程和条件

"$y(0) = y'(0) = 0$,当$x \to \infty$时 $y'(x) \to 1$"

组成的边值问题，可以求得其幂级数形式的解.

见 B. Дюрэнд, Аэродинамика, 卷 III, 1937—1940, p.92.

7.3. $y''' - yy'' + y'^2 = 0$.

此方程可以化为阿贝耳方程(见第一部分,4.11节).

假设 $p(y) = y'(x)$,则得到

$$pp'' + p'^2 - yp' + p = 0;$$

然后,经过变换 $p(y) = y^2 u(\eta)$,可化为方程

$$uu'' + u'^2 + 7uu' - u' + 6u^2 - u = 0,$$

最后,假设 $u'(\eta) = q(u)$,则得到

$$uqq' + q^2 + (7u-1)q + 6u^2 - u = 0.$$

也可参阅 J. Chazy, *Acta Math.* 41(1918), p 63.

7.4. $y''' + ayy'' = 0$； 边界层方程.

假设 $y = \alpha\,\bar{y}$，则得到

$$\bar{y}''' + a\alpha\bar{y}\bar{y}'' = 0;$$

因此，具有不同系数 a 的方程不难相互转化.

根据第一部分 15.3 节 (a)，可将此方程化为阿贝耳方程(第一部分，4.11 节). 假设 $p(y) = y'(x)$，则得到

$$pp'' + p'^2 + ayp' = 0;$$

借助于变换 $p(y) = y^2 u(\eta)$, $\eta = \ln y$，由此得到方程

$$uu'' + u'^2 + 7\,uu' + au' + 6\,u^2 + 2\,au = 0,$$

然后，假设 $u'(\eta) = q(u)$，则有

$$uqq' + q^2 + (7\,u + a)q + 6\,u^2 + 2\,au = 0.$$

由 $a = 1$ 时的原方程和边界条件"$y(0) = y'(0) = 0$，当 $x \to \infty$ 时 $y'(x) \to 2$" 组成的边值问题，在研究平板的空气层流绕流时常常会遇到；其解可以表示为幂级数的形式.

见 B Дюрэнд. Аэродинамика, 卷 III, 1937—1940, p. 85.

7.5. $x^2y''' + xy'' + (2xy - 1)y' + y^2 = f(x)$.

全微分方程. 因此，可将其化为方程

$$x^2y'' - xy' + xy^2 = \int f(x)\,dx.$$

7.6. $x^2y''' + x(y-1)y'' + xy'^2 + (1-y)y' = 0$.

除以x^2，则得到全微分方程，此全微分方程可以化为

$$xy'' + (y-1)y' = Cx.$$

7.7. $yy''' - y'y'' + y^3y' = 0$.

除以 y^2，则得到全微分方程，由此全微分方程求出

$$\frac{y''}{y} + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

将此方程乘以 yy'，又得到全微分方程，由此方程求得

$$y'=\pm\sqrt{C_0+C_1y^2-\frac{1}{4}y^4}\ .$$

7.7a. $\boldsymbol{yy'''+ay'y''+f(y)y'=0}$.

乘以 y^{a-1}，则得到全微分方程，由此方程求得

$$y^a y''+\int y^{a-1}f(y)\,dy=C_1.$$

将这个方程乘以 $2y'y^{-a}$，又可对它进行积分，于是化为一阶方程

$$y'^2=C_2+2\int y^{-a}\left[C_1-\int y^{a-1}f(y)\,dy\right]dy.$$

K. Wieghardt, *Zeitschrift f angew. Math. Mech* 23(1943), p. 125.

7.7b. $\boldsymbol{y^2y'''+3yy''=y''\sqrt{16y^3y''+1}}$; 见 7.12a.

7.8. $\boldsymbol{4y^2y'''-18yy'y''+15y'^3=0}$.

此方程可以写为下列形式：

$$-8y^{\frac{7}{2}}\frac{d^3}{dx^3}y^{-\frac{1}{2}}=0.$$

因此，得到

$$y=C\quad 和\quad y^{-\frac{1}{2}}=C_2x^2+C_1x+C_0.$$

7.9. $\boldsymbol{9y^2y'''-45yy'y''+40y'^3=0}$.

乘以 $y^{-\frac{11}{3}}$，则得到全微分方程，因此可以化为第一部分 23.1 节中讨论过的那种类型的方程

$$9y^{-\frac{5}{3}}y''-15y^{-\frac{8}{3}}y'^2=C.$$

借助于变换 $u(x)=y^{-\frac{2}{3}}$ 来求原方程的解最为简单。可

以得到 $u'''=0$，因而

$$y^2=(C_2x^2+C_1x+C_0)^{-3}.$$

7.10. $2y'y'''-3y''^2=0$.

根据6.150，得到

$$y=\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

其中 A, B, C, D 为任意数.

7.11. $(y'^2+1)y'''-3y'y''^2=0$.

借助于6.192，得到下列所有的圆的集合：

$$(y-C_1)^2+(x-C_2)^2=C_3^2.$$

7.12. $(y'^2+1)y'''-(3y'+a)y''^2=0$.

假设 $p(x)=y'$，则得到6.54型的方程．于是有

$$p'(x)=C(p^2+1)^{\frac{3}{2}}\exp(a\ \mathrm{arctg}\ p)$$

其次，假设 $t=\mathrm{arctg}\ p$，则得到参数形式的解

$$x=C_2+C_1e^{-at}(a\cos t-\sin t),$$

$$y=C_3+C_1e^{-at}(a\sin t+\cos t).$$

当 $a\neq 0$ 时，此解为对数螺线，而当 $a=0$ 时，则为圆。

7.12 a. $\frac{d}{dx}(\varphi(y)y'')=f(y)F(\varphi(y)y'')$，$f\neq 0$

因为此方程中不显含 x，则根据第一部分15.3节(a)，可以降低方程的阶．可以这样来进行：解方程

$$u'(t)=F(u) \tag{1}$$

并且假设

$$v(y)=\int f(y)dy;$$

由后一方程，作为 v 的函数确定 $y=Y(v)$．假设 $v=v(t)$，借助于函数 $Y(v)$ 建立方程

$$v''(t)=\frac{u(t)}{\varphi(Y(v))f(Y(v))},\tag{2}$$

对此方程的某一个解 $v(t)$，假设

$$x=\int\frac{dt}{f(Y(v(t)))},$$

由此作为 x 的函数得到 $t=t(x)$。这时，

$$y(x)=Y(v(t(x)))$$

是原方程的解。

当

$$\varphi(y)=y^3,\quad f(y)=\frac{1}{y^2},\quad F(u)=\sqrt{16u+1}$$

时，得到方程 7.7 b。

在这种情况下，方程(1)具有下列形式：

$$u'(t)=u\sqrt{16u+1}.$$

由此得到

$$\frac{1}{16u}=\mathrm{sh}^2\frac{t-t_0}{2}\quad 和\quad \frac{1}{16u}=-\mathrm{ch}^2\frac{t-t_0}{2}.$$

所以，方程(2)分别具有下列形式：

$$16v''\mathrm{sh}^2\frac{t-t_0}{2}+v=0,$$

和

$$16v''\mathrm{ch}^2\frac{t-t_0}{2}-v=0.$$

这是方程 2.410 a 和 2.410 b．

7.13. $y''y'''=a\sqrt{b^2y''^2+1}$。

假设 $u(x)=y''^2$，则得到不难求解的方程 $u'=2a\sqrt{b^2u+1}$。最后，借助 7.19，得到参数形式的解

$$x=C_1+\frac{v}{ab^2}\quad(v=\sqrt{b^2u^2+1}),$$

$$y=C_2+C_3\frac{v}{ab^2}+\frac{u^3}{6a^2b^2}+\frac{u}{2a^2b^4}-\frac{v}{2a^2b^5}\ln(bu+v).$$

7.14. $y'y^{(4)}-y''y'''+y'^3y'''=0$；见 7.8 和 7.16.

7.15. $y'(fy')'''-y''(fy')''+y'^3(fy')'+2qy'^2\sin y+$
$+(qy''-q'y')\cos y=0, f=f(x),\ q=q(x).$

在轴向力的作用下而弯曲的细杆方程；细杆的形状为一曲线，取其弧长为自变量 x. 如果相应地用 s 来代替 x，而将 y 写为 ϑ，则此方程具有下列形式：

$$\vartheta'(f\vartheta')'''-\vartheta''(f\vartheta')''+\vartheta'^3(f\vartheta')'+$$
$$+2q\vartheta'^2\sin\vartheta+(q\vartheta''-q'\vartheta')\cos\vartheta=0,$$

其中 $f=f(s),\ q=q(s),\ \vartheta=\vartheta(s)$. 乘以 $\frac{\cos\vartheta}{\vartheta'^2}$，则得到全微分方程. 进行积分并乘以 ϑ'，则有

$$(f\vartheta')''\cos\vartheta+(f\vartheta')'\vartheta'\sin\vartheta-q\cos^2\vartheta=C_1\vartheta'.$$

除以 $\cos^2\vartheta$，可以再积分一次，然后乘以 $\cos\vartheta$，得到

$$(f\vartheta')'=C_1\sin\vartheta+C_2\cos\vartheta+\cos\vartheta\int_{s_0}^{s}q(\sigma)d\sigma.$$

为了化为直角坐标 x, y，引进方程

$$x'(s)=\cos\vartheta,\quad y'(s)=\sin\vartheta,$$

于是我们可以再次积分，最后得到

$$f\vartheta'=C_1y+C_2x+C_3+\int_{s_0}^{s}q(\sigma)[x(s)-x(\sigma)]d\sigma.$$

7.16. $3y''y^{(4)}-5y'''^2=0.$

借助于 6.157，得到

$$(y+C_1x+C_2)^2=C_3x+C_4.$$

7.17. $9y''^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40y'''^3=0$。

借助 7.9，得到

$$(y+C_1x+C_2)^2=C_3x^2+C_4x+C_5.$$

7.18. $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$。

假设 $u(x)=y^{(n-1)}$，则得到 $u'=f(u)$。由等式

$$x=\int\frac{du}{f(u)}+C$$

求得 u, 进行 $n-1$ 次积分后，得到 y.参数形式的解为：

$$x=\int_C^u\frac{du}{f(u)},\quad y=\int_{C_1}^u\frac{du_1}{f(u_1)}\int_{C_2}^u\frac{du_2}{f(u_2)}\cdots\int_{C_{n-1}}^{u_{n-2}}\frac{u_{n-1}du_{n-1}}{f(u_{n-1})}.$$

7.19. $y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$。

假设 $u(x)=y^{(n-2)}$，则得到第一部分 23 .1 节讨论过的那种类型的方程

由等式

$$x=\pm\int\left[C_1+2\int f(u)\,du\right]^{-1}du+C$$

解出 u，且进行 $n-2$ 次积分后，则得到 y。参数形式的解为：

$$x=\int_C^u\frac{du}{\varphi(u)},\quad y=\int_{C_1}^u\frac{du_1}{\varphi(u_1)}\int_{C_2}^{u_1}\frac{du_2}{\varphi(u_2)}\cdots\int_{C_{n-2}}^{u_{n-3}}\frac{u_{n-2}du_{n-2}}{\varphi(u_{n-2})},$$

其中

$$\varphi(u)=\pm\left[C+2\int f(u)\,du\right]^{\frac{1}{2}}.$$

第八章　线性微分方程组

在下列微分方程组中，同以前的叙述不同，自变量用 t 表示，未知函数用 $x, y, z, \cdots$ 表示。

由于这里介绍的方程组总数不多，因而没有必要说明在确定每一节中方程组的排列次序时所遵循的原则。

［至于进一步的实例和理论，则可参阅第三部分“几点说明”中指出的那些著作．——俄译本编者注．］

1—18．两个一阶常系数微分方程的方程组

8.1. $x'(t)=ax,\ y'(t)=by,\ a\neq0,\ b\neq0;$

方程组 8.5 的特殊情况．

$$x=C_1e^{at},\quad y=C_2e^{bt}.$$

如果将这些解看作为 xy 平面上某一条曲线的参数方程，则可能有下述几种情况：

(a) $a=b$．积分曲线是从坐标原点出发的射线 $C_2x=C_1x$。坐标原点是结点。

(b) $a\neq b,\ ab>0$。坐标原点仍然是结点．如果，例如，$a=1, b=2$，则积分曲线是抛物线 $y=Cx^2$ 和坐标轴；在所有这些曲线中，坐标原点应当除掉．

(c) $a\neq b,\ ab<0$．坐标原点是鞍点．如果，例如，$a=1$，$b=-1$，则积分曲线是双曲线 $xy=C$ 和除掉点 $(0,0)$ 的坐标轴．

8.2. $x'(t)=ay,\ y'(t)=-ax,\ a\neq0;$

方程组 8.3 的特殊情况.

$$x=C_1\cos at+C_2\sin at,\quad y=C_2\cos at-C_1\sin at.$$

这是平面 xy 上的圆.

8.3. $\boldsymbol{x'(t)=ay,\ y'(t)=bx}$, $a\neq0,\ b\neq0$;

方程组 8.5 的特殊情况.

应当区分两种情况:

(a) $ab>0$. 假设 $s^2=ab$, 则有

$$x=C_1ae^{st}+C_2ae^{-st},\ y=C_1se^{st}-C_2se^{-st}.$$

如果将这些解看作 xy 平面上某一条曲线的参数方程, 则积分曲线是双曲线

$$bx^2-ay^2=C\quad(C\gtrless0)$$

及其渐近线 $bx^2=ay^2$, 点(0,0)除外; 当 $a=b$ 时, 得到等边双曲线. 坐标原点是鞍点.

(b) $ab<0$. 假设 $s^2=-ab$, 则有

$$x=C_1a\cos st+C_2a\sin st,\ y=C_2s\cos st-C_1s\sin st.$$

这是椭圆

$$|b|x^2+|a|y^2=C^2$$

的参数方程; 当 $b=-a$ 时, 则得到中心在坐标原点的圆, 坐标原点是奇点(中心).

8.4. $\boldsymbol{x'(t)=ax-y,\quad y'(t)=x+ay}$;

方程组 8.5 的特殊情况.

$$x=e^{at}(C_1\sin t+C_2\cos t),\ y=e^{at}(C_2\sin t-C_1\cos t).$$

由此得到

$$x^2+y^2=(C_1^2+C_2^2)e^{2at}.$$

当 $a=0$ 时, 积分曲线是中心在坐标原点的圆. 当 $a\neq0$ 时, 积分曲线围绕坐标原点旋转, 形状为螺旋线. 坐标原点是焦点.

8.5. $\boldsymbol{x'(t)=ax+by,\ y'(t)=cx+dy}$.

见第一部分，7.2节；7.3节；13.1节。

［下述事实的详细证明，可在下列著作中找到：Петровский; Понтрягин; Степанов; Андронов, Витт, 和 Хайкин, 等等——俄译本编者注。］

(A) $ad-bc\neq 0$。坐标原点 $x=y=0$ 是此方程组的唯一的静止点（在第一部分7.2节所指出的那种意义下）；坐标原点是

结点：当 $(a-d)^2+4bc=0$ 时

结点：当 $(a-d)^2+4bc>0$, $ad-bc>0$ 时，

鞍点：当 $(a-d)^2+4bc>0$, $ad-bc<0$ 时，

焦点：当 $(a-d)^2+4bc<0$, $a+d\neq 0$ 时，

中心：当 $(a-d)^2+4bc<0$, $a+d=0$ 时。

特征方程（见第一部分，13.1节）具有下列形式：

$$s^2-(a+d)s+ad-bc=0.$$

(a) $(a-d)^2+4bc>0$。在这种情况下，特征方程具有两个不同的实根 s_1 和 s_2。如果由方程

$$A_\nu(a-s_\nu)+bB_\nu=0,\ A_\nu c+(d-s_\nu)B_\nu=0\quad(\nu=1,2)$$

确定数 A_ν, B_ν, 则函数

$$x_\nu=A_\nu e^{s_\nu t},\ y_\nu=B_\nu e^{s_\nu t}\quad(\nu=1,2)$$

构成给定的方程组的基本解组.

(b) $(a-d)^2+4bc<0$. 在这种情况下，特征方程具有两个共轭复根 $s=\sigma\pm i\tau\,(\tau\neq 0)$. 所论方程组的解具有下列形式：

$$x=e^{\sigma t}\{bC_1\sin\tau t+bC_2\cos\tau t\},$$

$$y=e^{\sigma t}\{[(\sigma-a)C_1-\tau C_2]\sin\tau t+[\tau C_1+(\sigma-a)C_2]\cos\tau t\}.$$

(c) $(a-d)^2+4bc=0$; $a\neq d$

$$x=\left[2bC_1+\left(2bt+\frac{2b}{a-d}\right)C_2\right]\exp\frac{a+d}{2}t,$$

$$y=[(d-a)C_1+((d-a)t+1)C_2]\exp\frac{a+d}{2}t.$$

(d) $a=d\neq 0,\ b=0.$

$$x=C_1e^{at},\quad y=(cC_1t+C_2)e^{at}.$$

(e) $a=d\neq 0,\quad c=0.$

$$x=(bC_1t+C_2)e^{at},\ y=C_1e^{at}.$$

(B) $ad-bc=0,\ a^2+b^2>0$. 整个直线 $ax+by=0$ 将是由奇点组成的. 所论方程组可以写为下列形式:

$$x'=ax+by,\ y'=\lambda(ax+by).$$

当 $a+\lambda b\neq 0$ 时,其解具有下列形式:

$$x=bC_1+C_2\exp(a+\lambda b)t,\quad y=-aC_1+\lambda C_2\exp(a+\lambda b)t,$$

而当 $a+\lambda b=0$ 时,其解具有下列形式:

$$x=C_1(b\lambda t-1)+bC_2t,\ y=\lambda^2bC_1t+(b\lambda^2t+1)C_2.$$

8.6. $ax'(t)+by'(t)=\alpha x+\beta y,\ bx'(t)-ay'(t)=\beta x-\alpha y;$

方程组 8.5 的特殊情况.

也就是说,可以变换这些微分方程,使得其中一个方程只含有导数 x',而另一个方程只含有 y'. 于是得到解:

$$x=e^{At}(C_1\cos Bt+C_2\sin Bt),$$

$$y=e^{At}(C_2\cos Bt-C_1\sin Bt),$$

其中 A,B 由方程

$$(a^2+b^2)A=a\alpha+b\beta,\ (a^2+b^2)B=a\beta-b\alpha$$

确定,而 $a\beta-b\alpha$ 应当不为零. 如果 $a\beta-b\alpha=0$,但是 $|a|+|b|>0$,则存在这样的数 λ,使得 $\alpha=\lambda a,\ \beta=\lambda b$. 这时,其解可以写为下列形式:

$$x=C_1e^{\lambda t},\quad y=C_2e^{\lambda t}.$$

8.7. $x'(t)=-y,\ y'(t)=2x+2y;$

方程组 8.5 的特殊情况.

$$x=e^t[C_1\sin t+C_2\cos t],$$

$$y=e^t[(C_2-C_1)\sin t-(C_2+C_1)\cos t].$$

8.8. $x'(t)+3x+4y=0,\ y'(t)+2x+5y=0;$

方程组 8.5 的特殊情况。

$$x=2C_1e^{-t}+C_2e^{-7t},\quad y=-C_1e^{-t}+C_2e^{-7t}.$$

8.9. $x'(t)=-5x-2y,\ y'(t)=x-7y;$

方程组 8.5 的特殊情况。

$$x=[2C_1\cos t+2C_2\sin t]e^{-6t},$$
$$y=[(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t]e^{-6t}.$$

8.10. $x'(t)=a_1x+b_1y+c_1,\quad y'(t)=a_2x+b_2y+c_2.$

对应齐次方程组的解，可由 8.5 得知．所以，根据第一部分 8.1 节，只要求出所论方程组的任何一个解便足够了．

(A) $a_1b_2-a_2b_1\neq0$. $x=A$, $y=B$ 是解，这里 A, B 由方程

$$a_1A+b_1B+c_1=0,\quad a_2A+b_2B+c_2=0$$

确定。

(B) $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_1^2+b_1^2>0$. 在这种情况下，所论方程组具有下列形式：

$$x'=ax+by+c_1,\quad y'=\lambda(ax+by)+c_2.$$

如果 $r=a+b\lambda\neq0$, 则

$$x=\frac{b}{r}(c_1\lambda-c_2)t-\frac{1}{r^2}(ac_1+bc_2),\quad y=\lambda x+(c_2-\lambda c_1)t$$

是一个解．如果 $a+b\lambda=0$, 则

$$x=\frac{1}{2}b(c_2-c_1\lambda)t^2+c_1t,\quad y=\lambda x+(c_2-c_1\lambda)t$$

是一个解．

8.11. $x'(t)+2y=3t,\ y'(t)-2x=4.$

对应的齐次方程组，可以根据 8.5 来求解．非齐次

方程组的一个解,可以根据第一部分8.3节求得(对8.12,8.13,8.15—8.18 的情况,也是如此)。于是得到通解:

$$x=-\frac{5}{4}+C_1\cos 2t-C_2\sin 2t,$$

$$y=\frac{3}{2}t+C_1\sin 2t+C_2\cos 2t.$$

8.12. $x'(t)+y=t^2+6t+1, y'(t)-x=-3t^2+3t+1.$

$$x=3t^2-t-1+C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$y=t^2+2+C_1\sin t-C_2\cos t.$$

8.13. $x'(t)+3x-y=e^{2t}, y'(t)+x+5y=e^t.$

$$900x=36e^t+175e^{2t}+(C_1+C_2+C_2t)e^{-4t},$$

$$900y=144e^t-25e^{2t}-(C_1+C_2t)e^{-4t}.$$

8.14. $x'(t)+y'(t)+2x+y=e^{2t}+t,$

$x'(t)+y'(t)-x+3y=e^{-t}-1.$

这里不能像上述情况那样进行,因为我们不能将 $x'+y'$ 分开。由第一个方程减去第二个方程,则得到

$$3x-2y=e^{2t}-e^{-t}+t+1 \qquad (1)$$

由此方程解出 y, 并将求得的值代入原方程组的第一个方程,则得到只含 x 的线性方程; 由此方程求得

$$x=Ce^{-\frac{7}{5}t}+\frac{5}{17}e^{2t}+\frac{3}{7}t-\frac{1}{49}.$$

将所得到的表达式代入(1),求得 y。

8.15. $x'(t)+y'(t)-y=e^t, 2x'(t)+y'(t)+2y=\cos t.$

$$x=e^t+\frac{5}{17}\sin t-\frac{3}{17}\cos t+C_1+3C_2e^{4t},$$

$$y=-\frac{2}{3}e^t-\frac{1}{17}\sin t+\frac{4}{17}\cos t-4C_2e^{4t}.$$

8.16. $4x'(t)+9y'(t)+2x+31y=e^t,$

$3x'(t)+7y'(t)+x+24y=3.$

由此方程组解出 x' 和 y'，然后像 8.11 中那样来进行，则得到

$$x=\frac{31}{26}e^{t}-\frac{93}{17}+(C_1\cos t+C_2\sin t)e^{-4t},$$

$$y=-\frac{2}{13}e^{t}+\frac{6}{17}+[(C_1-C_2)\sin t-(C_1+C_2)\cos t]e^{-4t}.$$

8.17. $4x'(t)+9y'(t)+11x+31y=e^{t},$
$3x'(t)+7y'(t)+8x+24y=e^{2t}.$

按照 8.16 那样，得到

$$x=\frac{31}{25}e^{t}-\frac{49}{36}e^{2t}+(C_1t+C_2)e^{-4t},$$

$$y=-\frac{11}{25}e^{t}+\frac{19}{36}e^{2t}-(C_1t+C_1+C_2)e^{-4t}.$$

8.18. $4x'(t)+9y'(t)+44x+49y=t,$
$3x'(t)+7y'(t)+34x+38y=e^{t}.$

按照 8.16 那样，得到

$$x=\frac{19}{3}t-\frac{56}{9}-\frac{29}{7}e^{t}+C_1e^{-6t}+C_2e^{-t},$$

$$y=-\frac{17}{3}t+\frac{55}{9}+\frac{24}{7}e^{t}+4C_1e^{-6t}-C_2e^{-t}.$$

19—25. 两个一阶变系数微分方程的方程组

8.19. $x'(t)=xf(t)+yg(t),\ y'(t)=-xg(t)+yf(t).$

$$x=(C_1\cos G+C_2\sin G)F,$$
$$y=(-C_1\sin G+C_2\cos G)F,$$

其中 $F=\exp\int f(t)\,dt,\ G=\int g(t)\,dt.$

8.20. $x'(t)+(ax+by)f(t)=g(t),$
$y'(t)+(cx+dy)f(t)=h(t).$

(a) $ad-bc\neq 0$. 将第一个方程乘以 α，将第二个方程乘以 β，并且将它们相加. 得到

$$\alpha x'+\beta y'+[(\alpha a+\beta c)x+(\alpha b+\beta d)y]f(t)=\alpha g+\beta h. \quad (1)$$

然后，选择 α,β，使得当适当选取数 s 时，等式

$$\alpha a+\beta c=s\alpha \text{ 和 } \alpha b+\beta d=s\beta$$

成立.为此，s 应当是特征方程

$$s^2-(a+d)s+ad-bc=0$$

的根。这时，假设 $z(t)=\alpha x+\beta y$，则由(1)得到线性方程

$$z'(t)+szf(t)=\alpha g(t)+\beta h(t), \quad (2)$$

此方程可以直接求解. 如果特征方程具有两个不同的根 s_1,s_2，则对于 s_1 和 s_2 可以应用上述方法，而对于具有数值 α_ν,β_ν $(\nu=1,2)$ 的 z_ν 得到两个方程(2)。求解这两个方程，由

$$\alpha_1x+\beta_1y=z_1,\quad \alpha_2x+\beta_2y=z_2$$

得到原方程组的解.

(b) $ad-bc=0$, $|a|+|b|>0$. 原方程组可以写为下列形式：

$$x'+(ax+by)f(t)=g(t),\ y'+\lambda(ax+by)f(t)=h(t).$$

其解可由不难求解的方程

$$x'+(a+b\lambda)xf(t)=g(t)+bf(t)\int(\lambda g-h)dt.$$

和由方程

$$y=\lambda x+\int(h-\lambda g)dt$$

得到.

8.21. $x'(t)=x\cos t,\ y'(t)=xe^{-\sin t}$.

$$x=C_1\exp\sin t,\ y=C_1t+C_2.$$

8.22. $tx'(t)+y=0,\ ty'(t)+x=0.$

$$x=C_1t+\frac{C_2}{t},\ y=-C_1t+\frac{C_2}{t}.$$

8.23. $tx'(t)+2x=t,\ ty'(t)-(t+2)x-ty=-t.$

$$x=\frac{t}{3}+C_1t^{-2},\ y=-x+C_2e^t,$$

8.24. $tx'(t)+2(x-y)=t,\ ty'(t)+x+5y=t^2.$

$$x=\frac{3t}{10}+\frac{t^2}{15}+2C_1t^{-3}+C_2t^{-4},\ \ y=-\frac{t}{20}+\frac{2t^2}{15}-C_1t^{-3}-C_2t^{-4}.$$

8.25. $t^2(1-\sin t)x'(t)=t(1-2\sin t)x+t^2y,$

$t^2(1-\sin t)y'(t)=(t\cos t-\sin t)x+t(1-t\cos t)y.$

$$x=C_1t^2+C_2t,\ y=C_1t+C_2\sin t.$$

26—43. 两个高于一阶的微分方程的方程组

8.26. $x'(t)+y'(t)+y=f(t),$

$x''(t)+y''(t)+y'(t)+x+y=g(t).$

唯一的解为：

$$x=g+g'-f-f'-f'',\ \ y=f+f''-g'.$$

初看起来，这同存在定理（第一部分5.2节）是矛盾的。但是，存在定理只适用于可以写为这种形式的方程组：左端只含未知函数的导数，并且每一个方程只含有一个未知函数的导数，而方程的右端不含导数。上述方程组是不能写成这种形式的。

8.27. $2x'(t)+y'(t)-3x=0,\ x''(t)+y'(t)-2y=e^{2t}.$

$$x=\frac{1}{4}e^{2t}+C_1e^t+[4C_2\cos\alpha t+4C_3\sin\alpha t]e^{\frac{1}{2}t},$$

$$y=-\frac{1}{8}e^{2t}+C_1e^t+$$

$$+[(-7C_2-C_3\sqrt{23})\cos\alpha t+(C_2\sqrt{23}-7C_3)\ \sin\alpha t]e^{\frac{1}{2}t},$$

其中 $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{23}$.

8.28. $x'(t)-y'(t)+x=2t,$

$x''(t)+y'(t)-9x+3y=\sin 2t.$

$$x=(C_1+C_2t)e^t+3C_3e^{-3t}-$$
$$-\frac{36}{325}\sin 2t-\frac{2}{325}\cos 2t+2t+4,$$
$$y=[2C_1+C_2(2t-1)]e^t+$$
$$+2C_3e^{-3t}+\frac{16}{325}\cos 2t+\frac{37}{325}\sin 2t+6t+10.$$

8.29. $x'(t)-x+2y=0,\ x''(t)-2y'(t)=2t-\cos 2t.$

消去 y',则得到

$$x=2C_1+4C_2e^{\frac{t}{2}}-t^2-4t+\frac{\sin 2t+4\cos 2t}{34},$$

$$y=C_1+C_2e^{\frac{t}{2}}-\frac{t^2}{2}-t+2+\frac{9\sin 2t+2\cos 2t}{68}.$$

8.30. $tx'(t)-ty'(t)-2y=0,\ tx''(t)+2x'(t)+tx=0.$

$$x=C_2\frac{\cos t}{t}+C_3\frac{\sin t}{t},$$
$$y=\frac{C_1}{t^2}+C_2\left(\frac{\cos t}{t}-\frac{2\sin t}{t^2}\right)+C_3\left(\frac{\sin t}{t}+\frac{2\cos t}{t^2}\right).$$

8.31. $x''(t)+a^2y=0,\ y''(t)-a^2y=0,\ a\neq 0;$

方程组 8.32 的特殊情况.

$$x=(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)e^{\alpha t}+$$
$$+(C_3\cos\alpha t+C_4\sin\alpha t)e^{-\alpha t},$$
$$y=(C_1\sin\alpha t-C_2\cos\alpha t)e^{\alpha t}+$$
$$+(-C_3\sin\alpha t+C_4\cos\alpha t)e^{-\alpha t},$$

其中 $2\alpha^2=a^2$

8.32. $x''(t)=ax+by,\ y''(t)=cx+dy.$

特征方程(同第一部分 13.1 节相比较)：

$$s^4-(a+d)s^2+ad-bc=0.$$

(A) $ad-bc\neq 0$.

(a) $(a-d)^2+4bc\neq 0$. 特征方程具有四个不同的根 $s_1, \cdots, s_2$. 其解具有下列形式：

$$x=\sum_{\nu=1}^{4} A_\nu e^{s_\nu t},\quad y=\sum_{\nu=1}^{4} B_\nu e^{s_\nu t},$$

其中 A_ν, B_ν 由方程

$$A_\nu(a-s_\nu^2)+B_\nu b=0,\quad A_\nu c+B_\nu(d-s_\nu^2)=0$$

来确定.

(b) $(a-d)^2+4bc=0, a\neq d$. 基本解组：

$$x_{1,2}=\left[2bt\pm\frac{4b}{a-d}\sqrt{2(a+d)}\right]E,\ y_{1,2}=(d-a)tE,$$

$$x_{3,4}=2btE,\ y_{3,4}=[(d-a)t\pm 2\sqrt{2(a+d)}]E,$$

其中

$$E=\exp\left(\pm t\sqrt{\frac{a+d}{2}}\right).$$

(c) $a=d\neq 0, b=0$: $x=C_1E,\ y=\left(\frac{1}{2}C_1\frac{c}{\sqrt{a}}t+C_2\right)E.$

(d) $a=d\neq 0, c=0$: $x=\left(\frac{1}{2}C_1\frac{b}{\sqrt{a}}t+C_2\right)E,\ y=C_1E.$

(B) $ad-bc=0,\ a^2+b^2>0$. 所论方程组可以写为下列形式：

$$x''=ax+by,\quad y''=\lambda(ax+by).$$

(a) $a+b\lambda\neq 0$:

$$x=C_1\exp(t\sqrt{a+b\lambda})+C_2\exp(-t\sqrt{a+b\lambda})+C_3bt+C_4b,$$

$$y=C_1\lambda\exp(t\sqrt{a+b\lambda})+C_2\lambda\exp(-t\sqrt{a+b\lambda})-C_3at-C_4a.$$

(b) $a+b\lambda=0$:

$$x=C_1bt^3+C_2bt^2+C_3t+C_4,\quad y=\lambda x+6C_1t+2C_2.$$

8.33. $x''(t)=a_1x+b_1y+c_1,\ y''(t)=a_2x+b_2y+c_2.$

对应齐次方程组，可以根据 8.32 来求解。所以，只要找出非齐次方程组的任何一个解便足够了。

(A) $a_1b_2-a_2b_1\neq0$。 $x=A$, $y=B$ 是解，其中 A, B 由方程

$$a_1A+b_1B+c_1=0,\quad a_2A+b_2B+c_2=0$$

来确定。

(B) $a_1b_2-a_2b_1=0$。 在这种情况下，所论方程组可以写为下列形式：

$$x''=ax+by+c_1,\quad y''=\lambda(ax+by)+c_2.$$

如果 $r=a+b\lambda\neq0$, 则

$$x=\frac{b}{2r}(\lambda c_1-c_2)t^2-\frac{1}{r^2}(ac_1+bc_2),$$

$$y=\lambda x+\frac{1}{2}(c_2-\lambda c_1)t^2$$

是一个解。

如果 $a+b\lambda=0$，则

$$x=b(c_2-\lambda c_1)\frac{t^4}{4!}+c_1\frac{t^2}{2},\quad y=\lambda x+\frac{1}{2}(c_2-\lambda c_1)t^2$$

是一个解。

8.34. $x''(t)+x+y=-5,\ y''(t)-4x-3y=-3;$

方程组 8.33 的特殊情况。

$$x=18-[tC_1+(t-1)C_2]e^t-[tC_3+(t+1)C_4]e^{-t},$$

$$y=-23+[(2t+2)C_1+2tC_2]e^t+$$
$$+[(2t-2)C_3+2tC_4]e^{-t}.$$

8.35. $x''(t)=[3\cos^2(at+b)-1]c^2x+\frac{3}{2}c^2y\sin2(at+b)$,

$y''(t)=[3\sin^2(at+b)-1]c^2y+\frac{3}{2}c^2x\sin2(at+b)$.

由这些方程得到($\tau=at+b$)

$x''\cos\tau+y''\sin\tau=2c^2(x\cos\tau+y\sin\tau)$,

$x''\sin\tau-y''\cos\tau=c^2(y\cos\tau-x\sin\tau)$,

其次，如果假设

$u(t)=x\cos\tau+y\sin\tau,\quad v(t)=x\sin\tau-y\cos\tau$,

则有

$u''+2av'-(2c^2+a^2)u=0,\quad v''-2au'+(c^2-a^2)v=0$.

这样一来，给定的方程组化为常系数微分方程组.

8.36. $x''(t)+6x+7y=0,\quad y''(t)+3x+2y=2t$.

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+7C_3\cos3t+7C_4\sin3t+\frac{14t}{9},$$

$$y=-C_1e^t-C_2e^{-t}+3C_3\cos3t+3C_4\sin3t-\frac{4t}{3}.$$

8.37. $x''(t)-ay'(t)+bx=0,\quad y''(t)+ax'(t)+by=0$.

当研究摆的水平运动时，如果同时要考虑地球的转动,则常常遇到这种类型的方程组.

$x=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t+C_3\cos\beta t+C_4\sin\beta t$,

$y=-C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t-C_3\sin\beta t+C_4\cos\beta t$,

当 $a^2+4b>0$; $2\alpha, 2\beta=a\pm\sqrt{a^2+4b}$时.

8.38. $a_1x''+b_1x'+c_1x-Ay'=Be^{i\omega t}$,

$a_2y''+b_2y'+c_2y+Ax'=0$.

船舶和船舶陀螺仪的振动方程. 对应齐次方程组可以根据第一部分 13.2 节来求解,非齐次方程组的解可按

下列形式来寻找：

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t}.$$

E Hahnkamm, *Ingenieur-Archiv* 5(1934), p 169—178.

8.39. $x'' + a(x' - y') + b_1 x = c_1 e^{i\omega t}$,

$y'' + a(y' - x') + b_2 y = c_2 e^{i\omega t}$.

摩擦联结的振动系统的微分方程．为了解这些方程，8.38 中所述仍然适用．

关于解法的详细研究，见 E Hahnkamm, *Zeitschrift f. angew Math Mech.* 13(1933), p.183—202.

8.40. $a_{11}x'' + b_{11}x' + c_{11}x + a_{12}y'' + b_{12}y' + c_{12}y = 0$.

$a_{21}x'' + b_{21}x' + c_{21}x + a_{22}y'' + b_{22}y' + c_{22}y = 0$.

此方程组可用第一部分 §13 中的一般方法求解．

也可参阅 W. Quade, *Ingenieur-Archiv* 6(1935), p.15—34.

8.41. $x'' - 2x' - y' + y = 0, \quad y''' - y'' + 2x' - x = t$.

$$x = -t - 2 + 2C_1 e^{-t} - (2C_2 t + C_3) e^t,$$

$$y = -2 - 3C_1 e^{-t} + (C_2 t^2 + C_3 t + C_4) e^t.$$

8.42. $x''(t) + y''(t) + y'(t) = \operatorname{sh} 2t, \quad 2x''(t) + y''(t) = 2t$.

$$x = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} - \frac{1}{16} e^{2t} - \frac{2t+1}{8} e^{-2t} + C_1 + C_2 t + C_3 e^{-2t},$$

$$y = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{2t+1}{4} e^{-2t} - 2C_3 e^{-2t} + C_4.$$

8.43. $x''(t) - x'(t) + y'(t) = 0, x''(t) + y''(t) - x = 0$.

$$x = C_1 e^t + C_2 \alpha e^{\alpha t} + C_3 \beta e^{\beta t}, \quad y = C_4 - C_2 e^{\alpha t} - C_3 e^{\beta t},$$

其中 $2\alpha = 1 + \sqrt{5}, \quad 2\beta = 1 - \sqrt{5}$.

44—57. 多于两个微分方程的方程组

8.44. $x'(t) = 2x, \quad y'(t) = 3x - 2y, \quad z'(t) = 2y + 3z$.

这些方程可以一个接一个地逐次求解．

$$x=4C_1e^{2t},\ y=3C_1e^{2t}+5C_2e^{-2t},$$
$$z=-6C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}+C_3e^{3t}.$$

8.45. $x'(t)=4x,\ y'(t)=x-2y,\ z'(t)=x-4y+z.$

这些方程可以一个接一个地逐次求解。

$$x=18C_1e^{4t},\ y=3C_1e^{4t}+3C_2e^{-2t},$$
$$z=2C_1e^{4t}+4C_2e^{-2t}+C_3e^{t}.$$

8.46. $x'(t)=y-z,\ y'(t)=x+y,\ z'(t)=x+z.$

$$x=C_1+C_2e^{t},\ y=-C_1+(C_2t+C_3)e^{t},$$
$$z=-C_1+(C_2t-C_2+C_3)e^{t}.$$

8.47. $x'(t)-y+z=0,\ y'(t)-x-y=t,\ z'(t)-x-z=t.$

由这些方程得到$y'-z'=y-z$，即$y-z=C_1e^{t}$．现在不难求解第一个方程，然后去解其余两个方程．于是得到

$$x=C_1e^{t}+C_2,\ y=(C_1t+C_3)e^{t}-t-1-C_2,\ z=y-C_1e^{t}.$$

8.48. $ax'(t)=bc(y-z),\quad by'(t)=ca(z-x),$
$cz'(t)=ab(x-y).$

$$x=C_0+rC_1\cos rt+\frac{bc}{a}(C_2-C_3)\sin rt,$$

$$y=C_0+rC_2\cos rt+\frac{ca}{b}(C_3-C_1)\sin rt,$$

$$z=C_0+rC_3\cos rt+\frac{ab}{c}(C_1-C_2)\sin rt,$$

其中

$$r^2=a^2+b^3+c^2,\ a^2C_1+b^2C_2+c^2C_3=0.$$

由这些方程直接得到

$$a^2x'+b^2y'+c^2z'=0，\text{因而 } a^2x+b^2y+c^2z=C,$$

即积分曲线 $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$是平面曲线．

8.49. $x'(t)=cy-bz,\ y'(t)=az-cx,\ z'(t)=bx-ay$

$$x=aC_0+rC_1\cos rt+(cC_2-bC_3)\sin rt,$$

$$y = bC_0 + rC_2 \cos rt + (aC_3 - cC_1)\sin rt,$$
$$z = cC_0 + rC_3 \cos rt + (bC_1 - aC_2)\sin rt,$$

其中

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0.$$

由这些方程直接得到

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad \text{因而 } ax + by + cz = C,$$

即积分曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 是平面曲线. 其次, $xx' + yy' + zz' = 0$, 因此 $x^2 + y^2 + z^2 = C^*$, 即积分曲线同时还位于球面上.

因而,其解为圆.

8.50. $x'(t) = hy - gz$, $y'(t) = fz - hx$, $z'(t) = gx - fy$,

$$f = f(t),\ g = g(t),\ h = h(t).$$

首先得到 $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$. 由相应于 $C = 1$ 的解,乘以任意常数,可以得到其余所有的解。所以,只要研究 $C = 1$ 的情况便足够了. 如果当 $C = 1$ 时,由等式

$$x + iy = \xi(1 - z), \quad x - iy = \frac{z - 1}{\eta}$$

引入新的函数 $\xi(t)$, $\eta(t)$, 则对于 ξ 得到黎卡提方程

$$\xi' = \frac{g + if}{2}\xi^2 - ih\xi + \frac{g - if}{2}$$

和对于 η 的同样的方程.

8.51. $x'(t) = x + y - z$, $y'(t) = y + z - x$, $z'(t) = z + x - y$.

$$xe^{-t} = C_0 + C_1\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_2 - C_3)\sin t\sqrt{3},$$
$$ye^{-t} = C_0 + C_2\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_3 - C_1)\sin t\sqrt{3},$$
$$ze^{-t} = C_0 + C_3\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_1 - C_2)\sin t\sqrt{3},$$

其中

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

8.52. $x'(t) = -3x + 48y - 28z$, $y'(t) = -4x + 40y - 22z$,

$$z'(t) = -6x + 57y - 31z.$$

$$x = 3C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t},$$
$$y = 2C_1e^t + C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t},$$
$$z = 3C_1e^t + C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}.$$

8.53. $x'(t) = 6x - 72y + 44z$, $y'(t) = 4x - 43y + 26z$,

$z'(t) = 6x - 63y + 38z$.

$$x = 2C_1 + 3C_2e^{2t} + 4C_3e^{-t},$$
$$y = 2C_1 + 2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},$$
$$z = 3C_1 + 3C_2e^{2t} + C_3e^{-t}.$$

8.54. $x'(t) = ax + \gamma y + \beta z$, $y'(t) = \gamma x + by + \alpha z$,

$z'(t) = \beta x + \alpha y + cz$.

特征方程：

$$(s-a)(s-b)(s-c) - \alpha^2(s-a) - \beta^2(s-b) - \\ -\gamma^2(s-c) - 2\alpha\beta\gamma = 0.$$

如果假设

$$a - \frac{\beta\gamma}{\alpha} = b - \frac{\alpha\gamma}{\beta} = c - \frac{\alpha\beta}{\gamma} = \rho,$$

则得到解：

$$x = C_1e^{\rho t} + \frac{C}{\alpha}e^{\sigma t}, y = C_2e^{\rho t} + \frac{C}{\beta}e^{\sigma t}, z = C_3e^{\rho t} + \frac{C}{\gamma}e^{\sigma t},$$

其中

$$\frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta} + \frac{C_3}{\gamma} = 0, \quad \sigma = \rho + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

8.55. $tx'(t) = 2x - t, t^3y'(t) = -x + t^2y + t$,

$t^4z'(t) = -x - t^2y + t^3z + t$.

可以首先解这些方程中的第一个，然后解第二个，最后解第三个.

$$x = t + C_1t^2, \quad y = C_1 + C_2t, \quad z = C_1t^{-1} + C_2 + C_3t.$$

8.56. $atx'(t)=bc(y-z)$, $bty'(t)=ca(z-x)$,

$ctz'(t)=ab(x-y)$.

由方程组 8.48 的解，如果将其中的 t 换为 $\ln|t|$，则可得到此方程组的解.

8.57.

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \qquad\qquad\qquad\quad + ax_2 \quad + bx_3\cos ct + bx_4\sin ct,\\
x_2'(t) &= -ax_1 \qquad\qquad\qquad\quad + bx_3\sin ct - bx_4\cos ct,\\
x_3'(t) &= -bx_1\cos ct - bx_2\sin ct \qquad\qquad + ax_4,\\
x_4'(t) &= -bx_1\sin ct + bx_2\cos ct - ax_3.
\end{aligned}$$

由这些方程可知，其解满足方程组

$$x_1''+cx_2'+mx_1=0,\quad x_2''-cx_1'+mx_2=0$$

以及将其中的 x_1, x_2 换为 x_3, x_4后的同样的方程组；这里 $m=a^2+b^2+ac$. 这两个方程组中的每一个，都是 8.37 型的方程组. 如果 $c^2+4m>0$，则只须在方程组 8.37 的解中选择常数值，使得这些解满足所论方程组. 这样进行，则得到

$$\begin{aligned}
x_1 &= C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t + C_3\cos\beta t + C_4\sin\beta t,\\
x_2 &= C_1\sin\alpha t - C_2\cos\alpha t + C_3\sin\beta t - C_4\cos\beta t,\\
x_3 &= \gamma C_1\sin\beta t + \gamma C_2\cos\beta t + \delta C_3\sin\alpha t + \delta C_4\cos\alpha t,\\
x_4 &= -\gamma C_1\cos\beta t + \gamma C_2\sin\beta t - \delta C_3\cos\alpha t + \delta C_4\sin\alpha t,
\end{aligned}$$

其中

$$\alpha,\beta=\frac{1}{2}c\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2a+c)^2+4b^2},\ b\gamma=a+\alpha,\ b\delta=a+\beta.$$

第九章　非线性微分方程组

1—17. 两个微分方程的方程组

9.1. $x'(t)=-x(x+y),\ y'(t)=y(x+y).$

由这两个方程得到 $yx'+xy'=0$,即 $xy=C$。于是,此方程组化为一个可分离变量的方程

$$x'+x^2+C=0.$$

9.2. $x'(t)=(ay+b)x,\ y'(t)=(cx+d)y.$

由这些方程得到

$$\left(a+\frac{b}{y}\right)y'=\left(c+\frac{d}{x}\right)x',\ \text{即}\ y^b e^{ay}=Cx^d e^{cx}.$$

关于同某些生物学问题有联系的解的进一步研究,见 V Volterra, *Rendiconti Sem Mat Milano* 3(1930),p 158 以及以后.

9.3. $x'(t)=[a(px+qy)+\alpha]x,$

$y'(t)=[b(px+qy)+\beta]y.$

由此得到

$$y^a x^{-b}=Ce^{(a\beta-b\alpha)t}.$$

V Volterra, *Rendiconti Sem Mat Milano* 3(1930), p.158 以及以后.关于同某些生物学有联系的这些方程的进一步研究,也可参阅 A J Lotka, *Journ Washington Acad* 22(1932),p.461—469;V A Kostitzin, *Actualités scientif* 96(1934).

9.4. $x'(t)=h(a-x)(c-x-y),$

$y'(t)=k(b-y)(c-x-y).$

由这些方程得到

$$|y-b|^h=C|x-a|^k.$$

于是，此方程组可以化为一个关于 x 或 y 的方程. 如果在区域 $0\leqslant x<a,\ 0\leqslant y<b,\ x+y<c$ 中，要求找出满足初始条件 $x(0)=y(0)=0$ 的解，则得到方程

$$x'=h(c-a-b)(a-x)+h(a-x)^2+hba^{-\frac{k}{h}}(a-x)^{\frac{k}{h}+1}$$

和对于 y 的相应的方程.

H J Curnow, *Journ London Math. Soc.* 3(1928), p. 88—92. 关于这些方程同某些化学问题有关的详细研究，见 J G vander Corput, H J Backer, *Proceedings Amsterdam* 41(1938), p. 1058—1073.

9.5. $x'(t)=y^2-\cos x,\quad y'(t)=-y\sin x.$

由此得到 $3y\cos x=y^3+C$.

见 E. Иконников, *ЖТФ* 4 (1937), p 433—437.

9.6. $x'(t)=-xy^2+x+y,\quad y'(t)=x^2y-x-y.$

其解满足方程

$$x^2+y^2-2\ln|xy-1|=C.$$

9.7. $x'(t)=x+y-x(x^2+y^2),$

$y'(t)=-x+y-y(x^2+y^2).$

如果将 $-t$ 取作自变量代替 t，则得到 9.8.

9.8. $x'(t)=-y+x(x^2+y^2-1),$

$y'(t)=x+y(x^2+y^2-1).$

$$x=\frac{\cos t}{\sqrt{1+Ce^{2t}}},\quad y=\frac{\sin t}{\sqrt{1+Ce^{2t}}};$$

当 $C=0$ 时，这是 xy 平面上的圆；当 $C<0$ $\left(t<-\frac{1}{2}\ln|C|\right)$ 时，得到处于对应于 $C=0$ 的圆外的螺线；当 $C>0$ 时，则得到这样一些螺线，其一端渐近地接近于上述圆，另一端围绕着点(0,0).

9.9. $x'(t) = -yr^2$, $y'(t) = \begin{cases} (x-1)r^2 & \text{当 } r^2 \geqslant 2x \text{ 时,} \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{y^2}{2x}\right)r^2 & \text{当 } r^2 < 2x \text{ 时,} \end{cases}$

其中

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

积分曲线是连接于坐标原点的圆(除去点(0,0))

$$x = \frac{2\rho}{N},\ y = \frac{4\rho^3}{N}$$

其中 $0 < \rho \leqslant 1, N = 4\rho^4 t^2 + 1$，以及包围着第一种类型的圆的整个圆

$$x = \frac{\rho^2 - 1}{N}[\rho \sin(\rho^2 - 1)t - 1],$$

$$y = -\frac{1}{N}\rho(\rho^2 - 1)\cos(\rho^2 - 1)t,$$

其中 $\rho > 1, N = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\rho^2 - 1)t$.

9.10. $x'(t) = -y + \begin{cases} x(r^2 - 1)\sin\frac{1}{r^2 - 1}, \\ 0, \end{cases}$

$$y'(t) = x + \begin{cases} y(r^2 - 1)\sin\frac{1}{r^2 - 1}, \\ 0, \end{cases}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$,当 $r^2 \neq 1$ 时,取第一行,当 $r^2 = 1$ 时,取第二行.

引入极坐标 $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. 则由给定的方程组得到

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \begin{cases} r(r^2 - 1)\sin\frac{1}{r^2 - 1} & \text{当 } r \neq 1 \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } r = 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

在积分曲线当中,存在收敛于圆 $r = 1$ 的无穷多个圆(对应于函数 $\sin\frac{1}{r^2 - 1}$ 的无穷多个零点). 在两个彼此相邻

的圆之间，分布着渐近地接近于这两个圆中每一个的螺线。

9.11. $(t^2+1)x'(t)=-tx+y$，$(t^2+1)y'(t)=-x-ty$.

$$x=\frac{C_1+C_2t}{t^2+1},\quad y=\frac{C_2-C_1t}{t^2+1}.$$

9.12. $(x^2+y^2-t^2)x'(t)=-2tx$，

$(x^2+y^2-t^2)y'(t)=-2ty$.

假设 $u(t)=x^2+y^2$, 则得到 $(u-t^2)u'+4tu=0$，因而，$(x^2+y^2+t^2)^2=C_1(x^2+y^2)$, 其次

$$C_2x=C_3y\quad(|C_2|+|C_3|>0).$$

9.13. $x'^2+tx'+ay'-x=0$，$x'y'+ty'-y=0$.

微分并消去 y,则得到可分离变量的方程

$$[3x'^2+4x't+t^2-x]x''=0.$$

由方程 $x''=0$ 得到解

$$x=C_1t+C_2,\quad ay=(C_2-C_1^2)(t+C_1).$$

使第一个因子等于零，导出方程 1.402,并且得到解

$$x=-\frac{1}{4}t^2+2Ct+12C^2,\quad ay=C(t+4C)^2.$$

9.14. $x=tx'+f(x',y')$，$y=ty'+g(x',y')$；

克莱罗方程组。

其解为：直线

$$x=ta+f(a,b),\ y=tb+g(a,b),$$

其中 a,b 任意;这些直线的包络,以及由这两种类型的曲线之线段组成的连续可微曲线.

9.15. $x''(t)=ae^{2x}-e^{-x}+e^{-2x}\cos^2y$,

$$y''(t)=e^{-2x}\sin y\cos y-\frac{\sin y}{\cos^3y}.$$

见 C Störmer, *Zeitschrift f. Astrophysik* 1(1930), p 237—

274; G Schulz, *Zeitschrift f. angew Math Mech* 14(1934), p. 233.

9.16. $x''(t)=\frac{kx}{r^3},\quad y''(t)=\frac{ky}{r^3},\quad r^2=x^2+y^2.$

xy 平面上的质点在某种引力作用下的运动方程. 此方程组可像方程组 9.26 那样求解，或按下述方式求解：按照公式

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r=r(t),\ \varphi=\varphi(t)$$

化为极坐标，得到

$$r^2\varphi'=C_1,\quad r'^2+r^2\varphi'^2=-\frac{2k}{r}+C_2,$$

其次，如果 $C_1\neq0$，即如果运动不沿着通过坐标原点的直线进行，则

$$\frac{dr}{d\varphi}=\pm\frac{r}{C_1}(C_2r^2-2kr-C_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

因而，

$$r[C\cos(\varphi-\varphi_0)-k]=C_1^2,\quad C^2=C_2C_1^2+k^2.$$

这是某一条二次曲线的方程.

9.17. $x''(t)=-\frac{C(y)f(v)}{v}x,\ y''(t)=-\frac{C(y)f(v)}{v}y'-g.$

$$v^2=x'^2+y'^2.$$

飞行的炮弹的坐标 x, y 的微分方程；这里，g 是重力加速度，$C(y)f(v)$ 是相应于高度 y 处空气密度的阻力规律.

如果 ϑ 是轨道切线同 Ox 轴之间的夹角，即如果

$$x'=v\cos\vartheta,\ y'=v\sin\vartheta,$$

则给定的微分方程也可以写为下列形式：

$$\frac{d}{dt}(v\cos\vartheta)=-C(y)f(v)\cos\vartheta,$$

$$\frac{d}{dt}(v\sin\vartheta) = -C(y)f(v)\sin\vartheta - g.$$

由这些方程得到

$$y'(\vartheta) = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\vartheta \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}(v\cos\vartheta) = \frac{C(y)}{g}vf(v) \quad \text{当 } v = v(\vartheta) \text{时} \tag{2}$$

其中第二个方程称为外弹道学基本方程.

如果可以足够精确地认为 $C(y)$ 与 y 无关，则方程(2)可以独立求解. 经过变换

$$v(\vartheta) = e^{u(\tau)},\ \tau = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3}$$

将方程(2)化为下列形式：

$$u'(\tau) = \operatorname{th}\tau + \frac{C}{g}f(e^u); \tag{2a}$$

在这种形式下，对于任何阻力规律 $f(v)$，给定的方程可以用作图法足够精确地求解. 特别是，当

$$f(v) = av^n + b$$

时，方程(2)化为对于 $v(\vartheta)$ 的伯努利方程；如果

$$f(v) = a\ln v + b,$$

那么经过变换 $u(\vartheta) = \ln v$，方程(2)则化为线性方程. 于是，在这两种情况下，方程(2)可以用积分法求解.

如果不能将 $C(y)$ 取作为常数，那么，利用变换(3)，并且假设 $y(\vartheta) = z(\tau)$，则由方程(1)得到

$$z'(\tau) = -\frac{1}{g}e^{2u}\operatorname{th}\tau. \tag{1a}$$

[某些细节和进一步的参考文献，可以在下列著作中找到：Sansone，第XII章，§1. ——俄译本编者著.]

18—29. 多于两个微分方程的方程组

9.18. $x'(t)=y-z$, $y'(t)=x^2+y$, $z'(t)=x^2+z$.

由这些方程得到 $x'-y'+z'=0$，即 $x-y+z=C$. 利用这个等式，可以求得

$$x=C_1+C_2e^t,\ y=-C_1^2+(2C_1C_2t+C_3)e^t+C_2^2e^{2t},$$
$$z=y-x+C_1.$$

9.19. $ax'(t)=(b-c)yz$, $by'(t)=(c-a)zx$, $cz'(t)=(a-b)xy$.

由这些方程不难得到：

$$ax^2+by^2+cz^2=C_1,\quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=C_2.$$

由这些方程解出 y 和 z，并且将所得到的表达式代入原来的第一个方程中去，则得到一个一阶方程，此方程可用椭圆函数求解.

否则，假设

$$bcu=(a-b)(a-c)x^2,\quad acv=(b-a)(b-c)y^2,$$
$$abw=(c-a)(c-b)z^2,\quad -3\zeta=u+v+w.$$

这时则有

$$\zeta+u=e_1,\quad \zeta+v=e_2,\quad \zeta+w=e_3,$$

并且 $e_1+e_2+e_3=0$，而此方程组化为方程

$$\zeta'^2=4(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3),$$

这个方程可用椭圆函数求解.

9.20. $x'(t)=x(y-z)$, $y'(t)=y(z-x)$, $z'(t)=z(x-y)$.

曲面

$$x+y+z=C_1,\quad xyz=C_2$$

的交线是积分曲线.

9.21. $x'(t)+y'(t)=xy$, $y'(t)+z'(t)=yz$,

$$x'(t)+z'(t)=xz.$$

见 G H Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Paris, 1886—1891, T.I, p 330.

9.22. $x'(t)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}y$, $y'(t)=2xy-3z$,

$$z'(t)=3xz-\frac{1}{6}y^2.$$

见 9.21 中指出的参考文献,p. 331.

9.23. $x'(t)=x(y^2-z^2)$, $y'(t)=y(z^2-x^2)$,

$z'(t)=z(x^2-y^2)$.

曲面

$$x^2+y^2+z^2=C_1,\ xyz=C_2$$

的交线是积分曲线.

9.24. $x'(t)=x(y^2-z^2)$, $y'(t)=-y(x^2+z^2)$,

$z'(y)=z(x^2+y^2)$.

曲面

$$x^2+y^2+z^2=C_1,\quad yz=xC_2$$

的交线是积分曲线.

9.25. $x'(t)=-xy^2+x+y$, $y'(t)=x^2y-x-y$,

$$z'(t)=y^2-x^2.$$

曲面

$$x^2+y^2+\ln z^2=C_1,\quad z(xy-1)=C_2$$

的交线是积分曲线.

9.26. $x''(t)=\frac{\partial F}{\partial x}, y''(t)=\frac{\partial F}{\partial y}, z''(t)=\frac{\partial F}{\partial z}$.

其中 $F=F(r)$ 是某一个 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数;质点在中心力作用下的运动微分方程.

这些方程可以写为向量形式如下:

$$\ddot{\mathfrak{r}}=\mathrm{grad}F \text{ 或 } \ddot{\mathfrak{r}}=\frac{F'(r)}{r}\mathfrak{r}$$

($\mathfrak{r}$ 是具有坐标 x, y, z 的向量)．不难得到：

$$\dot{\mathfrak{r}}^2=2(F+C_1) \text{ (能量守恒定律)},$$

$$[\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{r}}]=\mathfrak{c} \text{ (面积定律)},$$

$$(\mathfrak{r},\mathfrak{c})=0 \text{ (每一条轨线都是平面曲线)}.$$

向量 $\mathfrak{r}$ 本身可以按下述方式得到：利用等式

$$t=\int\frac{rdr}{R}+C_2,\quad \varphi=\int\frac{C_3}{rR}dr,$$

其中

$$C_3=|\mathfrak{c}|,\quad R^2=2r^2(F+C_1)-C_3^2,$$

将 r 和 φ(通过 r)定义为 t 的函数．这时，所论方程组具有解

$$\mathfrak{r}=r(\mathfrak{a}\cos\varphi+\mathfrak{b}\sin\varphi),$$

并且应当满足等式 $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{b}^2=1,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=0$.

9.27. $(x-y)(x-z)x'=f(t)$, $(y-x)(y-z)y'=f(t)$, $(z-x)(z-y)z'=f(t)$.

其解可由方程

$$x+y+z=C_1,$$

$$xy+yz+zx=C_2,\quad xyz=C_3+\int f(t)\,dt$$

得到．

9.28.

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t)\sin x_2&=x_4\sin x_3+x_5\cos x_3,\\ x_2'(t)&=x_4\cos x_3-x_5\sin x_3,\\ x_3'(t)+x_1'(t)\cos x_2&=a,\\ x_4'(t)-(1-\lambda)ax_5&=-m\sin x_2\cos x_3,\\ x_5'(t)+(1-\lambda)ax_4&=m\sin x_2\sin x_3.\end{aligned}\right\}$$

这些方程在陀螺仪理论中常常会遇到．在陀螺仪理论中，用符号 $\psi, \vartheta, \varphi, \omega_1, \omega_2$ 来代替 $x_1, \cdots, x_5$；下面我们也利用这些更改过的符号．由所论方程组的最后两个方

程得到

$$\omega_1^2+\omega_2^2-2m\cos\vartheta=C_1 \tag{1}$$

借助于前两个方程，由此得到

$$\psi'^2\sin^2\vartheta+\vartheta'^2-2m\cos\vartheta=C_1. \tag{1 a}$$

用类似的方法，可以得到

$$(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)\sin\vartheta+a\lambda\cos\vartheta=C_2 \tag{2}$$

或者

$$\psi'\sin^2\vartheta+a\lambda\cos\vartheta=C_2. \tag{2 a}$$

由(1 a)和(2 a)得到

$$\vartheta'^2\sin^2\vartheta=-2m\cos^3\vartheta-(C_1+a^2\lambda^2\cos^2\vartheta)+$$
$$+2(m+a\lambda C_2)\cos\vartheta+C_1-C_2^2,$$

假设 $u(t)=\cos\vartheta$, 由此得到

$$u'^2=-2m(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

其中 u_1, u_2, u_3 是实数。

因此，原方程组可以化为方程 1.71，此方程可用椭圆函数求解。

9.29. $x_\nu''(t)=\dfrac{\partial E}{\partial x_\nu}$ $(\nu=1, 2, \cdots, n)$,

其中 $F=F(r)$, $r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$.

如果引进向量 $\mathfrak{x}=(x_1, \cdots, x_n)$, 则所得到的解同 9.26 中完全一样，但面积定律除外，这里面积定律具有下列形式：

$$x_\mu x_\nu-x_\mu x_\nu=C_{\mu,\nu}.$$

附　　录*

二阶线性齐次方程的解法[1]

J. 兹伯尔尼克

我们考虑二阶线性齐次微分方程

$$y'' + Gy' + Hy = 0, \tag{1}$$

其中系数 $G=G(x)$ 和 $H=H(x)$ 在某一个区间上是连续的，并且不恒等于零。经过变换

$$u = \int \exp\left(-\int G(x)dx\right)dx, \quad v(u) = y(x) \tag{2}$$

方程(1)化为下列形式：

$$(u')^2\frac{d^2v}{du^2} + Hv = 0, \tag{3}$$

其中 H 和 u' 应当借助于(2)表示为 u 的函数。

如果 $v=F(u)$ 是方程(3)的解，则可得到方程(1)的封闭形式的解

$$y = F\left(\int \exp\left(-\int G(x)dx\right)dx\right). \tag{4}$$

因为方程

$$F(u)\frac{d^2v}{du^2} - \frac{d^2F}{du^2}v = 0, \tag{5}$$

属于(3)的类型，而具有已知的通解

$$v = F(u)\left[C_1 + C_2\int\frac{du}{F^2(u)}\right], \tag{6}$$

---

* 俄译本第三版附录中的六篇文章这里均予收入．——译者注。

1) J Zbornik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 7(1956), p. 64—74.

所以，方程

$$F(f)\left[y''-\frac{f''}{f'}y'\right]-\frac{d^2F}{df^2}(f')^2y=0 \tag{7}$$

是方程（1）可用上述方法求解的那些方程的最一般的形式，其中 $F(f)$ 是任意函数，而 $f(x)$ 是满足条件 $f'\neq0$ 的任意函数。也就是说，经过变换 $u=f(x)$, $v(u)=y(x)$，方程(7)则化为(5)，所以方程(7)的通解是：

$$y=F(f)\left[C_1+C_2\int\frac{df}{F^2(f)}\right]. \tag{8}$$

现在来分析方程（1）可按上述方法用积分法积分的某些类型。对于这些方程，我们将指出变换(2)和通解。

1°. 下列方程可以化为方程

$$\frac{d^2v}{du^2}+qv=0,$$

其中 q 为常数，其通解为

$$v=C_1\exp(iu\sqrt{q})+C_2\exp(-iu\sqrt{q})=$$
$$=c_1\sin(u\sqrt{q})+c_2\cos(u\sqrt{q}).$$

(1.1) $y''-\left(\frac{f''}{f'}\right)y'-b^2(f')^2y=0$; $f=f(x)$, $f'\neq0$

（第三部分 2.79）.

$$u=f;\quad y=C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}.$$

(1.2) $y''-\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}\right)y'-b^2g^{2a}f^2y=0$; $f(x)\neq0$, $g(x)\neq0$.

$$u=\int fg^a dx\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}$$

(1.3) $y''-cy'-b^2e^{2cx}y=0$（第三部分 2.33, 2.34）.

$$u=\frac{e^{cx}}{c}\cdot\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}$$

(1.4) $y''+\left(\frac{ff'}{f^2+a^2}-\frac{f''}{f'}\right)y'-\frac{b^2(f')^2}{f^2+a^2}y=0$;

$$f=f(x)\neq\pm ia,\ f'\neq0\ （第三部分 2.81）.$$

$$u=\ln[f+\sqrt{f^2+a^2}];$$

$$y=C_1(f+\sqrt{f^2+a^2})^b+C_2(f+\sqrt{f^2+a^2})^{-b}$$

(1.5) $(x^2+2Ax+B)y''+(x+A)y'-m^2y=0$

$$u=\ln(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B});$$

$$y=C_1(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B})^m+C_2(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B})^{-m}.$$

当 $m=\dfrac{1}{2n+1}$, $n=0,1,2,3,\cdots$ 而 $C_2=C_1(A^2-B)^m$ 时,解 $y(x)$ 满足关系式

$$y^{2n+1}+a_1C_1C_2y^{2n-1}+a_2(C_1C_2)^2y^{2n-3}+\cdots+$$
$$+a_n(C_1C_2)^ny=2C_1^{2n+1}(x+A)$$

对于其系数,存在递推公式

$$ak=-C_{2n+1}^k-a_1C_{2n-1}^{k-1}-a_2C_{2n-3}^{k-2}-\cdots-a_{k-1}C_{2n-2k+3}^1,$$
$$a_0=0.$$

(1.6) $(27x^2+4)y''+27xy'-3y=0$ (第三部分 2.290).
(1.5) 的特殊情况.

(1.7) $50x(x-1)y''+25(2x-1)y'-2y=0$ (第三部分 2.292).
(1.5) 的特殊情况.

(1.8) $(x^2+1)y''+xy'+2y=0$ (第三部分 2.222).
(1.5) 的特殊情况.

(1.9) $(x^2-x)^2y''+(2x-1)(x^2-x)y'-m^2y=0$.

$$u=\ln\frac{x-1}{x}\quad y=C_1\left(\frac{x-1}{x}\right)^m+C_2\left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

(1.10) $y''+k^2\dfrac{\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}y'+n^2y\operatorname{dn}^2x=0$ (第三部分 2.74).

$$u=\int\operatorname{dn}x\,dx,\quad y=C_1\sin nu+C_2\cos nu$$

(1.11) $y''-f'y'+b^2e^{2f}y=0$, $f=f(x)$

$$u=\int e^f dx.\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$$

(1.12) $y''-m\operatorname{ctg}x\,y'+b^2\sin^{2m}x\,y=0$.
(1.11) 当 $f=m\ln\sin x$ 时的特殊情况.

$$u=\int\sin^m x\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$$

(1.13) $y''-\operatorname{ctg}x\,y'+\sin^2x\,y=0$ (第三部分 2.69).
(1.12) 当 $m=b=1$ 时的特殊情况.

$$y=C_1\sin\cos x+C_2\cos\cos x$$

(1.14) $y''+m\operatorname{tg}xy'+b^2\cos^{2m}xy=0$。

(1.11) 当 $f=m\ln\cos x$ 时的特殊情况。

$$u=\int\cos^m x dx;\ y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$$

(1.15) $y''+\operatorname{tg}xy'-\cos^2 xy=0$（第三部分 2.67）。

(1.14) 当 $m=1$，$b=i$ 时的特殊情况。

$$y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$$

(1.16) $y''\sin 2x-2my'+2b^2\operatorname{tg}^{2m-1}x\sin^2 xy=0$

(1.11) 当 $f=m\ln\operatorname{tg}x$ 时的特殊情况。

$$u=\int\operatorname{tg}^m x dx:\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$$

(1.17) $\sin 2xy''-y'+2b^2\sin^2 xy=0$。

(1.16) 当 $m=\frac{1}{2}$时的特殊情况。

$$u=\int\operatorname{tg}^{½}x dx;\ y=C_1\sin bu+C_2\cos bu$$

(1.18) $x\ln xy''-ny'-a^2x\ln^{2n+1}xy=0$。

(1.11) 当 $f=\ln(\ln^n x)$，$b=ia$ 时的特殊情况。

$$u=\int\ln^n x dx=x\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k x;$$

$$y=C_1e^{au}+C_2e^{-au}$$

(1.19) $x\ln xy''-y'-x\ln^3 xy=0$（第三部分 2.412）。

(1.18) 当 $a=n=1$ 时的特殊情况。

$$y=C_1\left(\frac{x}{e}\right)^x+C_2\left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

(1.20) $x^4y''+2x^3y'+a^2y=0$（第三部分 2.350）。

$$u=-\frac{1}{x};\ y=C_1\sin\frac{a}{x}+C_2\cos\frac{a}{x}.$$

(1.21) $y''-n\operatorname{th}xy'-a^2\operatorname{cth}^{2n}xy=0$。

(1.11) 当 $f=n\ln\operatorname{cth}x$ 时的特殊情况。

$$u=\int\operatorname{cth}^n x dx;\ y=C_1e^{au}+C_2e^{-au}$$

(1.22) $y''-2\operatorname{ctg}2xy'-\sin^2 2xy=0$.

$$u=\frac{1}{2}\sin^2 x;\ y=C_1\exp(\sin^2 x)+C_2\exp(-\sin^2 x)$$

(1.23) $(x^2-1)y''+xy'-ay=0$（第三部分 2.235）。

(1.5) 当 $A=0$, $B=-1$, $m=\sqrt{a}$ 时的特殊情况.

$$y=C_1(x+\sqrt{x^2-1})^{\sqrt{a}}+C_2(x+\sqrt{x^2-1})^{-\sqrt{a}}.$$

(1.24) $x^{2n}x^2y''+[(n+1)x^n+na]x^nxy'-n^2a^2e^{\frac{2a}{x^n}}y=0$.

$$u=-\frac{1}{an}\exp\left(\frac{a}{x^n}\right);\quad y=C_1\exp\left(e^{\frac{a}{x^n}}\right)+C_2\exp\left(-e^{\frac{a}{x^n}}\right).$$

(1.25) $y''-(a+2cx)y'-b^2\exp(2ax+2cx^2)y=0$.

$$u=\exp(ax+cx^2)\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}$$

(1.26) $y''-\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)y'-\left(b^2(f')^2-a\frac{f''}{f'}-a^2\right)y=0$;

$f=f(x)$, $f'\neq 0$ （第三部分 2.80）。

经过变换 $y=e^{ax}z$,则化为方程(1.1),其中 y 换为 z.

$$y=e^{ax}(C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}).$$

(1.27) $y''-\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}+2c\right)y'+$

$$+\left[c\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}\right)-b^2g^{2a}f^2+c^2\right]y=0;$$

$f=f(x)\neq 0$, $g=g(x)\neq 0$.

经过变换 $y=e^{cx}z$,则化为方程(1.2),其中 y 换为 z.

$$y=e^{cx}\left[C_1\exp\left(b\int g^af\,dx\right)+C_2\exp\left(-b\int g^af\,dx\right)\right].$$

(1.28) $x^2y''-\left(x\frac{f''}{f'}+2c\right)xy'+$

$$+\left(-b^2(f')^2x^2+c\frac{f''}{f'}x+c^2+c\right)y=0.$$

经过变换 $y=x^cz$,则化为方程(1.1),其中 y 换为 z.

$$y=x^c[C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}].$$

(1.29) $x^2y''-\left[x\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)+2c\right]xy'+$

$$+\left[x^2\left(a^2+a\frac{f''}{f'}-b^2\ (f')^2\right)+x\left(2ac+c\frac{f''}{f'}\right)+c(c+1)\right]y=0;$$

$$f=f(x),\ f'\neq 0.$$

经过变换 $y=x^c e^{ax} z$，则化为方程(1.1)，其中 y 换为 z。

$$y=x^c e^{ax}[C_1 e^{bf}+C_2 e^{-bf}].$$

2° 下列方程可以化为方程

$$u^2\frac{d^2v}{du^2}-n(n-1)v=0.$$

其中 n 为实数，其通解为

$$v=\begin{cases} C_1u^n+C_2u^{1-n} & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ \sqrt{u}\,(C_1+C_2\ln u) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

(2.1) $y''-\left(\frac{f''}{f'}\right)y'-n(n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 y=0;\quad f=f(x)\neq 0,\quad f'\neq 0.$

$$u=f\quad y=\begin{cases} C_1f^n+C_2f^{1-n} & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ \sqrt{f}\,(C_1+C_2\ln f) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

(2.2) $y''+\mathrm{tg}x\,y'-n(n-1)\mathrm{ctg}^2 x\,y=0.$

(2.1)当 $f=\sin x$ 时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\sin^n x+C_2\sin^{1-n}x & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ \sqrt{\sin x}\,(C_1+C_2\ln\sin x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

(2.3) $\sin^2 2x\,y''-4\sin^2 x\sin 2x\,y'-4n(n-1)y=0.$

(2.1) 当 $f=\mathrm{tg}x$ 时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\mathrm{tg}^n x+C_2\mathrm{tg}^{1-n}x & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ \sqrt{\mathrm{tg}x}\,(C_1+C_2\ln\mathrm{tg}x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

(2.4) $xy''-(2x^2+1)y'-4n(n-1)x^3y=0.$

$$u=\frac{1}{2}e^{x^2};\quad y=\begin{cases} C_1e^{nx^2}+C_2e^{(1-n)x^2} & 当\ n\neq\frac{1}{2}\ 时, \\ e^{\frac{x^2}{2}}(C_1+C_2x^2) & 当\ n=\frac{1}{2}\ 时. \end{cases}$$

(2.5) $y''-\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)y'-\left[n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2}-a^2-a\frac{f''}{f'}\right]y=0.$

经过变换 $y=e^{ax}z$,则化为方程(2.1),其中 y 换为 z。

$$y=\begin{cases} e^{ax}(C_1f^n+C_2f^{1-n}) & 当\ n\neq\frac{1}{2}\ 时, \\ e^{ax}f^{\frac{1}{2}}(C_1+C_2\ln f) & 当\ n=\frac{1}{2}\ 时. \end{cases}$$

(2.6) $x^2y''-\left(x\frac{f''}{f'}+2c\right)xy'+$

$+\left[-n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2}x^2+c\frac{f''}{f'}x+c(c+1)\right]y=0.$

经过变换 $y=x^cz$,则化为方程(2.1),其中 y 换为 z。

$$y=\begin{cases} x^c(C_1f^n+C_2f^{1-n}) & 当\ n\neq\frac{1}{2}\ 时, \\ x^cf^{\frac{1}{2}}(C_1+C_2\ln f) & 当\ n=\frac{1}{2}\ 时. \end{cases}$$

(2.7) $xy''-\left[x\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)+2c\right]xy'+$

$+x^2\left(a^2+a\frac{f''}{f'}-n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right)+x\left(2ac+c\frac{f''}{f'}\right)+c(c+1)\Big]y=0.$

经过变换 $y=x^ce^{ax}z$,则化为方程(2.1),其中 y 换为 z。

$$y=\begin{cases} x^ce^{ax}(C_1f^n+C_2f^{1-n}) & 当\ n\neq\frac{1}{2}\ 时, \\ x^ce^{ax}f^{\frac{1}{2}}(C_1+C_2\ln f) & 当\ n=\frac{1}{2}\ 时. \end{cases}$$

(2.8) $x^2y''+xy'-n(n-1)\frac{y}{\ln^2x}=0.$

(2.1) 当 $f=\ln x$ 时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\ln^n x+C_2\ln^{1-n}x & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,} \\ \ln^{\frac{1}{2}}x(C_1+C_2\ln\ln x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

(2.9) $y''-(1+e^x)y'-n(n-1)e^{2x}y=0$.

(2.1) 当 $f=\exp(e^x)$时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\exp(ne^x)+C_2\exp((1-n)e^x) & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,} \\ \exp\left(\frac{1}{2}e^x\right)(C_1+C_2e^x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

(2.10) $y''-(\cos x-\operatorname{tg}x)y'-n(n-1)\cos^2 x y=0$.

(2.1) 当 $f=\exp(\sin x)$时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\exp(n\sin x)+C_2\exp((1-n)\sin x) & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,} \\ \exp\left(\frac{\sin x}{2}\right)(C_1+C_2\sin x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

(2.11) $y''-\left(\frac{g''}{g'}+g'\right)y'-n(n-1)(g')^2y=0$; $g=g(x)$, $g'\neq 0$.

(2.1) 当 $f=\exp g$ 时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\exp(ng)+C_2\exp[(1-n)g] & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,} \\ \exp\left(\frac{g}{2}\right)(C_1+C_2g) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

(2.12) $\cos^4 x y''+\cos^2 x(2\operatorname{tg}x\cos^2 x-1)y'-n(n-1)y=0$.

(2.1) 当 $f=\exp(\operatorname{tg}x)$时的特殊情况。

$$y=\begin{cases} C_1\exp(n\operatorname{tg}x)+C_2\exp((1-n)\operatorname{tg}x) & \text{当 } n\neq\frac{1}{2} \text{ 时,} \\ \exp\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)(C_1+C_2\operatorname{tg}x) & \text{当 } n=\frac{1}{2} \text{ 时.} \end{cases}$$

3°. 下列方程可以化为方程

$$\frac{d^2v}{du^2}+b^2u^{2r-2}v=0,$$

其中 b 为常数(第三部分 2.162(10)),其通解为

$$v=\sqrt{u}\,Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}u^r\right),\text{ 其中 } Z \text{ 为柱函数。}$$

(3.1) $y''-\frac{f''}{f'}y'+b^2(f')^2f^{2r-2}y=0$; $f=f(x)$, $f'\neq0$.

$$u=f;\quad y=\sqrt{f}\,Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}f^r\right).$$

(3.2) $y''-y'+b^2e^{-2x}y=0$.

(3.1) 当 $f=e^x, r=-1$ 时的特殊情况。

$$y=e^x[C_1\sin(be^{-x})+C_2\cos(be^{-x})].$$

(3.3) $y''+y'+b^2e^{2x}y=0$.

(3.1) 当 $f=e^{-x}, r=-1$ 时的特殊情况。

$$y=e^{-x}[C_1\sin(be^x)+C_2\cos(be^x)].$$

(3.4) $y''-ay'+a^2b^2e^{2rax}y=0$.

(3.1) 当 $f=e^{ax}$ 时的特殊情况。

$$y=\exp\left(\frac{ax}{2}\right)Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}e^{rax}\right).$$

(3.5) $y''+\operatorname{tg}x\,y'+b^2\cos^2x\sin^{2r-2}x\,y=0$.

(3.1) 当 $f=\sin x$ 时的特殊情况。

$$y=\sin^{\frac{1}{2}}x\,Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}\sin^r x\right).$$

(3.6) $y''-\operatorname{th}x\,y'+b^2\operatorname{cth}^2x\operatorname{sh}^{2r-2}x\,y=0$.

(3.1) 当 $f=\operatorname{sh}x$ 时的特殊情况。

$$y=\operatorname{sh}^{\frac{1}{2}}x\,Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}\operatorname{sh}^r x\right).$$

(3.7) $xy''-(1+2x^2)y'+4b^2x^3e^{2rx^2}y=0$.

(3.1) 当 $f=e^{x^2}$ 时的特殊情况。

$$y=\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}e^{rx^2}\right).$$

(3.8) $x^2y''+xy'+b^2\ln^{2r-2}x\,y=0$.

(3.1) 当 $f=\ln x$ 时的特殊情况。

$$y=\ln^{\frac{1}{2}} x Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}\ln^r x\right).$$

(3.9) $$y''-\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)y'+\left[b^2(f')^2 r^{2r-2}+a^2+a\frac{f''}{f'}\right]y=0.$$

经过变换 $y=e^{ax}z$，则化为方程(3.1)，其中 y 换为 z。

$$y=e^{ax}\sqrt{f}\ Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}f^r\right).$$

(3.10) $$x^2y''-\left(x\frac{f''}{f'}+2c\right)xy'+$$

$$+\left[b^2(f')^2 f^{2r-2}x^2+c\frac{f''}{f'}x+c^2+c\right]y=0.$$

经过变换 $y=x^cz$，则化为方程(3.1)，其中 y 换为 z。

$$y=x^c\sqrt{f}\ Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}f'\right).$$

(3.11) $$xy''-\left[x\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)+2c\right]xy'+$$

$$+\left[x^2\left(a^2+a\frac{f''}{f'}+b^2(f')^2f^{2r-2}\right)+x\left(2ac+c\frac{f''}{f'}\right)+c(c+1)\right]y=0.$$

经过变换 $y=x^ce^{ax}z$，则化为方程(3.1)，其中 y 换为 z。

$$y=x^ce^{ax}\sqrt{f}\ Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}f^r\right).$$

4°. 下列方程可以化为方程

$$\frac{d^2v}{du^2}(e^{2u}-1)-4e^{2u}v=0,$$

其通解为

$$v=(e^{2u}-1)[C_1+C_2\ln(1-e^{-2u})]+C_2.$$

(4.1) $$y''-\frac{f''}{f'}y'-4\frac{e^{2f}}{e^{2f}-1}(f')^2y=0.$$

$$u=f;\quad y=(e^{2f}-1)[C_1+C_2\ln(1-e^{-2f})]+C_2.$$

(4.2) $$x(x^{2n}-1)y''+(x^{2n}-1)y'-4n^2x^{2n-1}y=0.$$

(4.1) 当 $f=n\ln x$ 时的特殊情况。

$$y=(x^{2n}-1)[C_1+C_2\ln(1-x^{-2n})]+C_2.$$

(4.3) $x(x^2-1)y''+(x^2-1)y'-4xy=0.$

(4.2) 当 $n=1$ 时的特殊情况。

$$y=(x^2-1)[C_1+C_2\ln(1-x^{-2})]+C_2.$$

(4.4) $\cos^2 x y''-\operatorname{ctg} x y'-4y=0.$

(4.1) 当 $f=-\ln\cos x$ 时的特殊情况。

$$y=\operatorname{tg}^2 x(C_1+2C_2\ln\sin x)+C_2.$$

(4.5) $(1-e^{2x})^2y''-2(1-e^{2x})y'-4e^{2x}y=0.$

(4.1) 当 $f=-\frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})$ 时的特殊情况。

$$y=\exp\frac{2x}{1-e^{2x}}(C_1+2C_2x)+C_2.$$

(4.6) $x(x-1)^2y''+x(x-1)y'-y=0$(第三部分 2.326),由(4.5),经过变换 $\xi=e^{2x}$,然后如果新的自变量仍由 x 来表示,则得到此方程.

$$y=\frac{x}{x-1}[C_1+C_2\ln x]-C_2.$$

(4.7) $y''-\frac{y'}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}-4y=0.$

(4.1) 当 $f=\ln\operatorname{ch}x$ 时的特殊情况.

$$y=\operatorname{sh}^2x(C_1+2C_2\operatorname{th}x)+C_2.$$

5°. 下列方程可以化为方程

$$\frac{d^2v}{du^2}\sin^2u-2v=0,$$

其通解为

$$v=\operatorname{ctg}u(C_1-C_2u)+C_2,$$

或者化为方程

$$\frac{d^2v}{du^2}\cos^2u-2v=0,$$

其通解为

$$v=\operatorname{tg}u(C_1+C_2u)+C_2.$$

(5.1) $y''-\frac{f''}{f'}y'-2\left(\frac{f'}{\sin f}\right)^2y=0.$

$$u=f;\quad y=\operatorname{ctg} f(C_1-C_2 f)+C_2.$$

(5.2) $y''-\frac{f''}{f'}y'-2\left(\frac{f'}{\cos f}\right)^2 y=0.$

$$u=f;\quad y=\operatorname{tg} f(C_1+C_2 f)+C_2.$$

(5.3) $y''+\operatorname{th}x y'-2y=0$(第三部分 2.64).

(5.1) 当 $f=\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$时的特殊情况.

$$y=\operatorname{sh}x\left(C_1-C_2\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)\right)+C_2.$$

(5.4) $(a^2-x^2)^2y''-x(a^2-x^2)y'-2a^2y=0.$

(5.2) 当 $f=\arcsin\frac{x}{a}$时的特殊情况.

$$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(C_1+C_2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C_2.$$

(5.5) $(1-x^2)^2y''-x(1-x^2)y'-2y=0.$

(5.4) 当 $a=1$ 时的特殊情况.

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(C_1+C_2\arcsin x)+C_2.$$

(5.6) $(1-e^{-2x})y''+y'-2y=0.$

(5.3) 当 $f=\operatorname{arctg}(e^{2x}-1)^{\frac{1}{2}}$ 时的特殊情况.

$$y=\sqrt{e^{2x}-1}(C_1+C_2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1})+C_2.$$

(5.7) $(x^2+1)y''+2xy'-2y=0.$

(5.2) 当 $f=\operatorname{arctg}x$ 时的特殊情况.

$$y=x(C_1+C_2\operatorname{arctg}x)+C_2.$$

对 E. 卡姆克一书的补充[1]

D. 米特里诺维奇

这里发表的一组简记，其目的是填补 E 卡姆克《微分方程手册》中的某些空白，补充和推广书中包含的结果，修正某些参考文献，等等．此外，我们还指出几种方法，利用这些方法可以对能用积分法或特殊函数(贝塞耳函数、勒让德函数等)来积分的微分方程，进行某种分类。

I.

1°. 考虑一阶微分方程

$$x[ax^py^q+f(xy)]dy+y[bx^py^q+g(xy)]dx=0. \qquad (1)$$

其中 a,b,p,q 为常数；$f(u)$、$g(u)$ 及其导数均为 $u(u=xy)$ 的连续函数．

对此方程寻找下列形式的积分因子：

$$W=F(xy)G(x^2y)$$

其中 $F(u)$ 和 $G(z)$ 分别是变元 $u=xy$ 和 $z=x^2y$ 的函数。如果积分因子 W 存在，则由(1)得到关系式

$$xy[(a-b)x^py^q+f-g]\frac{F'}{F}+x^2y[(2a-b)x^py^q+2f-g]\frac{G'}{G}+$$

1) D. S. Mitrinovitch.

Ⅰ. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **58** (1956), p. 58—60.

Ⅱ. *Bulletin de la Société des mathematiciens et physiciens de la R. P. de Serbie*(Весник друштва математичара и физичара народне республике Србиjе) **7** (1955), p. 161—164.

Ⅲ. *Bollettino della Unione Matematica Italiana* (3), **11**(1956), p 168—171.

Ⅳ. *Glasnik matematičko—fizički i astronomski* (2), **11**(1956), p. 7—10.

Ⅴ. *Univerzitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fakulteta serija matematika i fizika* **11**(1957), p. 1—10.

Ⅵ. 同上，**27** (1959)，p. 1—4.

$$+[a(p+1)-b(q+1)]x^p y^q+f-g+xy(f'-g')=0, \qquad (2)$$

其中

$$F'=\frac{dF}{du},\quad G'=\frac{dG}{dz}.$$

如果，例如，这样一些条件：

$$a=b;\quad z\frac{G'}{G}=q-p. \qquad (3)$$

成立，则在(2)中变量分离. 于是，

$$\frac{F'(u)}{F(u)}=\frac{p-q-1}{u}-\frac{f'(u)-g'(u)}{f(u)-g(u)}+\frac{1}{u}\frac{(p-q)f(u)}{f(u)-g(u)}. \qquad (4)$$

($f(u)\equiv g(u)$ 的情况非常简单，我们将不予讨论.)由关系式(3)和(4)确定出积分因子：

$$W=\frac{x^{q-p-1}y^{-1}}{f(xy)-g(xy)}\exp\left\{(p-q)\int\frac{f(xy)d\ln(xy)}{f(xy)-g(xy)}\right\}.$$

特别是，方程

$$x[x^p y^{p+1}+f(xy)]dy+y[x^p y^{p+1}+f(xy)-1]dx=0$$

属于类型(1)，且有积分因子

$$W=y^{-1}\exp\left\{-\int f(xy)d\ln(xy)\right\}.$$

方程(1)，当 $a=b=0$ 时，可直接用积分法积分.

因此，方程(1)，当 $a=b$ 时，可用积分法积分.

关于方程(1)当 $f(xy)=$ 常数和 $g(xy)=$ 常数而 a 不一定等于 b 时的特殊情况，见第三部分1.329.

2°. 如果参数 $a_k, b_k, c_k, d_k, p, q, r, s, \lambda, \mu$ 满足某些条件(此处省略)，则同样的方法可以成功地应用于下列各种类型的方程：

$$x[a_1x^py^q+f(x^ry^s)]dy+y[a_2x^py^q+g(x^ry^s)]dx=0$$

对此方程可求下列形式的积分因子：

$$W=F(xy)G(x^ry^s);$$

$$x[a_1x^py^q+b_1x^ry^s+f(xy)]dy+y[a_2x^py^q+b_2x^ry^s+g(xy)]dx=0$$

对此方程可求下列形式的积分因子：

$$W=F(xy)G(x^2y)H(xy^2),$$

或者

$$W=x^{\lambda}y^{\mu}F(xy)$$

则更好；

$$x[a_1x^p+b_1x^2y+c_1xy^2+d_1]dy+y[a_2x^p+b_2x^2y+c_2xy^2+d_2]dx=0$$

对此方程可求下列形式的积分因子：

$$W=F(x^2y)G(xy^2)H\left(\frac{y}{x}\right).$$

3°. 微分方程

$$x[F(x^py^q)+G(x^ry^s)]dy+y[f(x^py^q)+g(x^ry^s)]dx=0, \qquad (5)$$

其中 $ps-qr\neq0$，经过变换 $x^py^q=u$、$x^ry^s=v$，则化为下列形式：

$$u[p(F(u)+G(v))-q(f(u)+g(v))]dv+$$

$$+v[s(f(u)+g(v))-r(F(u)+G(v))]du=0. \qquad (6)$$

应用方程(5)和(6)之间的上述联系，有时可以对于方程(5)的解做出一些有意义的结论。

Ⅱ.

考虑方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{\alpha ff'}{f^2+\beta}-\frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\gamma(f')^2}{f^2+\beta}y=0, \qquad (1)$$

其中 α,β,γ 均为常数．此方程经过变换 $y(x)=\sigma(f)$（σ 是 $f(x)$ 的可微函数）之后，则化为下列形式：

$$(af^2+1)\frac{d^2\sigma}{df^2}+bf\frac{d\sigma}{df}+c\sigma=0, \qquad (2)$$

其中 $a=\dfrac{1}{\beta}, b=\dfrac{\alpha}{\beta}, c=\dfrac{\gamma}{\beta}$，这个方程和第三部分方程 2.298 相同，利用方程(2)可用积分法积分的一些已知情况（见第三部分 2.297，2.298，2.299，2.300），能够得到方程(1)的一些可积情况，例如，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{A^2ff'}{A^2f^2+1}-\frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{B^2(f')^2}{A^2f^2+1}y=0, \qquad (3)$$

其中 A、B 为常数，具有下列函数作为特解：

$$y_1(x)=(Af+\sqrt{A^2f^2+1})^{\frac{B}{A}},$$

$$y_2(x)=(Af+\sqrt{A^2f^2+1})^{-\frac{B}{A}}.$$

方程(3)同第三部分方程 2.81 一样。第三部分的方程 2.290,可以类似地求解。

Ⅲ.

1°. 考虑一阶微分方程

$$x^{\alpha}y^{\beta}(y')^{\gamma}+Ay^{\lambda}(y')^{\mu}+Bx^{\nu}=0, \tag{1}$$

其中 $x>0$, $y>0$, $y'=\frac{dy}{dx}>0$,而 $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu,A,B$ 均为实常数, 并且

$$AB\neq0;|\alpha|+|\nu|>0;|\beta|+|\lambda|>0;|\gamma|+|\mu|>0. \tag{2}$$

(不满足条件(2)的那些情况很简单,我们将不予讨论.)

经过变量变换

$$x=e^{\xi},\quad y(x)=e^{k\xi}\eta(\xi), \tag{3}$$

其中 k 为一个实数,此数我们以后确定,则化为方程

$$\begin{aligned}&\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}\exp[(k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu)\xi]+\\&+A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}\exp[(k(\lambda+\mu)-(\mu+\nu))\xi]+B=0.\end{aligned} \tag{4}$$

如果选取 k, 使得

$$\left.\begin{aligned}&k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu=0,\\&k(\lambda+\mu)-\mu-\nu=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则最后得到方程

$$\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}+A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}+B=0, \tag{6}$$

其中不显含变量 ξ。关于此方程的解法,见3°。

分析方程组(5),可以得到下述结论。

如果

$$\beta+\gamma\neq0,\quad(\beta+\gamma)(\mu+\nu)+(\lambda+\mu)(\alpha-\gamma-\nu)=0, \tag{7}$$

则

$$k=\frac{\gamma-\alpha+\nu}{\beta+\gamma}. \tag{8}$$

如果

$$\beta+\gamma=0,\alpha-\gamma-\nu=0,\ \text{而}\ \lambda+\mu\neq0, \tag{9}$$

则

$$k=\frac{\mu+\nu}{\lambda+\mu}. \tag{10}$$

如果 $\beta+\gamma=0$, $\alpha-\gamma-\nu=0$, $\lambda+\mu=0$ 以及 $\mu+\nu=0$，则 k 任意。在这种情况下，方程(1)具有下列形式：

$$x^{\lambda-\beta}\left(\frac{y}{y'}\right)^{\beta}+A\left(\frac{y}{y'}\right)^{\lambda}+Bx^{\lambda}=0. \tag{11}$$

2°. 如何用积分法解方程

$$(y')^m+axy^{n-1}y'+by^n=0 \tag{12}$$

(a, b, m, n 均为常数，并且 $m\neq n$)，已经知道[1)]；此方程也可以写为下列形式：

$$y^{1-n}(y')^{m-1}+by(y')^{-1}+ax=0. \tag{13}$$

因此，(12)显然是方程(1)当

$$\alpha=0;\beta=1-n;\gamma=m-1;\lambda=1;\mu=-1;\nu=1$$

时的特殊情况。因为对于方程(13)，一切条件(7)均成立，所以可以取

$$k=\frac{m}{m-n}.$$

如果 $m=n$，则(12)可以直接积分。

3°. 为了积分方程(6)，可以采用下述方法。

如果假设

$$k\eta+\eta'=t\eta^{\sigma}, \tag{14}$$

其中 σ 是待定量，而 t 是新变量，则方程(6)化为

$$t^{\gamma}\eta^{\beta+\gamma\sigma}+At^{\mu}\eta^{\lambda+\mu\sigma}+B=0. \tag{15}$$

假设 $\gamma\neq\mu$，现在选择 σ，使得

$$\beta+\gamma\sigma=\lambda+\mu\sigma,$$

即

$$\sigma=\frac{\lambda-\beta}{\gamma-\mu}. \tag{16}$$

这时其解可以写为：

---

1) D. Mitrinovitch, *Jahresbericht DMV* **58** (1955) p 1. [这篇文章的译文在本书 792 页上，——俄译本编者注.]

$$\left.\begin{aligned}\eta(t)&=\left\{-\frac{B}{t^{\gamma}+At^{\mu}}\right\}^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma\lambda-\mu\beta}},\\ \xi(t)&=\int_{t_0}^{t}\frac{d\eta}{t\eta^{\sigma}-k\eta},\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其中 t_0 是以适当的方式选取的常数值。

因此：如果条件(7)成立，并且 $\gamma\neq\mu$, $\gamma\lambda-\mu\beta\neq0$，则方程(1)可用积分法积分。

在 E 卡姆克的书中，可以找出大约二十个方程（拉格朗日-达兰贝尔型方程和齐次方程还不算）作为方程(1)的特殊情况，而这些方程通常可用其他方法来积分．用上述方法可按统一的方式去解下列方程：

第三部分，1.385；1.386；1.397；1.404；1.413；1 414；1.415；1.455；1.457；1.470；1.476；1.487；1.525；1.527；1.541；1.542；1.550；1.554.

4°．在 1°中指出的积分方法，也可应用于形式更一般的方程

$$\sum_{n=1}^{N}A_n x^{\alpha_n}y^{\beta_n}(y')^{\gamma_n}=0\quad(N\text{ 为自然数}),$$

只要其中的常数 A_n, α_n, β_n, γ_n 满足某些条件(这里省略)．在 E 卡姆克的书中，存在这种形式的当 $N=4$ 时的一些特殊方程。

IV.

1°．考虑一阶微分方程

$$\begin{aligned}&x(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1)dy+\\&\quad+y(A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2)dx=0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $A_n,\cdots,F_n(n=1,2)$ 均为常数。

如果条件

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\equiv k\quad(k=\text{常数})\tag{2}$$

成立，其中

$$\begin{aligned}P(x,y)\equiv&(3A_1-A_2)x^2+2(B_1-B_2)xy+(C_1-3C_2)y^2+\\&+(2D_1-D_2)x+(E_1-2E_2)y+(F_1-F_2);\\Q(x,y)\equiv&(pA_1-qA_2)x^2+(pB_1-qB_2)xy+(pC_1-qC_2)y^2+\\&+(pD_1-qD_2)x+(pE_1-qE_2)y+(pF_1-qF_2).\end{aligned}$$

则可以寻找方程(1)的下列形式的积分因子：

$$W=(x^p y^q)^{-k},$$

其中 p 和 q 是某些常数。

2°．考虑条件(2)成立时的一些情况。

第一种情况．如果 $p\neq q$，并且

$$\left.\begin{aligned}&A_2=\frac{kp-3}{kq-1}A_1;\quad B_2=\frac{kp-2}{kq-2}B_1;\ C_2=\frac{kp-1}{kq-3}C_1;\\&D_2=\frac{kp-2}{kq-1}D_1;\quad E_2=\frac{kp-1}{kq-2}E_1;\ F_2=\frac{kp-1}{kq-1}F_1,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 k 不为 $\frac{1}{q}$，$\frac{2}{q}$，$\frac{3}{q}$，则条件(2)成立。

因此：如果方程(1) 的系数 $A_2,\cdots,F_2$ 由关系式(3) 确定，其中系数 $A_1,\cdots,F_1$ 同参数 p,q,k 一样是任意的，此方程可借助于采用积分因子的积分法来积分。

还可以给出这个结果的其他表述．假设，矩阵

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2\end{pmatrix}$$

之秩为 2，例如，设

$$\delta\equiv\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

这时方程(1)的积分因子具有下列形式：

$$W=x^\lambda y^\mu,$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}3A_1-A_2 & -A_2\\ 2B_1-2B_2 & -B_2\end{vmatrix};\quad \mu=\begin{vmatrix}A_1 & 3A_1-A_2\\ B_1 & 2B_1-2B_2\end{vmatrix},$$

只要等式

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & 3A_1-A_2\\ B_1 & B_2 & 2B_1-2B_2\\ C_1 & C_2 & C_1-3C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & 3A_1-A_2\\ B_1 & B_2 & 2B_1-2B_2\\ D_1 & D_2 & 2D_1-D_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & 3A_1-A_2\\ B_1 & B_2 & 2B_1-2B_2\\ E_1 & E_2 & E_1-2E_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & 3A_1-A_2\\ B_1 & B_2 & 2B_1-2B_2\\ F_1 & F_2 & F_1-F_2\end{vmatrix}=0\tag{4}$$

成立。

因此可以看出，如果方程(1)的十二个系数中有八个是任意的，而其余的四个系数满足一些简单的条件，则此方程可用积分法积分。如果$\delta \neq 0$，则可以将C_1、D_1、E_1、F_1取作为这四个系数，并且使之满足条件(3)。

作为例子，如果$A_1=B_1=A_2=1, B_2=2$，则条件(4)为：

$$C_2=5C_1;\ D_2=\frac{4}{3}D_1;\ E_2=\frac{5}{2}E_1;\ F_2=\frac{5}{3}F_1,$$

而方程

$$x(x^2+xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1)dy+$$
$$+y\left(x^2+2xy+5C_1y^2+\frac{4}{3}D_1x+\frac{5}{2}E_1y+\frac{5}{3}F_1\right)dx=0$$

具有积分因子$W=x^{-6}y^{-4}$。

第二种情况。$p=q$。

α) 如果$F_1=F_2$、$B_1\neq B_2$，则由(2)得到

$$kp=2;\ A_2=-A_1;\ C_2=-C_1;\ D_2=0;\ E_1=0。$$

因此，方程

$$x(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+F_1)dy+$$
$$+y(-A_1x^2+B_2xy-C_1y^2+E_2y+F_1)dx=0$$

可以借助于积分因子$W=x^{-2}y^{-2}$用积分法积分。

β) 如果$B_1=B_2$、$F_1\neq F_2$，则由(2)得到

$$kp=1;\ A_1=0;\ C_2=0;\ D_1=0;\ E_2=0。$$

因此，方程

$$x(B_1xy+C_1y^2+E_1y+F_1)dy+y(A_2x^2+B_1xy+D_2x+F_2)dx=0$$

可以借助于积分因子

$$W=(xy)^{-1}。$$

用积分法来积分。

γ) 如果$B_1=B_2$、$F_1=F_2$、$A_1\neq A_2$、$A_1A_2\neq 0$，则由(2)可知，当

$$B_2=B_1;C_2=\frac{A_1}{A_2}C_1;D_2=\frac{A_1+A_2}{2A_1}D_1;\ E_2=\frac{2A_1}{A_1+A_2}E_1;\ F_2=F_1,$$

时，其中A_1、A_2、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1任意，则方程(1)可以借助于积分因子

$$W=(xy)^{\frac{A_2-3A_1}{A_1-A_2}}.$$

用积分法来积分。

δ) 如果 $B_1=B_2$, $F_1=F_2$, $A_1=A_2$，则可得形式稍有不同的结果。

3°. 应用上述方法可以解决方程

$$xS(x,\ y)dy+yT(x,\ y)dx=0$$

是否可用积分法来积分的问题，其中 $S(x,\ y)$ 和 $T(x,\ y)$ 是 两个变量的多项式。

V.

考虑下列形式的线性微分方程

$$\frac{d^{n+k}y}{dx^{n+k}}-$$

$$-f(x)\left[A_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots A_{n-1}x\frac{dy}{dx}+A_ny\right]=0 \quad (1)$$

n、k 为自然数，A_ν 为常数)，这些方程可用积分法或特殊函数（贝塞耳函数，波赫哈默尔函数，等等）积分.

1°. 考虑微分方程

$$y^{(n+k)}-f(x)L[y]=0 \quad (2)$$

其中

$$L[y]=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\nu!\,C_n^{\nu}x^{n-\nu}y^{(n-\nu)}. \quad (3)$$

而

$$0!=1;\ y^{(0)}=y,\ y^{(r)}=\frac{d^ry}{dx^r},\quad r=1,\cdots,n+k.$$

假设 $L[y]=z$，逐次微分后则有

$$\left.\begin{aligned}
z' &= x^ny^{(n+1)},\\
z'' &= (x^n)'y^{(n+1)}+x^ny^{(n+2)}\\
&\cdots\cdots\\
z^{(k)} &= \sum_{r=1}^{k}C_{k-1}^{r-1}(x^n)^{(k-r)}y^{(n+r)},
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

其中$(x^n)^{(s)}=\dfrac{d^s(x^n)}{dx^s}$.

由$k+1$个关系式(2)和(4)消去k个量$y^{(n+1)},\cdots,y^{(n+k)}$,则得到等式

$$\begin{vmatrix} z & x^n & 0 & \cdots & 0 \\ z'' & (x^n)' & x^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{(k-1)} & (x^n)^{(k-2)} & C_{k-2}^1(x^n)^{(k-3)} & \cdots & x^n \\ z^{(k)} & (x^n)^{(k-1)} & C_{k-1}^1(x^n)^{(k-2)} & \cdots & C_{k-1}^{k-2}(x^n)' \end{vmatrix}+(-1)^k x^{kn}f(x)z=0.$$

展开其中的k阶行列式后,得到下列方程:

$$x^k z^{(k)}+a_1x^{k-1}z^{(k-1)}+\cdots+a_{k-1}xz'-x^{n+k}f(x)z=0. \tag{5}$$

其中系数a_r是n和k的函数,即

$$a_r=(-1)^r r!\,C_{k-1}^r C_{n+r-1}^r \quad (r=1,2,\cdots,k-1)$$

方程(5)也可以写为下列形式:

$$z^{(k)}-C_{k-1}^1(x^n)'z^{(k-1)}+C_{k-1}^2(x^n)''z^{(k-2)}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{k-1}C_{k-1}^{k-1}(x^n)^{(k-1)}z'-f(x)x^nz=0,$$

或写为

$$z^{(k)}+g_1(x)z^{(k-1)}+g_2(x)z^{(k-2)}+\cdots+g_{k-1}(x)z'-f(x)x^nz=0$$

则更好,其中

$$g_r(x)=(-1)^{r-1}C_{k-1}^r(x^n)^{(r)}(r=1,2,\cdots,k-1)$$

最后,借助于线性方程$L[y]=z$,可将线性方程(2)化为(5)。

齐次方程$L(y)=0$的通解是

$$y=C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n\ (C_p\text{ 为常数}).$$

为了求非齐次方程$L[y]=z$的通解,只须采用常数变易法便可以了.

当$k=2,3,4$时,方程(5)分别具有下列形式:

$$x^2z''-nxz'-x^{n+2}f(x)z=0; \tag{6}$$

$$x^3z'''-2nx^2z''+n(n+1)xz'-x^{n+3}f(x)z=0; \tag{7}$$

$$x^4z''''-3nx^3z'''+3n(n+1)x^2z''-n(n+1)(n+$$
$$+2)xz'-x^{n+4}f(x)z=0. \tag{8}$$

如果方程(6),(7),(8)可以积分为封闭形式，则当 $k=2, 3, 4$ 时相应的方程(2)也可以积分。我们用几个例子说明这一点。

2°. 取方程(第三部分 2.162(6))

$$x^2z''+(1-2\nu)xz'+\nu^2(x^{2\nu}+1-\nu^2)z=0, \tag{9}$$

其解可由柱函数来表示：

$$z=x^{\nu}Z_{\nu}(x^{\nu}),$$

其中

$$Z_{\nu}(t)=\begin{cases}C_1J_{\nu}(t)+C_2J_{-\nu}(t), & \text{如果 } \nu \text{ 为非整数;}\\ C_1J_{\nu}(t)+C_2N_{\nu}(t), & \text{如果 } \nu \text{ 为整数。}\end{cases}$$

(C_1 和 C_2 为任意常数; $J_{\nu}(t)$ 和 $N_{\nu}(t)$ 为第一类和第二类贝塞耳函数.)

比较(6)和(9),则可得知,方程(6)可以积分为封闭形式,特别是,如果

$$n=2\nu-1;\ f(x)\equiv\nu^2[(\nu^2-1)^2x^{-2\nu-1}-x^{-1}]$$

(应注意,现在 ν 只能具有 $\frac{1}{2}p$ 的形式, p 为整数,而在(9)中对于 ν 未加任何限制.)

最后,在这种情况下同方程(6)相应的方程(2)

$$x^{2\nu+1}y^{(2\nu+1)}-\nu^2(x^2-\nu^2+1)[x^{2\nu-1}y^{(2\nu-1)}-$$

$$-1!C^1_{2\nu-1}x^{2\nu-2}y^{(2\nu-2)}+\cdots+(-1)^{2\nu-1}(2\nu-1)!C^{2\nu-1}_{2\nu-1}y]=0. \tag{10}$$

其通解可用贝塞耳函数来表示。

将方程(6)同方程(第三部分 2.162(8))

$$xz''+(1-2\nu)z'+xz=0. \tag{11}$$

相比较，则可得知，方程(6)可以积分为封闭形式，特别是，如果 $n=2\nu-1; f(x)\equiv-x^{-2\nu+1}$,因为已知方程(11)的解是

$$z=x^{\nu}Z_{\nu}(x).$$

于是,在这种情况下相应于方程(2)的方程(2):

$$x^{2\nu}y^{(2\nu+1)}+x^{2\nu-1}y^{(2\nu-1)}-1!C^1_{2\nu-1}x^{2\nu-2}y^{(2\nu-2)}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{2\nu-1}(2\nu-1)!C^{2\nu-1}_{2\nu-1}y=0,$$

可用贝塞耳函数积分。

现在,将同样的方法应用于方程(第三部分 2.162(1 a))

$$x^2z''+axz'+(bx^m+c)z=0\ (m\neq0,\ a,\ b,\ c \text{ 均为常数}), \tag{12}$$

此方程包含(9)和(11)作为特殊情况. 方程(12)的通解具有下列形式:

$$z=\begin{cases} x^{\frac{1-a}{2}}Z_\nu\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\,x^{\frac{m}{2}}\right), & \text{其中}\ \nu=\frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2-4c},\ \text{如果}\ b\neq 0.\\ C_1x^{\frac{1-a+\mu}{2}}+C_2x^{\frac{1-a-\mu}{2}}, & \text{如果}\ b=0,\text{但是}\ \mu=\sqrt{(1-a)^2-4c}\neq 0;\\ x^{\frac{1-a}{2}}(C_1+C_2\ln x), & \text{如果}\ b=0\ \text{和}\ (1-a)^2-4c=0. \end{cases}$$

(这些公式是在假设 $x>0$ 时写出的.)

比较(6)和(12),则可得知,方程(6)可以积分为封闭形式，特别是，如果

$$n=-a,\ f(x)\equiv -x^{a-2}(bx^m+c), \tag{13}$$

其中 a 可以取负整数值. 如果对于相应于 $k=2$ 的形式为 (2) 的方程,

$$y^{(n+2)}-f(x)L[y]=0.$$

引入条件(13),则得到线性方程，其解可由贝塞耳函数和初等函数来表示.

在这种类型的方程当中,还存在下列方程:

$$\alpha x^p y^{(n+2)}+x^n y^{(n)}-1!C_n^1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+(-1)^n n!C_n^n y=0$$

(n 为自然数,α. p 为任意数),其通解可由贝塞耳函数来表示.

在 E. 卡姆克的书中,未包含此方程,甚至也未包含其特殊情况:

$$\alpha x^p y'''+xy'-y=0,$$

$$\alpha x^p y''''+x^2y''-2xy'+2y=0.$$

将方程(6)同以适当方式选择的另一些方程相比较，则可得到进一步的结果. 为此,例如可以使用下列方程:

第三部分 2.97;2.98; 2.99; 2.103; 2.104; 2.105; 2.106; 2.138; 2.140;2.176;2.179;2.187;2.400;2.409,等等.

这时，得到一些可积分成特殊函数的方程.

方程(第三部分 2.138)

$$xz''+az'-\frac{1}{4}(x-2a-4b)z=0\quad (a,\ b\ \text{为常数}), \tag{14}$$

利用变换 $z=ue^{-\frac{x}{2}}$,可以化为方程

$$xu''+(b-x)u'-au=0\ \text{(第三部分 2.113)}, \tag{15}$$

此方程是退化的超几何方程. 比较(6)和(14)，则可得知,方程(6)可以积分成封闭形式,特别是,当条件

$$n=-a;f(x)\equiv\frac{1}{4}x^{a-2}(x-2a-4b) \tag{16}$$

成立时，其中 a 可以取负整数值。

在这种情况下，相应的形式(2)的方程

$$y^{(n+2)}-f(x)L[y]=0$$

具有可由退化的超几何函数（波赫哈默尔函数）表示的解. 如果差 $b-a$ 为正整数，则在条件(16)之下此方程的解甚至可由初等函数来表示。

3°. 同时考虑方程(7)和方程（第三部分 3.49）

$$x^2z'''-3(p+q)xz''+3p(3q+1)z'-x^2z=0 \tag{17}$$

（p 和 q 为自然数）.

方程(17)的解是

$$z=\prod_{\mu=0}^{p-1}(\delta-3\mu-1)\prod_{\nu=0}^{q-1}(\delta-3\nu-2)\sum_{k=1}^{3}C_k\exp(\varepsilon_k x),$$

其中 $\delta\equiv x\frac{d}{dx}$，而 ε_k 是方程 $\varepsilon^3=1$ 的根. 方程(7)和(17)相同，如果条件

$$2n=3(p+q),\ n(n+1)=3p(3q+1),\ f(x)\equiv x^{-n} \tag{18}$$

成立，即对于满足方程

$$3(p+q)^2+2(p+q)=4p(3q+1) \tag{19}$$

的所有正整数 p 和 q；此方程(19)也可以写为下列形式：

$$p=\frac{2}{3}\ \frac{1}{t-1};\ q=\frac{2}{3}\ \frac{t}{t-1}\quad(t\neq1),$$

其中 t 为参数。

方程(19)可以分解为两个方程：$p=q$ 和 $p-q=\frac{2}{3}$. 因为不定方程 $p-q=\frac{2}{3}$ 没有任何整数解，所以从方程 $p=q$ 得到一般方程(19)的自然数的解：

$$p=N,\ q=N\quad(N\text{ 为自然数})$$

最后，可以归结为下述定理.

微分方程

$$x^{3N}y^{(3N+3)}-x^{3N}y^{(3N)}+1!C_{3N}^{1}x^{3N-1}y^{(3N-1)}-$$

$$-2!C_{3N}^2x^{3N-2}y^{(3N-2)}+\cdots+(-1)^{3N}(3N)!C_{3N}^{3N}y=0 \tag{20}$$

可以积分成封闭形式，其通解由方程

$$x^{3N}y^{(3N)}-1!C_{3N}^1x^{3N-1}y^{(3N-1)}+\cdots+(-1)^{3N}(3N)!C_{3N}^{3N}y=z \tag{21}$$

来确定，其中

$$z=\prod_{\mu=0}^{N-1}(\delta-3\mu-1)\prod_{\nu=0}^{N-1}(\delta-3\nu-2)\sum_{k=1}^{3}C_k e^{\varepsilon_k x}$$

($\delta\equiv x\frac{d}{dx}$, ε_k 为方程 $\varepsilon^3=1$ 的根)。

除了上述情况以外，很难找出另一些能同(7)相比较的可积分为封闭形式的方程。如果讨论方程(8)，则更加困难。

4°. 现在我们考虑另一种类型的线性方程，即：

$$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)L_{N_k}[y]=0 \quad (N_k \text{ 为自然数}) \tag{22}$$

其中

$$L_N[y]\equiv x^Ny^{(N)}-1!C_N^1x^{N-1}y^{(N-1)}+$$
$$+2!C_N^2x^{N-2}y^{(N-2)}+\cdots+(-1)^NN!C_N^Ny.$$

如果假设其中 $y=xz$，则微分型 $L_N[y]$ 简化为

$$L_N[(xz)]=x^{N+1}z^{(N)}, \tag{23}$$

而方程(22)则取下列形式：

$$\sum_{k=1}^{n}x^{N_k+1}f_k(x)z^{(N_k)}=0. \tag{24}$$

方程 (24) 的阶数是 $\nu=\max(N_1, N_2, \cdots, N_n)$。如果 $\mu=\min(N_1, N_2, \cdots, N_n)$，那么方程(24)经过变换 $W=z^{(\mu)}$ 则化为 $\nu-\mu$ 阶线性方程，我们将此方程称为方程 E。

方程(24)具有特解：x, $x^2, \cdots, x^\mu$ 作为例子，取方程

$$f_1(x)(x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y)+f_2(x)(x^2y''-2xy'+2y)+$$
$$+f_3(x)(xy'-y)=0 \tag{25}$$

在这种情况下，方程(24)和方程 E 分别取下列形式：

$$x^2f_1(x)z'''+xf_2(x)z''+f_3(x)z'=0.$$
$$x^2f_1(x)u''+xf_2(x)u'+f_3(x)u=0.$$

5°. 应用这种方法解三阶和四阶的线性方程。

取方程

$$y''+f(x)(x^2y''-2xy'+2y)+g(x)(xy'-y)=0; \qquad (26)$$

经过变换 $y=xz$，此方程化为

$$xu''+[x^3f(x)+3]u'+x^2g(x)u=0 \quad (z'=u)。$$

方程

$$y^{(4)}+f(x)(x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y)+$$
$$+g(x)(x^2y''-2xy'+2y)+h(x)(xy'-y)=0 \qquad (27)$$

利用变换 $y=xz$，则化为

$$xu'''+[x^4f(x)+4]u''+x^3g(x)u'+x^2h(x)u=0 \quad (z'=u) \qquad (28)$$

自然，如果已知(28)型的方程，其解可由积分法求得，或者用特殊函数来表示，则可以建立起也能积分为封闭形式的方程(27)。

6°. 方程(2)，如果利用变换

$$y=xt,\ t=t(x) \qquad (29)$$

则可化为

$$xu^{(k)}+(k+n)u^{(k-1)}-x^{n+1}f(x)u=0. \qquad (30)$$

其中 u 表示 $t^{(n)}=\frac{d^nt}{dx^n}$ 。

方程(5)，经过变量变换

$$x^{n+1}t^{(n)}=z \qquad (31)$$

之后，则化为(30)；这一点很容易证明，如果在等式 $L[y]=z$ 中假设 $y=xt$，这里 $L[y]$ 由(3)来定义。(5)和(30)之间的这种关系，可以用来验证(5)中出现的系数 a_r 的确等于

$$a_r=(-1)^r r!\, C_{k-1}^r C_{n+r-1}^r \quad (r=1,2,\cdots,k-1)。$$

上述事实可以用来积分某些微分方程。作为例子，我们用下列方程(第三部分 2.409)来说明这一点：

$$x^{2a}u''+ax^{2a-1}u'+(a-1)^2u=0;$$

此方程具有通解

$$y=C_1\cos(x^{1-a})+C_2\sin(x^{1-a}) \quad a>0,\ a\neq1。$$

可将此方程写为下列形式：

$$xu''+au'+(a-1)^2x^{1-2a}u=0. \qquad (32)$$

当 $k=2$ 时，方程(30)具有下列形式：

$$xu''+(n+2)u'-x^{n+1}f(x)u=0. \tag{33}$$

如果将(33)同(32)相比较，则可看出，例如，当

$$n=a-2;\ f(x)\equiv-(a-1)^2x^{-3a-2}$$

时，其中 $a>2$ 是自然数，则方程(33)可积分。

最后：类型(2)的方程

$$y^{(a)}+(a-1)^2x^{-3a+2}\sum_{\nu=0}^{a-2}(-1)^\nu\nu!C_{a-2}^\nu x^{a-2-\nu}y^{(a-2-\nu)}=0$$

当 a 为大于 2 的自然数时，则可用积分法积分。

VI.

1°. 考虑方程(第三部分 1,257)

$$x(Ax^4+Bxy+C)dy=y(Dx^4+Exy+F)dx. \tag{1}$$

其中 A、B、C、D、E、F 为常数。假设

$$x^4=u.\quad xy=v; \tag{2}$$

这时，方程(1)取下列形式：

$$\frac{du}{dv}=\frac{4u[Au+Bv+C]}{v[(A+D)u+(B+E)v+(C+F)]}. \tag{3}$$

如果 $D=-A$，则得到伯努利方程，因而方程(1)可用积分法积分。

更一般的方程

$$x(Ax^k+Bxy+C)dy=y(Dx^k+Exy+F)dx.\ (k=\text{常数}), \tag{4}$$

经过变换 $x^k=u$、$xy=v$，则化为下列形式：

$$\frac{du}{dv}=\frac{ku(Au+Bv+C)}{v[(A+D)u+(B+E)v+(C+F)]}. \tag{5}$$

当 $D=-A$ 时，方程(5)是伯努利方程，因而，在这种情况下，方程(4)可用积分法积分。

2°. 考虑方程

$$y''+(ax^2+bx+c)y'+(Ax+B)y=0. \tag{6}$$

其中 a、b、c、A、B 为常数。将此等式微分 n 次，则得到下列方程：

$$y^{(n+2)}+(ax^2+bx+c)y^{(n+1)}+[(2an+A)x+(bn+B)]y^{(n)}+$$
$$+[n(n-1)a+nA]y^{(n-1)}=0. \qquad (7)$$

设$-\frac{A}{a}(a\neq 0)$是零或是自然数；这时取

$$n=1-\frac{A}{a}, \qquad (8)$$

并且假设 $y^{(n)}=z$，将方程(6)化为下列形式：

$$z''+(ax^2+bx+c)z'+\left[(2a-A)x+b\left(1-\frac{A}{a}\right)+B\right]z=0. \qquad (9)$$

同一类型的方程(9)和(6)，如果其中之一可积分为封闭形式，则另一个也是如此。

作为例子，考虑方程(第三部分 2.56)

$$y''-x^2y'+xy=0, \qquad (10)$$

此方程可用积分法积分.

因为$-\frac{A}{a}=1$，所以方程(10)对应于下列类型(9)的方程：

$$z''-x^2z'-3xz=0, \qquad (11)$$

此方程可用积分法求解. 其特解为

$$z=x\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right).$$

如果将方程

$$y''+ax^2y'-axy=0$$

看作为(6)，此方程具有特解 $y=x$，则对应的类型(9)的方程具有下列形式：

$$z''+ax^2z'+3axz=0.$$

3°. 考虑非线性方程(第三部分 6.227)

$$(xy'-ay)y''+b(y')^2=0, \qquad (12)$$

其中 a 和 b 为常数。如果假设

$$y=\exp\int udx,$$

则(12)化为

$$(xu-a)(u'+u^2)+bu^2=0. \qquad (13)$$

这时经过变换

$$\eta = \eta e^{-t}, \quad x = e^t$$

则将方程(13)化为下列形式：

$$(\eta - a)\left(\frac{d\eta}{d\xi} - \eta + \eta^2\right) + b\eta^2 = 0.$$

因此，最后得到可分离变量的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta - \eta^2 - \frac{b\eta^2}{\eta - a}.$$

因而，方程(12)可用积分法积分.

4°. 下列方程(第三部分 2.41)可积分：

$$\left(ae^{bx} + \frac{1}{b^2}\right)y'' = y \tag{14}$$

(a, b 为常数)，因为立即可以写出特解：

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2.$$

关于一个一阶微分方程[1)]

D. 米特里诺维奇

我们考虑微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \alpha x y^{n-1}\frac{dy}{dx} + \beta y^n = 0, \tag{1}$$

其中 α, β, m, n 是实常数，并且 $\alpha\beta \neq 0, m \neq 1, m \neq n$. $m=1$ 和 $m=n$ 的情况很简单，这里从略.

将方程(1)写为下列形式：

$$\frac{p^{m-1}}{y^{n-1}} + \alpha x + \beta\frac{y}{p} = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

其中 $py \neq 0$；进行微分和经过变换 $dx = \frac{dy}{p}$ 以后，得到

$$\frac{(m-1)p^m - \beta y^n}{p}dp = \frac{(n-1)p^m - (\alpha+\beta)y^n}{y}dy. \tag{3}$$

---

1) D. S Mitrinovitch, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **58** (1955), p 1.

经过变量变换

$$p^m = u, \quad y^n = v, \tag{4}$$

此方程化为下列形式：

$$\frac{(m-1)u-\beta v}{mu} du = \frac{(n-1)u-(\alpha+\beta)v}{nv} dv. \tag{5}$$

假设 $u=vt$，则得到可分离变量的方程.

因而，方程(1)可用积分法积分.

在

$$\beta = \alpha \frac{m-1}{n-m}, \quad m \text{ 和 } n \text{ 为整数} \tag{6}$$

的情况下，方程(1)的通积分具有特别简单的形式：

$$y^{m-n} = C\alpha\left(\frac{m-n}{m-1}\right)^{m-1}(C+x)^{m-1}.$$

其中 C 为积分常数.

在 E 卡姆克的书中不存在一般的方程(1). 其中只包含方程

$p^3-\alpha xyp+2\alpha y^2=0$ (第三部分 1.525)；

$p^3-xy^4p-y^5=0$ (第三部分 1.527)；

$y^2p^3+2xp-y=0$ (第三部分 1.541)；

$16y^2p^3+2xp-y=0$ (第三部分 1.542).

这些方程乃是方程(1)满足条件(6)的一些特殊情况.

线性微分方程可分解的情况[1]

D. 米特里诺维奇

1°. 同时考虑 n 阶线性方程

$$\varphi_0(x)y^{(n)}+\varphi_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_{n-1}(x)y'+\varphi_n(x)y=0 \tag{1}$$

和特殊形式的线性方程组

1) D. S. Mitrinovitch, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* **230** (1950), p. 1130—1132.

$$\left.\begin{array}{l} f_{k,1}y'_{k-1}+f_{k,2}y_{k-1}=y_k,\quad k=1,2,\cdots,n-1,\quad y_0=y; \\ f_{n,1}y'_{n-1}+f_{n,2}y_{n-1}=0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

其中系数$f_{\lambda,\mu}$, $\lambda=1,\cdots,n$, $\mu=1,2$,是x的光滑函数,并且$f_{\lambda,1}\neq0$.

如果在方程(1)和某一个方程组(2)之间可以建立这样的对应关系,即当由关系式(2)消去y_1, y_2, $\cdots$, y_{n-1}之后,此方程组便化为方程(1),那么就说,方程(1)分解了.方程组(2)说明了可分解的方程(1)能用积分法来积分的那些情况.以适当的方式选择函数$f_{\lambda,\mu}$,便可得到n阶线性方程可积情况的某种分类法.

2°. 如果用上述方法研究方程

$$y''+(ax+b)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0, \tag{3}$$

其中a, b, A, B, C是任意常数,则可得到下述结论.

方程(3)可被分解,如果:

Ⅰ. 系数B和C具有下列四种表达式之一:

α) $B=-aq-bp-2pq$, $\quad C=a+p-q(b+q)$;

β) $B=(a+p)(b+q)+pq$, $\quad C=a+p-q(b+q)$;

γ) $B=(a+p)(b+q)+pq$, $\quad C=-p-q(b+q)$;

δ) $B=-aq-bp-2pq$, $\quad C=-p-q(b+q)$,

而系数$A=-p(a+p)$;a, b, p, q为任意参数.

Ⅱ. 系数C具有下列两种表达式之一:

α) $C=\frac{1}{4}(b^2-a^2k^2)-k^2p(a+p)+(2a+3p)$;

β) $C=\frac{1}{4}(b^2-a^2k^2)-k^2p(a+p)-(a+3p)$,

而系数

$$A=-p(a+p),\quad B=2kp(a+p)+\frac{1}{2}a(ak+b);$$

a, b, k, p为任意参数.

作为例子,我们写出相应于Ⅱ,α的方程组(2):

$$\begin{cases} (x-k)y'+\left[\left((a+p)x^2+\frac{1}{2}(b-3ak-4kp)x+\right.\right. \\ \qquad \left.\left.+\frac{1}{2}(ak^2+2k^2p-bk-2)\right)\right]y=y_1, \\ y_1'+\left[-px+\frac{1}{2}(b+ak+2kp)\right]y_1=0. \end{cases}$$

结论Ⅱ可以推广到下列方程组：

$$\begin{cases} f(x)y'+g(x)y=y_1, \\ y_1'+h(x)y_1=0. \end{cases}$$

其中 s 为自然数，

$$f(x)\equiv\prod_{\nu=1}^{s}(x-k_\nu);g(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{s+2}\lambda_\nu x^{s+2-\nu};h(x)\equiv\mu_1 x+\mu_2$$

而参数 $s, k_\nu, \lambda_\nu, \mu_\nu$ 满足条件(R)，这些条件此处虽未写出，其内容不过是：多项式 $f'+g+fh$ 和 $g'+gh$ 可被多项式 f 整除。写出这些条件(R)，便给出了方程(3) 的非常一般的可积准则。

如果在(2) 中考虑结构更为一般的表达式

$$A_0(x)y^{(\nu)}+A_1(x)y^{(\nu-1)}+\cdots+A_\nu(x)y$$

来代替 $a_0(x)y'+a_1(x)y$，则可得到许多非常一般的结果.

关于微分方程 $yy''+f(x)y^2=\varphi(x)$ 的积分法[1)]

T. 列　　寇

1°. 引理. 方程

$$\frac{d^2z}{dt^2}+q(t)\frac{dz}{dt}+q'(t)z=\frac{1}{z} \tag{1}$$

可用积分法来求解。

为了证明这一点，我们从微分方程

---

1) T. Leko, *Glasnik matematičko-fizički i astronomski*(2), 10(1955), p. 171—174.

$$\frac{d^2t}{d\xi^2}+q(t)\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2-\xi\frac{dt}{d\xi}=0 \tag{2}$$

出发，此方程的通积分可以写为：

$$\int e^{\int q(t)dt}dt=C_1\int e^{\int \xi d\xi}d\xi+C_2, \tag{3}$$

并且假设

$$\frac{dt}{d\xi}=z(t),\quad \frac{d^2t}{d\xi^2}=zz'. \tag{4}$$

于是得到

$$z'+q(t)z-\xi=0, \tag{5}$$

微分之后，则化为方程(1)。

方程(1)的通积分可按下列方式写出：

$$\left.\begin{aligned}&\int e^{\int q(t)dt}dt=C_1\int e^{\int \xi d\xi}d\xi+C_2,\\&z=C_1e^{\int \xi d\xi}e^{-\int q(t)dt},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 ξ 是参数，而 C_1 和 C_2 是任意常数。

2°.现在考虑方程

$$yy''+f(x)y^2=\varphi(x) \tag{7}$$

我们试图将此方程表示为(1)的形式；这时，由(6)则可得到所求的方程(7) 之解的积分表达式。

经过变换

$$y=U(t)z,\quad x=M(t) \tag{8}$$

可将方程(7)化为下列形式：

$$z''+\frac{2U'M'-UM''}{UM'}z'+\left[\frac{U''M'-U'M''}{UM'}+f(M)(M')^2\right]z=$$
$$=\frac{(M')^2\varphi(M)}{U^2z}. \tag{9}$$

我们应当满足这样的一组等式：

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{U'}{U}-\frac{M''}{M'}=q(t),\\&\frac{U''}{U}-\frac{U'M''}{UM'}+f(M)(M')^2=q'(t),\\&\varphi(M)\frac{(M')^2}{U^2}=1.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

方程组(1)的第三个方程给出

$$U=M'\sqrt{\varphi(M)},\tag{11}$$

微分之后,则得到

$$U'=M''\sqrt{\varphi(M)}+\frac{M'^2\varphi'(M)}{2\sqrt{\varphi(M)}}.\tag{12}$$

将(12)代入(10)的第一个方程,求得

$$q(t)=\frac{M''}{M'}+M'\frac{\varphi'}{\varphi}.\tag{13}$$

由(11),(12),(13)和(10)的第二个方程得到下 列关系式(14),如果我们想要将方程(7)化为(1)的形式,则应当满足此关系式:

$$M'\left(M''\sqrt{\varphi(M)}+(M')^2\frac{\varphi'(M)}{2\sqrt{\varphi(M)}}\right)'-M''\left(M''\sqrt{\varphi(M)}\right.$$

$$\left.+(M')^2\frac{\varphi'(M)}{2\sqrt{\varphi(M)}}\right)+f(M)\sqrt{\varphi(M)}(M')^4=$$

$$=(M')^2\sqrt{\varphi(M)}\left(\frac{M''}{M'}+M'\frac{\varphi'(M)}{\varphi(M)}\right)'.\tag{14}$$

去括号并化简,最后得到方程(7)可用积分法求积的条件:

$$2\varphi\varphi''=4\varphi^2f+3(\varphi')^2.\tag{15}$$

当 $f=0$ 时,将(15)积分,则得到为了使方程

$$yy''=\varphi(x)$$

可用积分法积分,φ 所应当满足的下列条件:

$$\varphi=\frac{a}{(x+b)^2};\ a,b\text{均为常数},$$

方程

$$yy''=\frac{a}{(x+b)^2}\tag{16}$$

的解如下:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{x+b}&=C_1\sqrt{2}\int e^{t^2}dt+C_2,\\ y&=\pm\frac{C_1}{\sqrt{a}}(x+b)e^{t^2},\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

线性微分方程的分类和利用递推公式构造其通解的新方法[1]

J. 兹伯尔尼克

(摘　　要)

[本文叙述线性微分方程规一化的新方法，用此方法可按统一的方式求得广泛的一类方程的解.

即研究下列形式的任意阶线性微分方程：

$$l[y]\equiv E_1[y]+Bx^r E_2[y]=0 \tag{1}$$

或者

$$l[y]\equiv E_1[y]+Bx^r E_2[y]=H(x), \tag{2}$$

其中 B 和 r 是任意的实常数或复常数，E_1 和 E_2 是欧拉算子：

$$E_1[y]\equiv\sum_{\mu=0}^{m}\alpha_\mu x^\mu y^{(\mu)},$$

$$E_2[y]\equiv\sum_{\mu=0}^{n}\beta_\mu x^\mu y^{(\mu)},$$

其中 m, n 是整数，α_μ 和 β_μ 是一些常数。我们将认为(1)是 m 阶方程，即 $m>n$.

---

1) J.Zbornik, *Sitzungsberichte Österreichische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, *Abt.* II *a*, **166** (1957), p.21—62.

属于这种类型的熟知的二阶方程有：勒让德方程，超几何方程和退化的超几何方程，贝塞耳方程，对于契比雪夫-拉盖尔多项式和契比雪夫-埃尔米特多项式的方程，等等.

为了解方程(1)，提出一种新的算子方法.这种方法的基本思想是，算子 $l[y]$ 可以按照一定的规律表示为“基本算子”乘积的形式：

$$l[y]=\left(\prod_{i=1}^{n} l_{p_i}+Bx^r\prod_{i=1}^{n} l_{b_i}\right)[y]. \tag{3}$$

其中 $l_s[y]=xy'-sy$. 借助于基本算子，建立这样一些特殊的表达式 $L_i(x)$, $i=1,2,\cdots,m$, 使得方程(1)的通解可以写为：

$$y=\sum_{i=1}^{m}C_iL_i(x)$$

C_i 是一些任意常数。

作为例证，可以用所提出来的方法给出一些具体例子的解，而得到前面列举的勒让德方程、贝塞耳方程等经典方程之解的新的有意义的封闭表示式.

特别指出，E.卡姆克一书中的下列方程是类型(1)的二阶方程的特殊情况：

第三部分 2.101——当 $B=a$, $r=2$ $(\lambda=1)$时，

2.130——当 $B=\frac{a}{2}$ $r=1$ $(\lambda=0)$时，

2.176——当 $B=1$, $r=2$ $(\lambda=-1)$时，

2.179——当 $B=a^2$, $r=2$ $(\lambda=-1)$时，

2.276——当 $B=-1$, $r=2$ $(\lambda=1/2)$时，

2.277——当 $B=-a$, $r=2$ $(\lambda=1/2)$时，

2.288——当 $B=\frac{1}{4}$, $r=1$ $(\lambda=-1/4)$时，

2.342——当 $B=a$, $r=-2$ $(\lambda=-1)$时，

2.350——当 $B=a^2$, $r=-2$ $(\lambda=0)$时，

2.400——当 $B=a$, $r=-4$ $(\lambda=-2)$时，

2.409——当 $B=(a-1)^2$, $r=2(1-a)$ $(\lambda=0)$时，

6.84——当 $B=\lambda^2b^2$, $r=2b$ $(\lambda=-a)$时.

因此，可以用同样的方法求解。也就是说，经过变换

$$x=\left(\frac{1}{B}r^2\xi\right)^{\frac{1}{r}},\quad x^{\lambda}y(x)=z(\xi) \tag{4}$$

当适当地选择 λ 时，可将上述方程中的任何一个，化为方程（第三部分 2.104）

$$\xi z''+\frac{1}{2}z'+z=0,$$

此方程具有解 $z=C_1\sin(2\sqrt{\xi})+C_2\cos(2\sqrt{\xi})$。

对于下列方程可以求得封闭形式的解：

1°. $x^2y''+x(Bx^r-a-b+1)y'-a(Bx^r-b)y=f(x)$，其中 a,b,B,r 是一些常数，$f(x)$是任意函数。

$$y=x^a\left\{C_1+\int x^{b-a-1}\exp\left(-\frac{B}{r}x^r\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[C_2+\int x^{-b-1}f(x)\exp\left(\frac{B}{r}x^r\right)dx\right]dx\right\}.$$

2°. $x(x^\nu+1)y''+1[(a-b+\nu)x^\nu+a]y'+b(1-a-\nu)x^{\nu-1}y=0$，其中 a,b,ν 是一些常数（第三部分 2.355）。

$$y=(x^\nu+1)^{-\frac{b}{\nu}}\left[C_1+C_2\int x^{-a}(x^\nu+1)^{-\frac{b+\nu}{\nu}}dx\right].$$

3°. 辐射波动方程（第三部分 2.154）：

$$x^2y''+\left(A^2x^2+Abx+\frac{1}{4}-c^2\right)y=0,$$

其中 A,b,c 是一些常数。

a) 如果$\frac{1}{2}ib=\frac{1}{2}+c+n$，$n=0,1,2,3,\cdots$，则存在 特解：

$$y=(Ax)^{\frac{1}{2}+c}e^{iAx}\sum_{k=0}^{n}a_k(Ax)^k,$$

其中

$$a_k=\frac{(2i)^kC_n^k}{k!\,C_{2n+k}^k}.$$

b) 如果$\frac{1}{2}ib=\frac{1}{2}+c-n$，$n=0,1,2,3,\cdots$，则存在通解：

$$y=\xi^{c+\frac{1}{2}}e^{i\xi}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left[\frac{C_1+C_2\int Ed\xi}{E\xi}\right],$$

其中 $\xi=Ax$；$E=\xi^{2c-n}e^{2i\xi}$。

c）如果 $b=in, n=0,1,2,3,\cdots$，则存在通解：

$$y=x^{c+\frac{1}{2}}e^{iAx}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{-c+\frac{n}{2}}e^{-iAx}Z_{c-\frac{n}{2}}(x)\right].$$

——俄译本编者注。]

参考文献中采用的缩写

当援引下列著作时仅仅指出作者的姓：

Ince—E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, 1927. London, 1927.
(俄译本：Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.)

Bellman—R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, 1953.
(中译本：R. 贝尔曼，微分方程的解的稳定性理论，科学出版社，1960.)

Watson—G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Function, 1945.
(俄译本：Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых функций, тт. I, II, 1949.)

Еругин—Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, 1970.

Coddington 和 Levinson—E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, 1955.
(俄译本：Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ил, 1958.)

Courant 和 Hilbert—R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, 1953.
(中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，I, 科学出版社，1965.)

Lefschetz—S. Lefschetz, Differential equations: geometric theory, 1957.
(俄译本：С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ил. 1961.)

Матвеев—Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, «Высшая школа», 1963.
Наймарк—М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, 1954; «Наука», 1969.
Петровский—И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1970.
(1953 年版中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程论讲义，人民教育出版社，1959.)
Понтрягин—Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1970.
(1961 年版中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962.)
Sansone—G. Sansone, Equazioni Differenziali, Nel Campo Reale, 1948.
(俄译本：Дж. Сансоне, обыкновенные дифференциальные уравнения, ил. т. I, 1953, т. II, 1954.)
Степанов—В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1958.)
(1953 年版中译本：В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，人民教育出版社，1960.)
Tricomi—F. Tricomi, Differential Equntions, Blackie, 1961.
(俄译本：Ф. Трикоми, Дифференциальных уравнения, ил. 1962.)
Whittaker 和 Watson—E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 1927.
(俄译本：Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. I, 1962, т. II, 1963.)
Хартман—Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Мир», 1970.
Янке, Эмде 和 Лёш—Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Лёш,

Специальные функции (формулы, графики, таблицы), «Наука», 1968.

Angot— A. Angot, Compléments de Mathématiques (A l'usage des ingénieurs de l'élektrotechnique et des télécommunications).

(俄译本：А. Анго, Математика для электрои радиоинженеров, 1967.)

Эльсгольц—Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, 1969.

Cesari—L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations.

(俄译本：Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1964.)

Немыцкий 和 Степанов—В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1952.

(1949 年版中译本：B. B. 涅梅茨基和 B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，上册 1956，下册 1959.)

Андронов, Витт 和 Хайкин—А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин. Теория колебаний, 1959.

(中译本：A. A. 安德罗诺夫，A. A. 维特和 C. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，上册 1973，下册 1974.)

Кузнецов—Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965.

Bateman 和 Erdelyi—H. Bateman and A Erdelyi, Higher Transcendental Functions.

(俄译本：Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1967.)

当援引杂志时，数目字按下列次序排列：(期数)，卷数(出版年代)，页数；例如：*Journal de Math.* (4), **5** (1889), p. 376 = Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris, 期 4，卷 5，1889 年，376 页。

下面列出引文中所用各种杂志名称的缩写：

[*ДАН СССР*—Доклады Академии наук СССР. Москва.

ЖТФ—Журнал технической физики. Ленинград.

ИАН СССР—Известия Академии наук СССР. Москва.

ИАН УССР—Известия Академии наук УССР. Киев.

Изв Харьк. матем. об-ва—Известия Харьковского математического общества. Харьков.

Матем. сборник—Математический сборник. Москва.

УМН—Успехи математических наук. Москва.——俄译本编者注.]

Abhandlungen München: Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse. München.

Acad. Belgique Bulletins: Académie royale de Belgique. Bulletins de la Classe des Sciences. Bruxelles.

Acad. Serbe: Académie Royale Serbe. Bulletin de l'Académie des Sciences mathématiques et naturelles. A: Sciences mathématiques et physiques. Belgrade.

Acta Math.: Acta Mathematica. Uppsala.

Acta Soc. Fennicae: Acta Societatis scientiarum Fennicae. Helsingforsiae.

Actualités scientif.: Actualités scientifiques et industrielles. Paris.

Akad. Wien: Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. IIa. Sitzungsberichte. Wien.

Americ. Journ. Math.: American Journal of Mathematics. Baltimore.

Americ. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Menasha, Ithaca.

Annalen Phys.: Annalen der Physik. Leipzig.

Annales Bruxelles: Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. Louvain.

Annales Ecole Norm.: Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Paris.

Annales Toulouse: Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Paris, Toulouse.

Annali di Mat.: Annali di Matematica pura ed applicata. Bologna.

Annali Pisa: Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Bologna.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Princeton.

Archiv. Math.: Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig, Berlin.

Arkiv för Mat.: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Stockholm.

Atti Accad. Lincei: Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma.

Atti Pontificia Accad.: Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei. Roma.

Atti Soc. Italiana: Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Roma.

Atti Veneto: Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Berichte Leipzig: Berichte über die Verhandlungen der (Königlich) Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig.

Buletinul Cernăuţi: Buletinul Facultăţii de Stiinţe din Cernăuţi. Cernăuţi.

Bulletin Acad. Polonaise Cracovie A: Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A. Sciences Mathématiques. Krakau.

Bulletin Americ. Math. Soc.: Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha, New York.

Bulletin Liège: Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège.

Bulletin math. Fac. Sc.: Bulletin mathématique des Facultés. des Sciences et des Grandes Ecoles.

Bulletin math. Soc. Roumaine: Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences. București.

Bulletin Sc. math.: Bulletin des Sciences mathématiques. Paris.

Bulletin Soc. Math. France: Bulletin de la Société Mathématique de France. Paris.

Compos. math.: Compositio mathematica. Groningen.

C. R. Paris: Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.

C. R. Roumanie: Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Roumanie. București.

Denkschriften Wien: Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Mathematisch-naturvissenschaftliche Klasse.

Deutsche Math.: Deutsche Mathematik. Leipzig.

Duke Math. Journal: Duke Mathematical Journal. Durham.

Enseignement math.: L'Enseignement mathématique, Paris —Genève.

Ergebnisse Math.: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin.

Giornale Mat.: Giornale di Matematiche di Battaglini. Napoli.

Ingenieur-Archiv: Ingenieur-Archiv. Berlin.

Intermèdiaire math.: L'intermédiaire des mathematiciens. Paris.

Jahrbuch FaM: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin.

Jahresbericht DMV: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig.

Japanese Journal of Math.: Japanese Journal of Mathematics. Tokyo.

Journal de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées. Paris.

Journ. f. Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin.

Journal Hokkaido: Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University.

Journal London Math. Soc.: Journal of the London Mathematical Society. London.

Journal Washington Acad.: Journal of the Washington Academy of Sciences. Washington.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Berlin.

Math. Gazette: The Mathematical Gazette. London.

Math. Zeitschrift: Mathematische Zeitschrift. Berlin.

Mémoires Liége: Mémoires de la Société des Sciences de Liége. Bruxelles.

Mémoires par divers Savants: Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Paris.

Memoirs College Engineering Kyoto: Memoirs of the College of Engineering. Kyoto Imperial University.

Memoirs Kyoto: Memoirs of the College of Science. Kyoto Imperial University. Series A.

Memoirs Kyūsyū: Memoirs of the Faculty of Science. Kyūsyū Imperial University. Series A, Mathematics. Hukuoka, Japan.

Memoirs Manchester: Memoirs and Proceedings of the Manchester Litterary and Philosophical Society. Manchester.

Memorie Accad. d'Italia: Memorie della Reale Accademia d'Italia Classe di Scienze fisiche e naturali.

Memorie Bologna: Memorie della R. Accademia delle

Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di Sciencze Fisiche. Bologna.

Monatshefte f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Leipzig.

Monthly Notices: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London.

Nachrichten Göttingen: Nachrichten von der (Königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Göttingen.

Nouvelles Annales Math.: Nouvelles Annales de Mathématiques. Paris.

Nova Acta Halle: Nova Acta. Abhandlungen der Kaiserlich Leopoldinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle.

Oregon Publication: University of Oregon Publication. Eugene (Oregon).

Oregon Publication, Math: University of Oregon Publication, Mathematics Series. Eugene (Oregon).

Philos. Magazine: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine. London.

Philosophical Transactions London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London.

Physical. Review: The Physical Review. Lancaster.

Physikal. Zeitschrift: Physikalische Zeitschrift. Leipzig.

Prace mat.—fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. Warschau.

Proc. Acad. Allahabad: Proceedings of the Academy of Sciences. Allahabad.

Proc. Phys.—math. Soc. Japan: Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan. Tokyo.

Proceedings Acad. Tokyo: Proceedings of the Imperial Academy. Tokyo.

Proceedings Americ. Acad.: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston.

Proceedings Amsterdam: Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings of the Section of Sciences. Amsterdam.

Proceedings Cambridge: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge.

Proceedings Edinburgh: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.

Proceedings Edinburgh Math. Soc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. London.

Proceedings London Math. Soc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London.

Proceedings Soc. Japan: Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan. Tokyo.

Proceedings Soc. London A: Proceedings of the Royal Society of London, Series A. London.

Proceedings USA Academy: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Boston.

Publications math. Belgrade: Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Belgrade.

Quarterly Journal: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. London.

Quarterly Journal Oxford: The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford series. Oxford.

Rendiconti Cagliari: Rendiconti del Seminario delle Facoltà di Scienze delle R. Università di Cagliari. Padova.

Rendiconti Istituto Lombardo: Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti. Milano.

Rendiconti mat.: Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni. Regia Universitá di Roma e Reale Istituto Nazionale di alta Matematica. Roma.

Rendiconti Napoli: Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli.

Rendiconti Palermo: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo.

Rendiconti Sem. Mat. Milano: Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. Milano.

Rendiconti Sem. Mat. Padova: Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Padova.

Rendiconti Sem. Mat. Roma: Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma.

Revue Électricité: Revue générale de l'Électricité. Organe de l'Union des Syndicats de l'Électricité et du Comité Électrotechnique Francais. Paris.

Schweiz. Bauzeitung: Schweizerische Bauzeitung. Zürich.

Schweiz. Naturf. Ges.: Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Zürich.

Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Göttingen.

Sitzungsberichte Heidelberg: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. A. Heidelberg.

Sitzungsberichte München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. München.

Sitzungsberichte Preuß. Akad.: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse. Berlin.

Tôhoku Math. Journ.: The Tôhoku Mathematical Journal. Sendai (Japan).

Transactions Americ. Math. Soc.: Transactions of the American Mathematical Society. Menasha—New York.

Transactions Cambridge Soc.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Transactions Soc. Edinburgh: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.

Washington Publications: University of Washington. Publications in Mathematics. Washington.

ZAMP: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. Basel.

Zeitschr ft f. angew. Math. Mech.: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Berlin.

Zeitschrift f. Astrophysik: Zeitschrift für Astrophysik. Berlin.

Zeitschrift f. Math. Phys.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig.

Zeitschrift f. Phys.: Zeitschrift für Physik. Berlin.

Zeitschrift math. Unterricht: Zeitschrift für mathematishen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig.

Zeitschrift VDI.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Berlin.

部分外国人姓氏中外文对照表

中文	外文	中文	外文
马提厄	Mathieu	阿贝耳	Abel
牛因格	Newing	希尔	Hill
贝克	Baker	伽辽金	Галёркин
韦伯	Weber	沃尔泰拉	Volterra
比克利	Bickley	阿达姆斯	Adams
邓克利	Dunkerley	伯努利	Bernoulli
牛顿	Newton	狄里克莱	Dirichlet
贝塞耳	Bessel	伯克霍夫	Birkhoff
皮卡尔	Picard	里兹	Ritz
兰尼斯卡坦	Lemniskaten	库朗	Courant
外尔斯特拉斯	Weierstrass	克莱罗	Clairaut
皮亚诺	Peano	克莱茵	Klein
汉克耳	Hankel	库塔	Kutta
布利斯	Bliss	李普希茨	Lipschitz
布里斯	Blaess	李雅普诺夫	Ляпунов
弗罗比尼乌斯	Frobenius	克雷洛夫	Крылов
卡拉西奥多里	Carathéodory	杰夫科特	Jeffcott
弗洛盖	Floguet	欧拉	Eurler
龙格	Runge	凯莱	Cayley
弗雷德霍姆	Fredholm	拉格朗日	Lagrange
托马斯	Thomas	拉梅	Lamá
达布	Darboux	拉盖尔	Laguerre
达兰贝尔	D'Alembert	罗森	Rawson
刘维尔	Liouville	坦普尔	Temple
米塔格	Mittag	拉普拉斯	Laplace
辛卜生	Simpson	帕塞法耳	Parseval

波赫哈默尔	Pochhammer
林德略夫	Lindelöf
柯文	Kurven
洛比达	L'Hospital
施瓦兹	Schwarz
契比雪夫	Чебышёв
胡尔威茨	Hurwitz
费米	Fermi
柯西	Cauchy
施特尔默尔	Störmer
施特鲁韦	Struve
洛梅尔	Lommel
埃尔米特	Hermite
莱弗勒	Leffler
诺伊曼	Neumann
都芬格	Duffing
格林	Green
格拉梅尔	Grammel
埃姆登	Emden
索思韦尔	Southwell
泰勒	Taylor
高斯	Gauss
朗斯基	Wronski
特雷夫茨	Trefftz
勒贝格	Lebesgue
勒让德	Legendre
梅林	Mellin
维勒斯	Willers
雅可比	Jacobi
傅立叶	Fourier
博古柳波夫	Боголюбов
富克斯	Fuchs
斯图姆	Sturm
蒂索	Tissot
惠特克	Whittaker
斯蒂尔吉斯	Stieltjes
瑞利	Rayleigh
黎卡提	Riccati
黎曼	Riemann
潘勒韦	Painlevé
霍伊恩	Heun
薛定谔	Schrödinger

题 目 索 引